概率论与数理统计
练习与提高（一）

GAILÜLUN YU SHULI TONGJI
LIANXI YU TIGAO

刘鲁文
黄 娟 乔梅红
主编

中国地质大学出版社
ZHONGGUO DIZHI DAXUE CHUBANSHE

概率论与数理统计练习与提高

（一）

GAILÜLUN YU SHULI TONGJI LIANXI YU TIGAO

刘鲁文　黄娟　乔梅红　主编

中国地质大学出版社
ZHONGGUO DIZHI DAXUE CHUBANSHE

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计练习与提高:全2册/刘鲁文,黄娟,乔梅红主编.—武汉:中国地质大学出版社,2018.6(2018.10重印)

ISBN 978-7-5625-4263-6

Ⅰ.①概…

Ⅱ.①刘…②黄…③乔…

Ⅲ.①概率论-高等学校-教学参考资料②数理统计-高等学校-教学参考资料

Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第078986号

概率论与数理统计练习与提高 刘鲁文 黄娟 乔梅红 **主编**

责任编辑:谌福兴 郑济飞 责任校对:徐蕾蕾

出版发行:中国地质大学出版社(武汉市洪山区鲁磨路388号) 邮政编码:430074

电 话:(027)67883511 传真:67883580 E-mail:cbb@cug.edu.cn

经 销:全国新华书店 http://cugp.cug.edu.cn

开本:787毫米×1092毫米 1/16 字数:250千字 印张:9.75

版次:2018年6月第1版 印次:2018年10月第2次印刷

印刷:武汉市籍缘印刷厂

ISBN 978-7-5625-4263-6 定价:28.00元(全2册)

前　言

为了便于在教学中教师批阅和学生使用，本书分为第一分册和第二分册。

第一分册包括随机事件及其概率、多维随机变量及其分布、大数定律与中心极限定理与参数估计。

第二分册包括随机变量及其分布、随机变量的数字特征、样本与抽样分布与假设检验。各章配有习题，书末附有答案。

本书可作为高等学校工科概率论与数理统计课程的教学习题参考书。

本书编写工作由乔梅红负责前言、随机事件及其概率、随机变量及其分布，黄娟负责多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理，刘鲁文负责样本与抽样分布、参数估计和假设检验。

限于编者水平，同时编写时间也比较仓促，书中一定存在不妥之处，希望广大读者批评和指正。

编　者

2018 年 5 月

目　录

第一章　随机事件及其概率

第一节　样本空间与随机事件

知识要点

1. 基本概念

(1)$A\subset B$:A 是 B 的子集

(2)$A\cup B$:A 与 B 的并集

(3)$A\cap B$:A 与 B 的交集

(4)$A\cap B=\varnothing$:A 与 B 互不相容

(5)$A-B$:A 与 B 的差

(6)$\overline{A}$:A 的对立事件

(7)$\overline{A\cup B}$:事件 A 和事件 B 至少一个发生的对立事件

(8)$\overline{A\cap B}$:事件 A 和事件 B 同时发生的对立事件

2. 常用公式

(1)$A+B=A+\overline{A}B=B+A\overline{B}$

(2)$A-B=A\overline{B}=A-AB$

典型例题

例 1　一枚硬币连丢 2 次,A:第一次出现正面,则 $A=\{$正正,正反$\}$;B:两次出现同一面,则 $B=\{$正正,反反$\}$,C:至少有一次出现正面,则 $C=\{$正正,正反,反正$\}$.

例 2　记录寻呼台 1min 内接到的呼唤次数.$S=\{0,1,2,3,\cdots\}$.

例 3　抛一颗骰子,观察出现的点数.$S=\{1,2,3,4,5,6\}$.

例 4　在一批灯泡中任意抽取一只,测试它的寿命.$S=\{t\mid t\geqslant 0\}$.

例 5 记录某地一昼夜的最低温度和最高温度. $S=\{(x,y)\mid T_0\leqslant x,y\leqslant T_1\}$.

例 6 将一枚硬币抛掷 3 次,观察出现正面的次数. $S=\{0,1,2,3\}$.

练习题

A 类题

1. 填空题

(1) 一枚硬币连丢 3 次,观察正面 H 、反面 T 出现的情形. 样本空间是________________.

(2)连续射击一目标,设 A_i 表示第 i 次射中,直到射中为止的试验样本空间为 Ω,则 $\Omega=$________________.

(3)用事件 A,B,C 表示下列事件:A,B,C 中不多于一个发生________;A,B,C 中不多于两个发生________;A,B,C 中至少有两个发生________.

2. 选择题

(1)以 A 表示事件"甲种产品畅销,乙种产品滞销",则其对立事件 $\overline{A}$ 为( ).

(A)甲种产品畅销,乙种产品滞销　　(B)甲、乙两种产品均畅销

(C)甲种产品滞销　　(D)甲种产品滞销或乙种产品畅销

(2)对于任意二事件 A 和 B,与 $A\cup B=B$ 不等价的是( ).

(A)$A\subset B$　　(B)$\overline{B}\subset\overline{A}$　　(C)$A\overline{B}=\varnothing$　　(D)$\overline{A}B=\varnothing$

(3)如果事件 A,B 有 $B\subset A$,则下述结论正确的是( ).

(A)A 与 B 同时发生　　(B)A 发生,B 必发生

(C)A 不发生 B 必不发生　　(D)B 不发生 A 必不发生

(4)A 表示"5 个产品全是合格品",B 表示"5 个产品恰有一个废品",C 表示"5 个产品不全是合格品",则下述结论正确的是( ).

(A)$\overline{A}=B$　　(B)$\overline{A}=C$　　(C)$\overline{B}=C$　　(D)$\overline{A}=B-C$

3. 计算下列各题

(1)写出下列随机实验的样本空间 Ω:

(a)一枚硬币连丢 3 次,观察出现正面的次数.

(b)10 只产品中有 3 只次品,每次从中取一只(取出后不放回),直到将 3 只次品都取出,记录抽取的次数.

(c) 丢一颗骰子. A：出现奇数点，则 $A=$ ________；B：数点大于 2，则 $B=$ ________.

(d) 有 A,B,C 3 个盒子，a,b,c 3 个球，将 3 个球分别装入 3 个盒子中，使每个盒子装一个球，观察装球情况.

(2) 判断下列说法是否正确：

(a) 如果事件 A 与 B 互不相容，则 A 与 B 互为对立事件.　(　)

(b) 如果事件 A 与 B 互不相容，B 与 C 互不相容，则 A 与 C 互不相容.　(　)

(c) "事件 A 与 B 中至少有一个发生"的对立事件是"A 与 B 都不发生".　(　)

(3) 下面各式说明什么包含关系？

(a) $AB=A$；

(b) $A+B=A$；

(c) $A+B+C=A$.

(4) 设 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$，$A=\{2,3,4\}$，$B=\{3,4,5\}$，$C=\{5,6,7\}$，具体写出下列各事件：

(a) $\overline{A}B$；

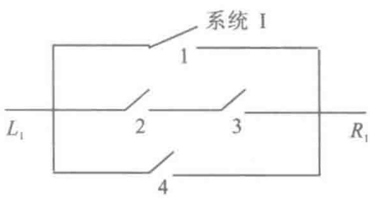
(b) $\overline{A}+B$；

(c) $\overline{\overline{A}\,\overline{B}}$；

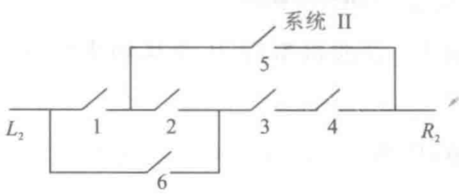
(d) $\overline{A\,\overline{BC}}$；

(e) $\overline{A(B+C)}$.

(5) 如下图，令 A_i 表示"第 i 个开关闭合"，$i=1,2,3,4,5,6$，试用 $A_1,A_2,\cdots,A_6$ 表示下列事件：①系统 Ⅰ 为通路；②系统 Ⅱ 为通路.



①



②

(6) 设 A,B 是两个任意事件，化简下列各式：

(a) $(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)$；

(b) $(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B})$.

第二节　事件的频率与概率

知识要点

1. 概率的统计定义 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$.

2. 概率的古典定义 $P(A)=\frac{m}{n}$,事件 A 中所含样本点数 m,样本空间 Ω 所含样本点总数 n.

3. 概率的公理化定义:设实值函数 $P(A)$的定义域为所考虑的全体随机事件组成的集合,且这个集合函数满足下列三条公理,则称 $P(A)$为事件 A 的概率.

(1)$0\leqslant P(A)\leqslant 1$

(2)$P(\Omega)=1$

(3) $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 两两互不相容,则 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(A_i)$.

4. 概率的常用公式

(1)$P(\overline{A})=1-P(A)$

(2)加法公式:$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

(3)减法公式:$P(A-B)=P(A)-P(AB)$

(4)$P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$或 $P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B)$

典型例题

例 1　设随机事件 B 及其和事件 $A\cup B$ 的概率分别是 0.3 和 0.6,那么 $P(A\overline{B})=$ ________.

解:因为 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$,则 $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=P(A\cup B)-P(B)=0.6-0.3=0.3$.

例 2　一部 10 卷文集,将它按任意顺序排放在书架上,试求其恰好按先后顺序排放的概率.

解:设 $A=\{$10 卷文集按先后顺序排放$\}$,将 10 卷文集按任意顺序排放,共有 10! 种不同的排法(样本点总数).只有 1,2,…,10 或者 10,9,…,1 是按顺序排放.所以 $P(A)=\frac{2}{10!}$.

例 3　某接待站在某一周曾接待过 12 次来访，已知所有这 12 次接待都是在周二和周四进行的. 问是否可以推断接待时间是有规定的？

解：假设接待站的接待时间没有规定，各来访者在一周的任一天中去接待站是等可能的，那么，12 次接待来访者都在周二、周四的概率为：$\frac{2^{12}}{7^{12}}=0.000\ 000\ 3$，即千万分之三. 所以由小概率事件在一次试验中不可能发生的原理可知，接待时间是有规定的.

例 4　袋中有 a 只白球，b 只黑球. 从中任意取出 k 只球，试求第 k 次取出的球是黑球的概率.

解：设：$A=$“第 k 次取出的球是黑球”

从 $a+b$ 个球中依次取出 k 个球，有取法 p_{a+b}^{k}种(样本点总数).

第 k 次取出黑球，有取法 b 种，前 $k-1$ 次取球，有取法 p_{a+b-1}^{k-1}种，因此事件 A 所含样本点数为 $b\cdot p_{a+b-1}^{k-1}$.

所以，$P(A)=\frac{b\cdot p_{a+b-1}^{k-1}}{p_{a+b}^{k}}=\frac{b}{a+b}$.

例 5　同时掷 5 颗骰子，试求下列事件的概率：

$A=\{5$ 颗骰子不同点$\}$；

$B=\{5$ 颗骰子恰有 2 颗同点$\}$；

$C=\{5$ 颗骰子中有 2 颗同点，另外 3 颗同是另一个点数$\}$.

解：同时掷 5 颗骰子，所有可能结果共有 6^5 个，所以 $P(A)=\frac{P_6^5}{6^5}$.

事件 B 所含样本点数为 $C_5^2\cdot 6\cdot P_5^3$，所以 $P(B)=\frac{C_5^2\cdot 6\cdot P_5^3}{6^5}=0.46$.

事件 C 所含样本点数为 $C_5^2\cdot P_6^2$，所以 $P(C)=\frac{C_5^2\cdot P_6^2,}{6^5}=0.04$.

练习题

A 类题

1. 填空题

(1)设随机事件 A,B 及其和事件 $A+B$ 的概率分别是 0.5，0.6 和 0.8，若 $\overline{B}$ 表示 B 的对立事件，那么 $P(\overline{A}\overline{B})=$__________.

(2)已知 $P(A)=0.4$，$P(B)=0.3$.

(a)当 A,B 互不相容时,$P(A+B)=$ ________,$P(AB)=$ ________.

(b)当 $B\subset A$ 时,$P(A+B)=$ ________,$P(AB)=$ ________.

(3)若 $P(A)=\alpha$, $P(B)=\beta$, $P(AB)=\gamma$,$P(\bar{A}+\bar{B})=$ ________,$P(\bar{A}B)=$ ________,$P(\bar{A}+B)=$ ________.

2. 选择题

(1)若二事件 A 和 B 满足 $P(B|A)=1$,则( ).

(A)A 是必然事件　(B)$P(B|\bar{A})=0$　(C)$A\subset B$　(D)$B\subset A$

(2)某事件的概率是 0.2,如果试验 5 次,则( ).

(A)一定会出现一次　(B)一定会出现 5 次

(C)至少出现一次　(D)出现的次数不确定

(3)设 A、B 是任意两个概率不为 0 的不相容的事件,则下列事件肯定正确的是( ).

(A)$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 不相容　(B)$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 相容

(C)$P(AB)=P(A)P(B)$　(D)$P(A-B)=P(A)$

(4)一对夫妇招待 4 位客人同桌共餐,随意入座,夫妇二人不相邻的概率为( ).

(A)$\frac{1}{5}$　(B)$\frac{2}{5}$　(C)$\frac{3}{5}$　(D)$\frac{4}{5}$

3. 计算下列各题

(1)对于概率 $P(A)$,$P(AB)$,$P(A+B)$,$P(A)+P(B)$,按从左到右、由小到大的要求重新给出排序,并简要说明依据.

(2)已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$,$P(AB)=0$,$P(AC)=P(BC)=\frac{1}{16}$,求事件 A,B,C 全不发生的概率.

(3)在电话号码簿中任取一个电话号码,则后面 4 个数全不相同的概率(设后面 4 个数中的每一个数都是等可能地取 0,1,…,9).

(4)某足球队在第一场比赛中获胜的概率是$\frac{1}{2}$，在第二场比赛中获胜的概率是$\frac{1}{3}$，如果在两场比赛中都获胜的概率是$\frac{1}{6}$，那么在这两场比赛中至少有一场获胜的概率是多少？

(5)在房间里有 10 个人，分别佩戴从 1 号到 10 号的纪念章，任选 3 个记录其纪念章的号码，则最小号码为 5 的概率是__________；最大号码为 5 的概率是__________.

B 类题

1. 对任意两个事件 A 与 B，证明：$P(A\overline{B}+\overline{A}B)=P(A)+P(B)-2P(AB)$.

2. 一个试验仅有 4 个互不相容的结果：A,B,C 和 D，检查下面各组概率是否是允许的.

(1)$P(A)=0.38, P(B)=0.16, P(C)=0.11, P(D)=0.35$；

(2)$P(A)=0.31, P(B)=0.27, P(C)=0.28, P(D)=0.16$；

(3)$P(A)=0.32, P(B)=0.27, P(C)=-0.06, P(D)=0.47$；

(4)$P(A)=1/2, P(B)=1/4, P(C)=1/8, P(D)=1/16$；

(5)$P(A)=5/18, P(B)=1/6, P(C)=1/3, P(D)=2/9$.

C 类题

1. 已知事件 A,B 仅发生一个的概率为 0.3，且 $P(A)+P(B)=0.5$，求 A,B 至少有一个不发生的概率.

2. 一个人把 6 根草紧握在手中，仅露出它们的头和尾. 然后随机把 6 个头两两相接，6 个尾两两相接，则放开手后 6 根草恰好连成一个环的概率是________________.

第三节　古典概型与几何概型

知识要点

等可能概型：试验的样本空间只包含有限个元素，试验中每个事件发生的可能性相同，若事件 A 包含 m 个基本事件，即 $A=\{e_{i_1}\}\cup\{e_{i_2}\}\cup\cdots\cup\{e_{i_m}\}$，这里 $i_1,i_2,\cdots,i_m$ 是 $1,2,\cdots,n$ 中某 m 个不同的数，则有 $P(A)=\dfrac{m}{n}$，m 是 A 包含的基本事件数，n 是 Ω 中基本事件的总数.

典型例题

例 1　一个袋子中装有 10 个大小相同的球，其中 3 个黑球，7 个白球，求：

(1)从袋子中任取一球，这个球是黑球的概率；

(2)从袋子中任取两球，刚好一个白球一个黑球的概率以及两个球全是黑球的概率.

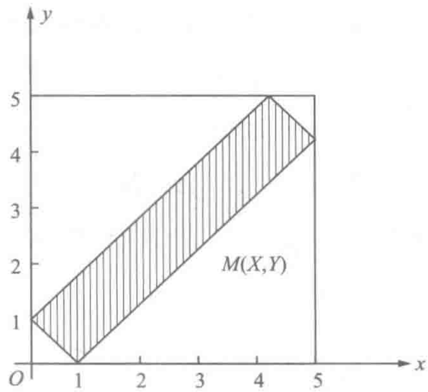
解：(1)10 个球中任取一个，共有 $C_{10}^1=10$ 种. 从而根据古典概率计算，事件 A："取到的球为黑球"的概率为 $P(A)=\dfrac{C_3^1}{C_{10}^1}=\dfrac{3}{10}$.

(2)10 个球中任取两球的取法有 C_{10}^2 种，其中刚好一个白球、一个黑球的取法有 $C_3^1\cdot C_7^1$ 种取法，两个球均是黑球的取法有 C_3^2 种，记 B 为事件"刚好取到一个白球一个黑球"，C 为事件"两个球均为黑球"，则 $P(B)=\dfrac{C_3^1C_7^1}{C_{10}^2}=\dfrac{7}{15}$，$P(C)=\dfrac{C_3^2}{C_{10}^2}=\dfrac{1}{15}$.

例 2　将一枚硬币抛掷 3 次. 设：事件 A 为"恰有一次出现正面"，事件 B 为"至少有一次出现正面"，求 $P(A)$，$P(B)$.

解:样本空间 $S=\{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH,TTT\}$,$n=8$,即 S 中包含有限个元素,且由对称性知每个基本事件发生的可能性相同,属于古典概型.A 为"恰有一次出现正面",$A=\{HTT,THT,TTH\}$,$k=3$,$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{3}{8}$,事件 B 为"至少有一次出现正面",$B=\{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH\}$,$k_1=7$,$P(B)=\frac{k_1}{n}=\frac{7}{8}$.

例 3　(会面问题)甲、乙二人约定在 12∶00 到 17∶00 之间在某地会面,先到者等一个小时后即离去,设二人在这段时间内的各时刻到达是等可能的,且二人互不影响,求二人能会面的概率.



解:如右图以 X,Y 分别表示甲乙二人到达的时刻,于是 $0\leqslant X\leqslant 5$,$0\leqslant Y\leqslant 5$,即点 M 落在图中的阴影部分.所有的点构成一个正方形,即有无穷多个结果.由于每人在任一时刻到达都是等可能的,所以落在正方形内各点是等可能的.

二人会面的条件是 $0\leqslant|X-Y|\leqslant 1$,$P=\frac{9}{25}$.

例 4　将 15 名新生随机地平均分配到 3 个班中去,这 15 名新生中有 3 名是优秀生.问:

(1)每个班各分配到一名优秀生的概率是多少?

(2)3 名优秀生分配到同一个班级的概率是多少?

解:15 名新生平均分配到 3 个班级中去的分法总数为:

$$C_{15}^{5}\times C_{10}^{5}\times C_{5}^{5}=\frac{15\times14\times13\times12\times11}{5!}\times\frac{10\times9\times8\times7\times6}{5!}\times\frac{5\times4\times3\times2\times1}{5!}=\frac{15!}{5!\times5!\times5!}$$

(1)将3名优秀生分配到3个班级,使每个班级都有1名优秀生的分法共有3!种.其余12名新生平均分配到3个班级中的分法共有$\frac{12!}{4!4!4!}$.

每个班各分配到 1 名优秀生的分法总数为:$\frac{3!\times12!}{4!4!4!}$

于是所求的概率为:

$$p_1=\frac{3!\times 12!}{4!4!4!}\Big/\frac{15!}{5!5!5!}=\frac{25}{91}=0.2747.$$

(2)3 名优秀生分配到同一个班级的概率为：

$$p_2=3\times\frac{12!}{2!5!5!}\Big/\frac{15!}{5!5!5!}=\frac{6}{91}=0.0659.$$

例 5 从 1～9 这 9 个数中有放回地取出 n 个数，试求取出的 n 个数的乘积能被 10 整除的概率.

解：$A=$\{取出的 n 个数的乘积能被 10 整除\}；

$B=$\{取出的 n 个数至少有一个偶数\}；

$n=$\{取出的 n 个数至少有一个 5\}.

则 $$A=B\cap C$$

$$P(A)=P(BC)=1-P(\overline{BC})=1-P(\bar{B}\cup\bar{C})$$

$$=1-[P(\bar{B})+P(\bar{C})-P(\bar{B}\bar{C})]=1-\frac{5^n}{9^n}-\frac{8^n}{9^n}+\frac{4^n}{9^n}$$

练习题

A 类题

1. 填空题

(1)将长为 l 的棒任意地折成 3 段，求三段的长度都不超过$\frac{1}{2}$的概率为__________.

(2)一批(N 个)产品中有 M 个次品. 从这批产品中任取 n 个，其中恰有 m 个次品的概率是__________.

(3)将 C、C、E、E、I、N、S 7 个字母随机地排成一行，那么恰好排成英文单词 $SCIENCE$的概率为__________.

(4)甲乙两人约定在 16：00 到 17：00 间在某地相见，他们约好当其中一人先到后一定要等另一人 15min，若另一人仍不到则可以离去，试求这两人能相见的概率为__________.

(5)设 A 为圆周上一定点，在圆周上等可能任取一点与 A 连接，弦长超过半径$\sqrt{2}$倍的概率为__________.

(6)在区间(0,1)中随机取两个数，则这两个数之差的绝对值小于$\frac{1}{2}$的概率为______.

2. 选择题

(1)n 张奖券中含有 m 张有奖的，k 个人购买，每人一张，其中至少有一人中奖的概率是(　　).

(A)$\dfrac{m}{C_n^k}$　　(B)$1-\dfrac{C_{n-m}^k}{C_n^k}$　　(C)$\dfrac{C_m^1 C_{n-m}^{k-1}}{C_n^k}$　　(D)$\sum\limits_{r=1}^{k}\dfrac{C_m^r}{C_n^k}$

(2)掷两枚均匀硬币，出现一正一反的概率是(　　).

(A)$\dfrac{1}{3}$　　(B)$\dfrac{1}{2}$　　(C)$\dfrac{1}{4}$　　(D)$\dfrac{3}{4}$

(3)在两根相距 6m 的木杆上系一根绳子，并在绳子上挂一盏灯，则灯与两端距离都大于 2m 的概率是(　　).

(A)$\dfrac{1}{2}$　　(B)$\dfrac{1}{3}$　　(C)$\dfrac{1}{4}$　　(D)$\dfrac{1}{5}$

3. 计算下列各题

(1)已知 10 只晶体管中有 2 只次品，在其中取 2 次，每次随机取一只，作不放回抽样，求下列事件的概率.

(a)两只都是正品；(b)两只都是次品；(c)一只是正品，一只是次品；(d)至少一只是正品.

(2)把 10 本书任意放在书架上，求其中指定的 5 本书放在一起的概率.

(3)在集合$\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 5,0\leqslant y\leqslant 4\}$内任取一个元素，能使不等式$\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{3}-\dfrac{19}{12}\geqslant 0$成立的概率是多少？

(4)从 0～9 中任取 4 个数构成电话号码(可重复取)求：

(a)在一个电话号码中有 2 个数字相同，另 2 个数字不同的概率 p；

(b)在一个电话号码中至少有 3 个数字相同的概率 q.

(5)在区间$[0,1]$上任取 3 个实数 x,y,z，事件 $A=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2<1\}$. 求事件 A 的概率.

B 类题

1. 在 5 双不同的鞋中任取 4 只，求：

(1)恰有两只配成一双的概率；

(2)至少有两只配成一双的概率.

2. 将长为 l 的木棒随机的折成 3 段，求 3 段构成三角形的概率.

3. 设点(p,q)随机地落在平面区域 D:$|p|\leqslant 1$,$|q|\leqslant 1$ 上，试求一元二次方程 $x^2+px+q=0$ 两个根，求：

(1)都是实数的概率；

(2)都是正数的概率.