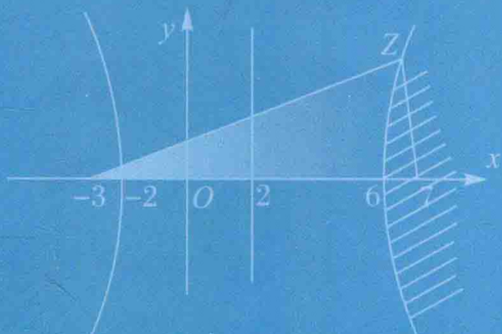
中学数学解题前沿方法荟要

解不等式及证明不等式的方法

JIE BUDENGSHI JI ZHENGMING BUDENGSHI DE FANGFA

谷学勤 编著



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
安徽大学出版社

中学数学解题前沿方法荟萃

解不等式及证明不等式的方法

谷学勤 编著

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
安徽大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

解不等式及证明不等式的方法/谷学勤编著. —合肥:安徽大学出版社,2016.12

(中学数学解题前沿方法荟要)

ISBN 978-7-5664-1263-8

Ⅰ. ①解… Ⅱ. ①谷… Ⅲ. ①不等式—中学—题解 Ⅳ. ①G634.625

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 307376 号

解不等式及证明不等式的方法

谷学勤 编著

出版发行:北京师范大学出版集团
安 徽 大 学 出 版 社
(安徽省合肥市肥西路 3 号 邮编 230039)
www.bnupg.com.cn
www.ahupress.com.cn

印　　刷:合肥现代印务有限公司
经　　销:全国新华书店
开　　本:148mm×210mm
印　　张:9
字　　数:259 千字
版　　次:2016 年 12 月第 1 版
印　　次:2016 年 12 月第 1 次印刷
定　　价:18.00 元
ISBN 978-7-5664-1263-8

策划编辑:殷文卓　　装帧设计:李　军
责任编辑:殷文卓　　美术编辑:李　军
责任印制:赵明炎

前　言

解答数学问题，不仅可以温习巩固数学知识，而且可以提高逻辑思维水平，形成解题的技巧与能力.

学习数学的主要目的在于应用. 而在应用的时候，总是要把各式各样的实际问题转化为数学问题，再一个一个加以解决. 将实际问题抽象为数学问题，又进而解决这些数学问题，是一种能力，而构筑这种能力的因素有数学知识、解题思想、解题方法和技巧等.

本书将以通俗的语言、简洁流畅的叙述，针对初等数学中各类解不等式及证明不等式的问题，分别归类介绍各自的解题方法与技巧，并予以适当的点评例说，以便触类旁通. 这种分类介绍的解题方法，我们将其称为解题的“个类方法”.

“个类方法”当然需要“宏观数学方法”（如唯物辩证法等）的指导，且离不开与一般逻辑方法（如分类比较、归纳演绎、分析综合、一般特殊、抽象具体、论证猜想等）的互相关联和依赖，也离不开和现代化方法（如模型化、公理化、系统化、结构化、控制方法、信息方法等）的互相渗透和贯通. 为此，本书特意将一般逻辑方法与某些现代方法作了引用、阐述和例示. 然而针对各色题型，一般逻辑方法与现代方法并不能千篇一律地套用，这就需要我们深入开展对解题的个性化方法，即“个类方法”的研究. 本书正志于此，并对它作了较系统的探索. 虽不能说尽善尽美，但毕竟算是一种有益的尝试.

解题的“通用方法”与“个类方法”互相依存，各有千秋. “个类方法”具有鲜明的个性特征，是解题中的最直接的方法. 读者在解决各类问题时，可从所列举的方法中，酌情选用. 由于它直接应用于解题实际，因而避免了方法与应用的脱节. 它把解题实际操作具体、明朗

化了，可操作性强，这就大大有利于教师和学生对解题门路的梳理和掌握，对开拓解题思路、灵活选择解法十分有益.

本书专门介绍了解不等式及证明不等式的方法，可供具有相当程度的读者作为学习此内容的指导用书.执此一书，可减少许多解题不得其法的烦恼，少走一些弯路.

谷学勤

2015 年 10 月 1 日

目　录

第一章　解不等式(组)

用不等号连接两个实数域上的解析式，就叫作不等式．若用 f 和 g 来表示这两个解析式，不等式的表现形式为：$f \vee g$．其中“$\vee$”为析取符号，意即在“$>$”“$<$”“$\geqslant$”“$\leqslant$”中取其一个．f 和 g 可以是代数式，也可以是超越式．

取不等式中 f 和 g 一组自变量的数值，使得不等式成立的，这一组数值就叫作这个不等式的一个解．而不等式的所有解的集合，才能叫作这个不等式的解．寻找不等式解的过程，称之为“解不等式”．

不等式组的解，是指构成不等式组的每一个不等式解的公共部分，即它们的交集．寻求不等式组解的过程，叫作解不等式组．

不等式有以下一些基本性质：

①反身性：$a>b \Leftrightarrow b<a$．

②传递性：$a>b, b>c \Rightarrow a>c$．

③加、乘单调性：

$a>b \Rightarrow a+c>b+c$

$c>0, a>b \Rightarrow ac>bc$；

$c<0, a>b \Rightarrow ac<bc$．

④同向可加性：

$a>b, c>d \Rightarrow a+c>b+d$．

⑤异向可减性：

$a>b, c<d \Rightarrow a-c>b-d$

⑥相乘、相除法则：

$a>b, c>d, b>0, d>0 \Rightarrow ac>bd$；

$a>b, c>d, a<0, c<0 \Rightarrow ac<bd$；

$a>b>0, n \in \mathbf{N}^* \Rightarrow a^n>b^n$；

$$a>b,c<d,b>0,c>0\Rightarrow\frac{a}{c}>\frac{b}{d};$$

$$a>b,c<d,a<0,d<0\Rightarrow\frac{a}{c}<\frac{b}{d}.$$

⑦倒数、开方法则：

$$a>b,ab>0\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b};$$

$$a>b>0\Rightarrow\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}.$$

若(1)$f\vee g\Rightarrow$(2)$h\vee q$，我们就说不等式 $h\vee q$ 是不等式 $f\vee g$ 的推演式，(2)的解集是(1)的解集的子集.

若(1)$f\vee g\Leftrightarrow$(2)$h\vee q$，它们互为推演式，我们就说不等式 $f\vee g$ 与不等式 $h\vee q$ 是同解的（也称为等价的），(1)与(2)的解集是相等的.

§1.1 等价法（同解法）

假如存在两个不等式（组）A 和 B，它们的解是相同的，欲求解 A，我们可以用较易于求解的等价不等式（组）B 来替换，求解出 B 的解即求出了 A 的解. 这种解不等式（组）的方法，我们把它称为“等价法（同解法）”. 等价法是解不等式（组）的基本方法之一.

用等价法来解不等式的依据是若干个同解定理.

这几个同解定理如下，其中 F_1,F_2,ω,Φ 均代表实数域 $\mathbf{R}$ 上的某个解析式：

定理 1 不等式 $$F_1\vee F_2 \quad ①$$

与 $$F_1+\omega\vee F_2+\omega \quad ②$$

等价（即同解），其中 ω 对不等式①的所有变量允许值组都有意义.

定理 2 不等式 $F_1>F_2$ 与 $F_2<F_1$ 等价.

定理 3 不等式 $$F_1>F_2 \quad ①$$

若 ω 对①的所有允许值组取值都是正的：$\omega>0$，

$$\omega F_1>\omega F_2, \quad ②$$

则①与②等价；

若 ω 对①的所有允许值组取值都是负的：$\omega<0$，

$$\omega F_1<\omega F_2, \tag{③}$$

则①与③等价.

定理 4 不等式

$$\frac{F}{\Phi}\vee 0 \text{ 与 } F\Phi\vee 0 \text{ 等价，其中 } \Phi\neq 0.$$

定理 5 若 $F_1>0$，$F_2>0$，则不等式

$F_1\vee F_2$ 与 $F_1^n\vee F_2^n$ 等价，其中 $n\in\mathbf{N}^*$.

定理 6 不等式

$F_1\vee F_2$ 与 $F_1^{2n+1}\vee F_2^{2n+1}$ 等价，其中 $n\in\mathbf{N}^*$.

例 1 解不等式：

$$\frac{37-2x}{3}+9<\frac{3x-8}{4}-x.$$

解 据定理 3，去分母

$$4(37-2x)+108<3(3x-8)-12x.$$

不等式两边各自去括号，再合并同类项，得

$$256-8x<-3x-24.$$

据定理 1，在不等式两边同加上$(-256+3x)$，得

$$-5x<-280.$$

据定理 3，在不等式两边同除以(-5)，得

$$x>56.$$

以上各步均为同解变换，所以原不等式的解为

$x>56$，也可以表示成 $x\in(56,+\infty)$.

例 2 解不等式：

$$2(x-1)-x>3(x-1)-2x-5.$$

解 在不等式的两边，各自去括号、合并同类项，得

$$x-2>x-8.$$

据定理 1，在不等式的两边各加上$(-x)$，得

$$-2>-8.$$

此不等式对于一切 x 所取的实数值均成立，

所以不等式的解为 $x \in \mathbf{R}$.

例 3 解不等式：$2x-2<(x-3)-(5-x)$.

解 化简、移项，得

$$-2<-8,$$

故不等式无解，即 $x \in \varnothing$.

§1.2 交集法

所谓交集法，对于解不等式组来说，需要先用等价法求出不等式组中各个不等式的解，再求出各个不等式解的公共部分，即它们的交集，这个解的交集的数值，能使得各个不等式都成立，因而它是不等式组整体的解. 对于解分式不等式、指数不等式、对数不等式、无理函数不等式来说，它们的解必须是局限在原不等式自变量允许值范围和题目约束条件取值范围以内. 因此求解这样的不等式，必须要求出不等式的解集与自变量允许值集、条件可取值集的交集，才是它们的解，唯有这样才能满足各个方面的设限要求. 交集法，也是解不等式的基本方法之一.

例 1 解不等式组：

$$\begin{cases} 3+x<4+2x, & ① \\ 5x-3<4x-1, & ② \\ 7+2x>6+3x. & ③ \end{cases}$$

解 ①的解集为

$$\{x \mid x>-1\},$$

②的解集为

$$\{x \mid x<2\},$$

③的解集为

$$\{x \mid x<1\}.$$

①，②，③各个解集的交集，构成了不等式组整体的解集：

$$\{x \mid x>-1\} \cap \{x \mid x<2\} \cap \{x \mid x<1\}=\{x \mid -1<x<1\}.$$

例 2 解不等式组:

$$\begin{cases}3x-5>2x-3, & ①\\ 4x+6<3x+7. & ②\end{cases}$$

解 ①的解集为

$$\{x\mid x>2\},$$

②的解集为

$$\{x\mid x<1\}.$$

所以不等式组解集为

$\{x\mid x>2\}\cap\{x\mid x<1\}=\varnothing$,即不等式组无解.

例 3 解不等式组:

$$\begin{cases}4x-5\leqslant x+1, & ①\\ 5x+10<3-2x, & ②\\ 2(x+2)>\dfrac{5x+6}{3}+1. & ③\end{cases}$$

解 ①的解集为

$$\{x\mid x\leqslant 2\},$$

②的解集为

$$\{x\mid x<-1\},$$

③的解集为

$$\{x\mid x>-3\}.$$

所以不等式组的解集为

$$\{x\mid x\leqslant 2\}\cap\{x\mid x<-1\}\cap\{x\mid x>-3\}=\{x\mid -3<x<-1\}.$$

例 4 解不等式:

$$\frac{3x-2}{(x-4)^2}>\frac{5x-14}{(x-4)^2}.$$

解 因分式分母不能为零,故自变量 x 的允许值集为$\{x\mid x\neq 4\}$,在 $x\neq 4$ 时,$(x-4)^2>0$.

据定理 3 得,与原来不等式等价的不等式为

$$3x-2>5x-14,$$

它的解集为

$$\{x \mid x<6\}.$$

原不等式的解集为

$$\{x \mid x \neq 4\} \cap \{x \mid x<6\},$$

即

$$x \in (-\infty, 4) \cup (4, 6).$$

例 5 解不等式：

$$\sqrt{3-x}>x-2.$$

解 在实数域内偶次根式下的被开方数只能为非负数，故而自变量 x 的允许值集合为$\{x \mid x \leqslant 3\}$.

在实数域内偶次根式下的被开方数只能是非负数，故而自变量 x 的定义域为$(-\infty, 2)$

因为不等式左边非负，

所以 $x-2 \geqslant 0$ 的解集满足原不等式.

所以 $x \geqslant 2$ 是原不等式解集的一部分.

要使原不等式保持同解变形的条件，不等式左边须为正值，右边须为非负值，因此此时自变量 x 的取值范围是：$\{x \mid 2 \leqslant x<3\}$.

在 $2 \leqslant x<3$ 时，据定理 5，将不等式两边平方，得

$$3-x>x^2-4x+4,$$

它的解集为

$$\left\{x \left\lvert\, \frac{3-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right.\right\}.$$

所以原不等式的解集为

$$\{x \mid x \leqslant 3\} \cap \{2 \leqslant x<3\} \cap\left\{x \left\lvert\, \frac{3-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right.\right\} \cap [2,+\infty).$$

所以原不等式的解为

$$x \in\left[2, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right).$$

例 6 解不等式：

$$2x-1+\sqrt{x-5}>x+2+\sqrt{x-5}.$$

解 在实数域内，偶次根式下的被开方数应为非负数，因而自变

量 x 的允许值集为$\{x|x\geqslant 5\}$.

不等式两边各自减去$\sqrt{x-5}$,得

$$2x-1>x+2,$$

此不等式的解集为

$$\{x|x>3\}.$$

所以原不等式的解为

$$\{x|x\geqslant 5\}\cap\{x|x>3\}=\{x|x\geqslant 5\}.$$

例 7　解不等式:

$$\lg(x+1)-\lg(x-1)>1.$$

解　由于对数的真数应为正数,因此自变量 x 所允许的取值范围应是$\{x|x>1\}$.

由十进对数的性质,得

$$\lg\frac{x+1}{x-1}>\lg 10,$$

所以
$$\frac{x+1}{x-1}>10,$$

此不等式的解集为

$$\left\{x\left|x<\frac{11}{9}\right.\right\}.$$

所以原不等式的解集为

$$\{x|x>1\}\cap\left\{x\left|x<\frac{11}{9}\right.\right\}=\left\{x\left|1<x<\frac{11}{9}\right.\right\}.$$

例 8　若 $n\in\mathbf{N}^*$,求解不等式:

$$4<\frac{1+2+3+\cdots+n}{n}<5.$$

解　将原不等式变形为

$$4<\frac{n(n+1)}{2}/n<5,$$

化简为

$$4<\frac{n+1}{2}<5.$$

此不等式的解集为

$$\{n|7<n<9\}.$$

而已知 $n\in\mathbf{N}^*$，

所以原不等式的解集为

$$\{n|7<n<9\}\cap\mathbf{N}^*=\{8\}.$$

§1.3 分区法

分区法概括来说就是在解某些高次不等式、绝对不等式、无理不等式时，按照一定的规则将自变量 x 的存在域划分为若干区间，然后根据函数在各个区间里的符号，找出不等式与零的关系相一致的解答. 具体地说，分区法有以下几种：

(一)因式分区法

解一元高次不等式组，一般先移项，使得不等式的右边为零，而把不等式左边的式子在实数域上进行因式分解，分解成一次或二次式的乘积；再求出各个因式自变量 x 的零点值；然后将这些值从小到大地把 x 的存在域分割成若干区间，确定不等式左边的因式积在各个区间内的符号. 挑选出来那些与“大于等于零”或“小于等于零”的不等号相一致的符号所在的区间，并求它们的并集，这就是不等式的解. 用这种方法来确定不等式解的，我们就称为“因式分区法”.

例 1 解不等式：

$$\left(x+\frac{3}{4}\right)\left(\frac{x}{2}-1\right)(1-3x)>0.$$

解 将原不等式变形为

$$\frac{1}{2}\left(x+\frac{3}{4}\right)(3x-1)(x-2)<0. \qquad (*)$$

分别求出各个因式的零点值：

令 $x+\frac{3}{4}=0, 3x-1=0, x-2=0$,

解得 $$x_1=-\frac{3}{4},x_2=\frac{1}{3},x_3=2.$$

用这三个零点值，把不等式左边函数 $f(x)$ 的存在域 $\mathbf{R}^*$（即非零实数集合）分割成四个区间：

$$\left(-\infty,-\frac{3}{4}\right),\left(-\frac{3}{4},\frac{1}{3}\right),\left(\frac{1}{3},2\right),(2,+\infty).$$

确定各个因式在各个区间取值的符号，以及不等式左端三个因式的乘积构成的函数在各个区间取值的符号：

符号 区间 函数	$\left(-\infty,-\frac{3}{4}\right)$	$\left(-\frac{3}{4},\frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{3},2\right)$	$(2,+\infty)$
$x+\frac{3}{4}$	$-$	$+$	$+$	$+$
$3x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$
三因式乘积 $f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

不等式（$*$）中 $f(x)<0$，故 x 的解集应为三因式乘积 $f(x)$ 取负号的区间的并集：

$$x\in\left(-\infty,-\frac{3}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{3},2\right).$$

例 2 解不等式：

$$\frac{3x^2-4x-23}{x^2-9}>2.$$

解 原不等式可以化为

$$\frac{x^2-4x-5}{x^2-9}>0,$$

即

$$\frac{(x-5)(x+1)}{(x-3)(x+3)}>0,$$

它等价于不等式

$$f(x)=(x+3)(x+1)(x-3)(x-5)>0.$$

分别求出 $f(x)$ 中各个因式的零点值，并按照从小到大的顺序加以排列：$-3,-1,3,5$.

用这四个零点值，把 $f(x)$ 的存在域 $\mathbf{R}^*$ 分割成五个区间，确定各个因式在各个区间的取值符号，以及 $f(x)$ 在各个区间取值的符号：

符号 区间 函数	$(-\infty,-3)$	$(-3,-1)$	$(-1,3)$	$(3,5)$	$(5,+\infty)$
$x+3$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

由于不等式 $f(x)>0$，故原不等式的解集应为 $f(x)$ 取正值的区间的并集：

所以 $x\in(-\infty,-3)\cup(-1,3)\cup(5,+\infty)$.

(二)零点分区法

解含有两个以上绝对值符号的式子的不等式时，先求出每一个绝对值式子的零点值. 剔除复数值，重复值只取一个，将它们按从小到大的次序加以排列，假如得到排列为：

$$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n.$$

用这些零点值，把实数域分割成 $n+1$ 个区间：

$$(-\infty,x_1],(x_1,x_2],(x_2,x_3],\cdots,(x_n,+\infty).$$

再确定每一个绝对值符号内的函数，在各个区间内的取值的符号，这些符号就是去掉绝对值符号后，其内的函数在此区间时前面应冠的符号.

分别讨论自变量 x 属于某区间时，除去绝对值符号，再冠以其内函数在此区间的符号，解此不等式得到的解若落在此区间内的，就是原不等式的解；若落在其区间外的，就不是原不等式的解.

例 1 解不等式：

$$|2x-1|<|x-1|.$$

解 先求各个绝对值符号内的函数的零点值：

由 $2x-1=0,x-1=0$，得