杨超
考研数学概率论与数理统计超解读

主审 胡金德

主 编 杨超

副主编 靳阳

原命题专家、辅导专家联合编写

全国著名辅导机构考研数学必备教材

理工社®

北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

杨超考研数学

概率论与数理统计超解读

主　编 杨超　　　副主编 靳阳

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

杨超考研数学概率论与数理统计超解读/杨超主编. —北京:北京理工大学出版社，2018.7
ISBN 978－7－5682－5906－4

Ⅰ.①杨… Ⅱ.①杨… Ⅲ.①概率论－研究称－入学考试－自学参考资料 ②数理统计－研究称－入学考试－自学参考资料 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 159245 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)
(010)82562903(教材售后服务热线)
(010)68948351(其他图书服务热线)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 三河市宇通印刷有限公司
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1 / 16
印　　张 / 13.5
字　　数 / 350 千字
版　　次 / 2018 年 7 月第 1 版　2018 年 7 月第 1 次印刷
定　　价 / 29.90 元

责任编辑 / 多海鹏
文案编辑 / 多海鹏
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 边心超

前　言

为帮助报考全国硕士研究生入学考试的广大考生在短期内快速提高数学的应试成绩，作者在对1987—2018年共32套真题进行深入研究的基础上，将其归纳、分类、整理，结合作者多年来在考研辅导班上的一线经验以及考生们的成绩反馈，按照最新《考试大纲》的要求，编写了这套考研数学系列丛书，本书是年系列中的《概率论与数理统计》部分.

本部分特色如下：

1. 紧扣考纲，考点全析

考研数学的出题依据是当年的考试大纲，一般不会有超纲题，目前数学的考试大纲呈现出超强的稳定性，从2009年至今，考试大纲一字未变，这为考生备考提供了极大的方便，故本书严格按照考试大纲规定的考点和考试要求做全方位的解析：凡是考试大纲要求的考点，明确其怎么考、怎么出题，以及考生们掌握到何种程度才能快速拿分.

2. 基础强化，循序渐进

考研数学不同于大学本科的数学基础课，它并不深究于数学基础理论层面，而是考查考生运用知识的能力，选择题考查考生分析、判断、比较、计算能力；填空题考查考生对知识点的记忆、计算能力；解答题考查考生综合运用知识进行大型计算的能力. 举个例子来说，回忆下小学时是怎么学习九九乘法表的，是不是把这个表记住，再结合四则运算会做题就顺利过关了，并不需要深究为啥 $1\times1=1$，$1\times2=2$，…，同样考研数学，只需要考生记忆并识别出这些知识点，掌握单一知识点怎么灵活运用，相似、相近知识点的区别在哪里，多个知识点组合又该怎么综合运用即可，在灵活运用知识点的过程中考查考生的记忆、分析、判断、比较、计算、综合运用知识的能力，因此本书分为基础篇和强化篇，基础篇带着大家认识一个个知识点，单一知识点如何灵活运用；强化篇注重知识点间的区别及其综合运用. 俗话说，熟能生巧，只有通过基础篇夯实基础，才能在强化篇灵活地综合运用知识点，这是个循序渐进的过程.

3. 归纳总结，触类旁通

考试大纲规定的知识点有200多个，一共23道题，3个小时的做题时间，分析历年真题，可以看出每一道考题均涉及三个及以上知识点，综合性很强，且很大程度上是考查考生的条件反射能力，因此本书在强化篇将知识点以题型的形式进行归纳总结，将零散的知识点归结成块，遇到类似题目能瞬间想到应对方案一、二、三，这样安排条理清晰，便于掌握，可快速拿分.

4. 重视计算，高分速成

无论是选择题、填空题还是解答题，均需要准确计算才能得分，因此提高计算能力是取得高

分的关键环节.计算能力的提高离不开大量习题的练习,只有通过做一个个的题目才能发现自己在计算方面存在的问题,比如最常见的上下数字抄错、遗漏负号、计算错误、看错数字、记错公式结论等,因此本书配置了适量的练习题,一方面能有效提高考生的计算能力,另一方面也有利于考生学会在题目中运用知识点做题.

本书的写作,参阅了有关书籍(见附录),引用了一些例子,恕不一一指明出处,在此向有关作者表示感谢!感谢考生的宝贵反馈(反馈方式见致谢),感谢图书校对的工作人员,本书是考生考研路上的一块垫脚石,望考生利用好本书.

使用说明

本书是我们在研究历年与考研真题有关的类型题的情况下，经过改编，同时加大题量，而出版的一本书. 本书供读者检查、演练之用，而每一个试题的解析，我们尽力给读者提供全面、深刻、由命题人把关的试题解析. 其中，为了让考生有针对性地备考，有些较早年份的题目，我们也做了必要的删除. 在这里需要提醒大家的是，有的同学总认为教材中的题目太过简单，要注意不同的例题采用不同的方法，教材中的例题和习题一定要熟练掌握. 做题时要善于总结方法和技巧，也要总结自己做题时经常犯的错误，掌握好“三基”，即基本概念、基本原理、基本方法. 数学中有很多概念，保证一定量题目的练习，才能做到举一反三和运算能力的提升，它有一些什么性质，以及该概念的延伸和拓展，很多基础类题目都是围绕概念进行展开的. 方法是数学的灵魂，在基础方法之上技巧和能力才能提升. 教材中的例题很具有代表性、典型性，是对概念和定理的理解. 如果我们能把此课本中的题熟练做两遍以上，那么大家考研数学的分数一定会令自己满意.

应试指导

在进行考研数学的备考时，针对概率的复习，我们一定要找到提高效率的方法和技巧. 下面我们为大家精心准备了考研数学概率部分的复习技巧：

考研数学概率各章口诀轻松记

第一章　随机事件

互斥对立加减功，条件独立乘除清；

全概逆概百分比，二项分布是核心；

必然事件随便用，选择先试不可能.

第二、三章　一维、多维随机变量

1) 离散问模型，分布列表清，边缘用加乘，条件概率定联合，独立试矩阵

2) 连续必分段，草图仔细看，积分是关键，密度微分算

3) 离散先列表，连续后求导；分布要分段，积分画图算

第四、五、六、七章　数理统计、参数估计

正态方和卡方出，卡方相除变 F；

若想得到 t 分布，一正 n 卡再相除.

样本总体相互换，矩法估计很方便；

似然函数分开算，对数求导得零蛋；

区间估计有点难，样本函数选在前；

分位维数惹人嫌，到处置信 U 方甜.

第七章　假设检验

检验均值用 U－T，分位对称别大意；

方差检验有卡方，左窄右宽不稀奇；

不论卡方或 U－T，维数减一要牢记；

代入比较临界值，拒绝必在否定域！

考研数学概率的复习方法

在考研数学中，除数二外，数一和数三都考查概率统计的知识，在整张试卷中占 22％ 的分值，和线性代数所占比重是一样的，考生要想取得高分，学好概率统计也是必要的。纵观考研数学各科，概率这门学科与别的学科是不太一样的. 概率要求对基本概念、基本性质的要求比较强，对计算的技巧要求反而比较少.

概率论与数理统计可分为概率和数理统计两部分. 在考研中，概率的重点考查对象在于随机变量及其分布和随机变量的数字特征. 从历年试题看，概率论与数理统计这部分内容考查考生对基本概念、原理的深入理解以及分析解决问题的能力要求较高，需要考生做到能灵活地运用所学的知识，建立起正确的概率模型，综合运用高等数学中的极限、连续、导数、极值、积分、广义积分以及级数等知识去解决概率问题.

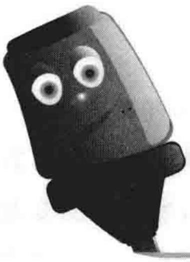
现阶段老师建议大家参考 2018 年考研大纲规定（2019 年考研大纲还没有发布），将概率论与数理统计的内容仔细梳理一遍，将基本概念、基本理论和基本方法结合一定的基本题练习彻底吃透，这样才能在题目形式千变万化的情况下把握“万变不离其宗”的本质，做到灵活应变. 同时，在学习中要明确重点，对于不太重要的内容，如古典概型和几何概型，只要掌握一些简单的概率计算即可，不需要投入太多精力.

数理统计这部分考查的重点则在于与抽样分布相关的统计量的分布及其数字特征. 所以建议考生重点做到将基本概念理解清楚. χ^2 分布，t 分布，F 分布的概念及性质要熟悉，考题中常会涉及. 参数估计的矩估计法和最大似然估计法，验证估计量的无偏性是要重点掌握的. 假设检验考查到的不多，但只要是考纲中规定的都不应该忽视. 显著性检验的基本思想、假设检验的基本步骤、假设检验可能产生的两类错误以及单个及两个正态总体的均值和方差的假设检验是重要考点.

Contents 目录

基础篇

强化篇



基础篇

第一章　随机事件及其概率

【考试内容】

随机事件与样本空间　事件的关系与运算　完备事件组　概率的概念　概率的基本性质　古典型概率　条件概率　概率的基本公式　事件的独立性　独立重复试验

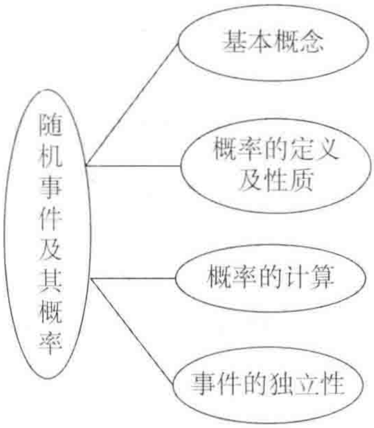
【考试要求】

1. 了解样本空间(基本事件空间)的概念,理解随机事件的概念,掌握事件之间的关系及运算.

2. 理解概率、条件概率的概念,掌握概率的基本性质,会计算古典概型和几何概型概率,掌握概率的加法公式、减法公式、乘法公式、全概率公式以及贝叶斯公式.

3. 理解事件独立性的概念,掌握用事件独立性进行概率计算;理解独立重复试验的概念,掌握计算有关事件概率的方法.

本章知识结构图:



【备考建议】

事件之间的关系与运算要背诵记忆,具体来说:包含、相等、和、差、交、互不相容、互斥要从发生没发生和 Venn 图两个角度来记忆和背诵;交换律、结合律、分配律、德·摩根律要记忆熟练.记忆小窍门:事件之间的关系与运算按照普通代数运算去记忆,有差别的地方单独记忆.尤其是德·摩根律是集合所独有的性质,应重点记忆.

1. 概率的定义中,古典概率掌握摸球模型求概率即可,几何概率会求连续型区域的概率即可,概率的公理化定义的三要素要记忆清楚,会利用它求参数即可.

2. 概率的性质要记忆清楚,尤其是随机事件综合运算的概率,如必然事件、不可能事件、事件和与差的概率,要熟练记忆.

3. 熟练记忆条件概率的计算公式、乘法公式.

4. 掌握全概率公式及贝叶斯公式的使用条件和使用方法，重点通过做题练习方能掌握.

5. 记忆事件相互独立的判断公式及相关结论，重点掌握相互独立和互不相容二者无关的特例.

6. 书中例题及其练习题均要熟练做出来，小题不超过 4 分钟，大题不超过 10 分钟，只有亲自下手去做，才知道如何灵活运用知识点去解题拿分，切忌眼高手低，要养成一个良好的做题习惯.

第一节 样本空间与随机事件

在自然界和人类生产生活中存在着两种不同的现象：一种是确定性现象，就是某条件满足的情况下必然发生的现象. 比如："向上抛一石子，必然下落"；"在平面几何中，三角形内角之和必然等于 180°" 等. 另一种是不确定性现象，即使某种条件满足以后，也可能发生或不发生的现象，人们称之为随机现象. 比如："抛一枚硬币，是出现正面还是反面"；"掷一枚骰子，观察出现的点数"；"同一门火炮向同一目标射击，各次弹着点不尽相同，无论怎样控制射击条件，在一次射击之前无法预测弹着点的确切位置"；"保险公司承担某项保险业务，其收益如何" 等. 可以看到，在我们所生活的世界上，无论是从抛硬币、掷骰子和玩扑克等简单的机会游戏，还是到复杂的社会现象；从婴儿的诞生，到世间万物的繁衍生息；从流星坠落，到大自然的千变万化……，充满了大量的不确定性和随机性.

概率论与数理统计就是来寻求随机现象发生的可能性，研究与揭示随机现象统计规律性的一门数学学科，并对这种可能性的大小给出度量方式及算法.

一、随机试验与样本空间

人们在经过长期实践和深入研究中发现，随机现象虽然在每次试验或观察结果来看，具有不确定性，但在大量重复试验或观察下它的结果却呈现出了某种规律性.

法国数学家蒲丰(George-Louis Leclerc de Buffon)、英国统计学家卡尔 · 皮尔逊(Karl Pearson)、英国统计学家费希尔(Ronald Aylmer Fisher) 等人曾经将一枚硬币反复抛掷，观察出现正反面的次数，他们均发现：当抛掷的次数越来越大时，出现正面的频率 $n_{正}/n$ 越来越向 0.5 靠近，呈现了一定的规律性. 其试验数据见表 1.1.

表 1.1　抛掷硬币试验

人　　名	抛掷次数 n	正面出现次数 $n_{正}$	频率 $\frac{n_{正}}{n}$
蒲　丰	4 040	2 048	0.506 9
费希尔	10 000	4 979	0.497 9
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

(一) 随机试验 E

满足下列条件的就称之为随机试验：

1. 可以在相同条件下重复进行；

2. 每次试验的结果可能不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

3. 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

在本书中我们提到的试验都是指随机试验.

我们是通过研究随机试验来研究随机现象的.

（二）样本空间 Ω

随机试验的每一个可能结果，我们把它称为随机试验的基本事件，为了便于研究随机试验，将随机试验 E 的所有基本事件的全体所构成的集合称为随机试验的样本空间 Ω；样本空间 Ω 中的元素就是随机试验 E 的基本事件，称为样本点 ω.

例 1.1 试写出下列随机试验的样本空间.

E_1：抛掷一枚硬币，观察出现正面还是反面；

E_2：抛掷一枚均匀对称的骰子，观察出现的点数；

E_3：一口袋中装有黑白两种颜色的小球，从袋中任取一球，观察其颜色；

E_4：记录某地一昼夜的温度情况；

E_5：测量在 0 和 1 之间取值的两个物理量 X 和 Y 的数值(不含 0 和 1)；

E_6：记录一段时间，某地区 110 报警次数.

解：E_1 有两个基本事件，出现正面，出现反面，故

$$\Omega_1 = \{正面,反面\};$$

E_2 有 6 个基本事件，即出现 1 点，2 点，3 点，4 点，5 点，6 点，故

$$\Omega_2 = \{1,2,3,4,5,6\};$$

E_3 有 2 个基本事件，取到白球，取到黑球，故

$$\Omega_3 = \{黑球,白球\};$$

E_4 的基本事件无数个，介于最高温度和最低温度之间，故

$\Omega_4 = \{x \mid T_L \leqslant x \leqslant T_m\}$；$T_L$ 和 T_m 分别表示该地区的最低和最高温度；

E_5 的基本事件无数个，(x,y) 的 x 和 y 均介于 0 到 1 之间，故

$$\Omega_5 = \{(x,y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1\};$$

E_6 的基本事件为出现 0 次报警，1 次报警，2 次报警，…，故

$$\Omega_6 = \{0,1,2,3,\cdots\}.$$

二、随机事件的概念

随机事件：一般，我们称试验 E 的样本空间 Ω 的子集为 E 的**随机事件**，简称**事件**. 在每次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，称这一**事件发生**.

事件分为基本事件和复合事件，随机试验中的每一个可能结果就是基本事件，它是最为简单的随机事件，不可再分；由若干个基本事件组合而成的事件就是复合事件，也叫复杂事件. 比如：抛掷一枚均匀对称的骰子，观察出现的点数的随机试验中，可能结果{出现 1 点}，{出现 2 点}，…，{出现 6 点}，这些都是基本事件；而{出现偶数点}，{出现大于 2 的点}，这些就是复合事件. 由于随机事件是由基本事件组成，或者是由基本事件复合而成，因此，在引入样本空间 Ω 以后，我们看到随机试验 E 的事件实际上就是讨论样本空间 Ω 的子集，而且事件的发生，当且仅当

子集中的一个样本点发生.

为了便于更好地讨论随机现象,探索其规律,我们把每次试验都必然发生的事件称为必然事件,记为Ω,比如:抛掷一枚均匀对称的骰子,观察出现的点数的随机试验中,{出现1到6点};把每次试验都不可能发生的事件称为不可能事件,记为Φ,比如:抛掷一枚均匀对称的骰子,观察出现的点数的随机试验中,{出现7点}.

三、事件之间的关系与运算

事件是一个集合,因而事件间的关系与事件的运算自然按照集合论中集合之间的关系和集合运算来处理.下面给出这些关系和运算在概率论中的提法,并根据"事件发生"的含义,给出它们在概率论中的含义.

(一)事件的关系与运算

设A,B为两个事件,x是A或者B中的元素.

1.事件的包含与相等

如图1.1所示,若$x \in A \Rightarrow x \in B$,即事件$A$发生必导致事件$B$发生,称为$A$包含于$B$,或事件$A$为事件$B$的子事件,记作$A \subset B$.显然,$A$中的每一个样本点在$B$中都找得到.

若$A \subset B$且$B \subset A$,则称事件A与事件B相等,记作$A = B$.

2.事件的积

如图1.2所示,事件A与事件B同时发生,这一事件称为事件A与事件B的积,也叫事件A与事件B的交,记作$A \cap B$,简记为AB.显然AB的样本空间是由A和B中共有的样本点组成的.新的样本空间的样本点减少.

一般地,"n个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$同时发生"是一事件,称为事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$的积事件,记作$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$或$A_1 A_2 \cdots A_n$,简记为$\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$.

3.事件的和

如图1.3所示,事件A与事件B至少有一个发生,这一事件称为事件A与事件B的和,也叫事件A与事件B的并,记作$A \cup B$.显然$A \cup B$的样本空间是由A和B中所有的样本点组成的,但每个样本点只能写一次.新的样本空间的样本点增多.

一般地,"n个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$至少有一个发生"是一事件,称为事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$的和事件,记作$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$,简记为$\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$.

4.事件的互斥

若$A \cap B = \Phi$,即事件A与事件B不能同时发生,则称事件A与事件B互斥,也称为互不相容,显然事件A与事件B没有共同的样本点,如图1.4所示.

5.事件的对立

若$A \cap B = \Phi$,且$A \cup B = \Omega$,即事件A与事件B必有且仅有一个发生,则称事件A与事件B对立,也称为互逆事件,显然事件A与事件B没有共同的样本点,同时所有的样本点又构成样本空间,如图1.5所示,事件A的对立事件可写为$\overline{A}$.

6.事件的差

如图 1.6 所示，事件 A 发生而事件 B 不发生，这一事件称为事件 A 与事件 B 的差，记为 $A-B$，显然 $A = AB \cup A\overline{B}$.

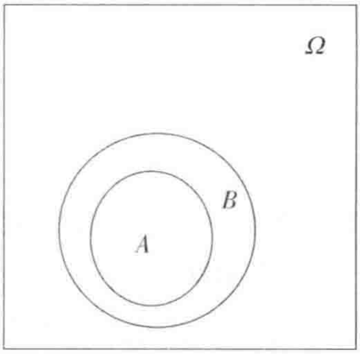


图 1.1　$A \subset B$

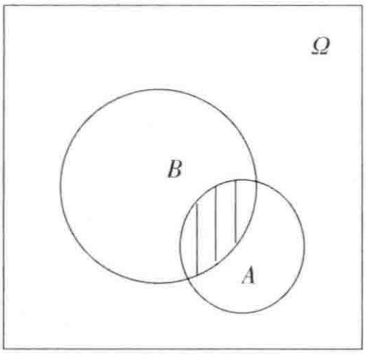


图 1.2　$A \cap B$

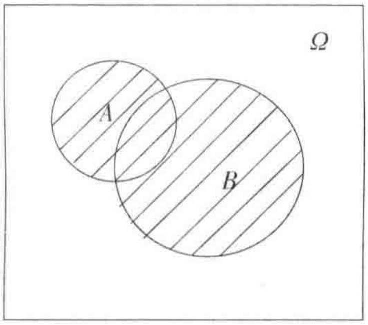


图 1.3　$A \cup B$

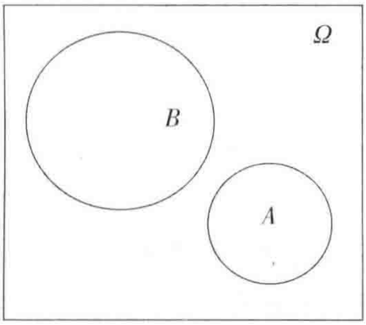


图 1.4　$A \cap B = \Phi$，互不相容

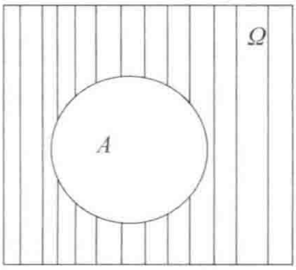


图 1.5　$\overline{A}$

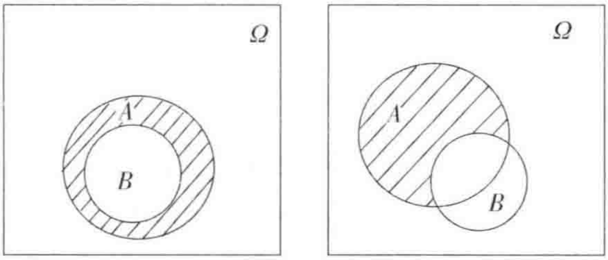


图 1.6　$A-B$

（二）事件的运算性质

1. 交换律：$A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A$；
2. 结合律：$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$；
3. 分配律：$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$；
4. 德摩根对偶律：$\overline{A \cup B} = \overline{A}\,\overline{B}, \overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$；

对多个事件的情形同样有：$\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}, \overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}$.

下列等式也可证明成立：

$A \cup A = A,\ A \cup \Omega = \Omega,\ A \cup \Phi = A, AA = A,\ A\Omega = A,\ A\Phi = \Phi,$

$A - B = A - AB = A\overline{B}, A \cup B = A \cup (B\overline{A}) = (A\overline{B}) \cup B.$

例 1.2　试用事件的关系证明：$(A \cup B) - AB = (A\overline{B}) \cup (\overline{A}B)$.

证明：$(A \cup B) - AB = (A \cup B) \cap (\overline{AB}) = (A \cap \overline{AB}) \cup (B \cap \overline{AB})$

$$= (A \cap (\overline{A} \cup \overline{B})) \cup (B \cap (\overline{A} \cup \overline{B}))$$
$$= (A\overline{A} \cup A\overline{B}) \cup (B\overline{A} \cup B\overline{B})$$
$$= (A\overline{B}) \cup (\overline{A}B).$$

习题 1－1

1. 试写出下面随机试验的样本空间.

(1) 将一枚硬币抛掷两次，观察正反面出现的情况；

(2) 设一长度为 L 的棉纱上随机地分布有两个疵点，将棉纱分成 3 段，观察各段的长度；

(3) 在某高速公路上随机抽查 8 辆汽车，调查其中违章车辆数.

2. 设 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{0,1,2,3,4\}$，$C=\{2,1,3\}$，试讨论 A、B、C 的关系.

3. 设 A,B,C 表示三个事件，试用它们表示下列事件：

(1) A 发生，B 与 C 不发生；

(2) A 与 B 发生，C 不发生；

(3) A,B 与 C 都发生；

(4) A,B 与 C 至少有一个发生 ；

(5) A,B 与 C 全不发生；

(6) A,B 与 C 至少有两个发生.

4. 在学校经济管理系的学生中任选一名学生，若事件 A 表示被选学生是女生，事件 B 表示该生是大二学生，事件 C 表示该生是运动员.

(1) 叙述 $AB\overline{C}$ 的意义.

(2) 在什么条件下 $ABC=C$ 成立.

5. 判断题.

(1) 若 $AB=\Phi$ 且 $C\subset A$，则 $BC=\Phi$；

(2) A 发生，B 与 C 都不发生可写为 $A\overline{BC}$.

6. 袋中有 6 个球，依次编号为 $1,2,\cdots,6$，从中任取一球，观察其号码，

(1) 试用集合表示事件 $A=\{$摸出球的号码为奇数$\}$；

(2) 连续摸球两次，设 $B=\{$两球号码都是奇数$\}$，求$\overline{B}$.

第二节　随机事件的概率及其性质

研究随机现象，不仅要关心试验中会出现哪些事件，更重要的是要知道事件出现的可能性大小，也就是事件的概率. 那么了解事件发生的可能性即概率的大小，对人们的生活有什么意义呢?比如：了解发生意外人身事故的可能性大小有助于确定保险金额；了解来商场购物的顾客人数的各种可能性大小有助于合理配置服务人员；要在某条河流上建造一座防洪水坝，为了确定堤坝高度，就要了解该条河流在建造水坝的地段每年最大洪水达到某高度的可能性大小.

什么是随机事件的概率?如何来求得某事件的概率?接下来我们具体讨论这些问题.