普通高等教育“十一五”国家级规划教材

几何与代数

（第二版）

周建华　陈建龙　张小向　编

科学出版社

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

几何与代数

(第二版)

周建华　陈建龙　张小向　编

科 学 出 版 社

北　京

内 容 简 介

作为普通高等教育"十一五"国家级规划教材，本书是在多年教学实践的基础上，为适应教学改革新的要求而编写的. 主要内容有行列式和线性方程组的求解、矩阵、几何空间、n 维向量、特征值与特征向量、二次型与二次曲面. 每章的最后一节均为"用 MATLAB 解题"，并附有"历史小贴士". 各章的习题分(A), (B), (C)三类. 习题(A)供学生自测之用，习题(B)可以作为课后作业，习题(C)包含应用题和实验题两种类型的习题. 这样设置习题是希望借此能拓展学生知识背景，培养应用意识，同时也能兼顾不同学习层次的学生的需要，便于选用. 与本书配套的手机应用还为读者提供了丰富的多媒体资源，内容包括有关知识的历史简介和一些难点的讲解视频以及二十个经典的实际应用案例.

本书可供高等院校非数学专业的学生使用，也可以供自学者和科技工作者参阅.

图书在版编目(CIP)数据

几何与代数/周建华，陈建龙，张小向编. —2版. —北京：科学出版社，2018.5

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

ISBN 978-7-03-056995-0

Ⅰ. ①几… Ⅱ. ①周… ②陈… ③张… Ⅲ. ①解析几何–高等学校–教材 ②线性代数–高等学校–教材 Ⅳ. ①O182 ②O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018) 第 051676 号

责任编辑：张中兴 梁 清 / 责任校对：张凤琴

责任印制：师艳茹 / 封面设计：迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

石家庄继文印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009 年 6 月第 一 版 开本：720 × 1000 1/16

2018 年 5 月第 二 版 印张：18 3/4

2018 年 5 月第十次印刷 字数：373 000

定价：39.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

如何获得本书相关资源？

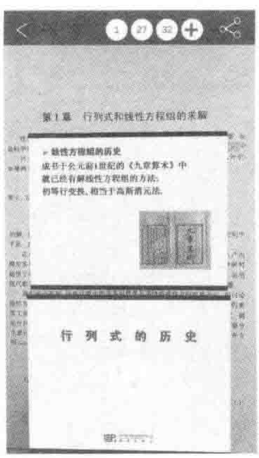
1. 使用手机扫描以下二维码，点击下载“爱一课”APP，安装即可.

下载
“爱一课”APP

2. 安装成功后，打开应用，进行用户注册，注册成功后可进入“AR 教学”界面，点击图标搜索本书书名并点击下载.

点击
“AR 教学”

3. 下载完成后进入本书资源，扫描对应资源页码即可获得与本书相关的多媒体资源，体验更多互动教学.



体验
互动教学

第二版前言

本书第一版自 2009 年出版以来，作为教材已使用多年. 使用过程中，不少读者和同行对本书提出了宝贵的修改意见. 在此，我们谨向他们表示由衷的感谢.

根据同行们的建议，结合实践中的体会，我们对书中部分内容及其呈现方式、例题和习题作了调整和修改，成为如今的第二版. 相较于其他部分，第 4 章的改动幅度较大. 为了更突出课程重点，部分内容的前后顺序作了调整；多数情况下，在讨论向量时，均采用列向量. 其他各章也作了部分改动. 同时，我们还增加了名词索引和应用案例两部分内容. 应用案例的具体内容则放在电子课件中，APP 应用中包含部分内容的历史背景、难点解析和典型问题的讲解. 凡是有 APP 应用资源相配套的内容，本书中均用 ▷ 标识，读者用手机扫一扫相关页面便可阅读、浏览.

第二版手机应用中的视频、应用案例由张小向老师编写制作，其余内容仍按第一版的编写分工由原编写者修订.

编　者

2017 年 8 月

第一版前言

经课程内容的整合, 从 1998 年起, 东南大学大部分电类专业的空间解析几何和线性代数均作为一门课开设. 本书是在多年教学实践的基础上, 为适应教学改革新的要求而编写的. 编写时, 结合教育部课程教学指导委员会制定的基本要求, 我们在以下方面作了努力.

1. 处理好课程中几何与代数的关系

将空间解析几何与线性代数合为一门课的主要理由是在课程中这两部分内容可以相互借鉴. 众所周知, 几何可以为许多代数概念提供直观原形, 代数则可以为解决几何问题提供有效手段. 许多代数概念都来源于几何, 代数中的许多结果也都具有相应的几何含义. 因此, 在同一门课内讲授这两部分内容, 对提高教学效果无疑有很大的好处. 但我们并不是只追求两者形式上的相互融合, 而更重视两者本质上共有的特性.

线性代数中的许多问题用矩阵来刻画时, 常常归结为讨论矩阵的等价关系、相似关系和合同关系. 与这些关系对应的各种变换都构成作用在矩阵集合上的变换群, 讨论这些问题实质上就是讨论矩阵在各种关系下的分类以及寻找刻画相关分类的不变量. 这一想法带有明显的几何色彩. 虽然教材不可能给出变换群的概念, 但是, 我们竭力将这一思想方法融入代数问题的讨论之中, 希望学生在潜移默化之中, 理解并接受这种思维方式.

2. 处理好数学软件的教学

利用数学软件, 尤其是利用 MATLAB 讲授线性代数是国内外相关课程改革的重要趋势. 但如何更好地发挥 MATLAB 在课程教学中的作用, 则需要我们做更多的努力.

数学实验在课程教学中主要起 "验证和演示" 的作用. 每章的最后一节都通过一些具体的例子, 介绍 MATLAB 的相关命令, 展示软件在相关计算中的运用. 学生只需 "依葫芦画瓢", 便可初步了解软件的基本功能. 我们在第 1 章介绍 Gauss 消元法并引入矩阵概念, 既考虑到了目前中学数学的课程改革, 同时也是为了在条件许可的情况下, 使 MATLAB 的应用能贯穿整个课程的始终.

将数学实验放在每章的最后一节还有一个目的, 那就是希望避免由于数学实验而使理论内容显得过于零散, 不因为数学实验而影响教材在不同教学班级的使用.

鉴于课程的性质, 在教材中没有必要, 也没有可能系统地介绍 MATLAB. 我们没有打算在课本中介绍进一步的编程方法, 只是在少量的应用题中才需要学生设法更有效地使用 MATLAB. 这些年的实践也表明, 只需给予适当的引导, 加上一定的实践机会, 学生都能顺利学会软件的初步使用. 但如果想要能更娴熟地运用 MATLAB, 则不仅需借助专业的软件教材, 而且离不开足够的上机练习.

3. 拓展知识背景, 培养应用意识

数学不仅是后继课程的基础, 也肩负培养学生的数学修养, 提高大学生理性思维能力和解决实际问题能力的任务.

每一章的开头部分均提及本章内容在数学和其他学科中的应用, 借此让学生了解教学内容与数学的其他方面的关系, 了解课程所学知识在其他应用学科的用途, 以增强学生的学习目的性, 提高学习兴趣. 每章正文之后的 "历史小贴士" 简要介绍相关概念出现的年代以及对此作出重要贡献的著名数学家, 便于学生了解理论的历史. 在每章的习题 (C) 中, 我们均安排了若干应用题, 其中一些习题的解答可以手工进行, 而另一些则建议运用 MATLAB. 这一安排的出发点是希望学生借此了解相关理论的应用, 增强应用所学知识解决实际问题的意识和能力.

4. 适应不同的教学要求

本书编写的依据是教育部课程教学指导委员会制定的课程基本要求, 少部分内容则超出该要求. 由于不同专业的教学对象、教学要求各异, 课时条件也不尽相同. 在编写教材时, 我们力求使教材具有尽可能广泛的适用性.

我们给出几乎所有定理的证明, 并不意味着课堂教学必须讲解所有定理的证明. 恰恰相反, 在学时不允许的情况下, 课本上提供定理完整的证明可以更方便学生自学, 教师授课时处置材料也可以更加灵活.

Jordan 标准形是矩阵理论的重要部分, 在特征值、特征向量部分, 教材除了讨论矩阵的相似对角化问题外, 还简要介绍了矩阵的 Jordan 标准形. 这样安排, 可以让学生更完整地了解矩阵理论, 更好地理解矩阵的相似对角化问题. 使用本书时, 对线性方程组的最小二乘解和 Jordan 标准形等超出要求的部分, 教师完全可以根据实际要求及条件的许可进行处理, 不会因为删减这些内容而影响整个课程的连贯性和完整性.

一些教学班级暂时还没有开设数学实验. 教材均将关于 MATLAB 的讲解放在每章的最后一节, 也是为了有利于教师对这部分内容的取舍. 习题 (C) 放在每章习题的最后一部分也是出于类似的考虑.

5. 照顾不同理解层次的学生

相关课程通常是面向大学一年级学生开设的. 教材尽量考虑到目前中学的数

学教学和大学低年级学生的实际水平, 在体系的设置上力求循序渐进, 概念的引入做到由具体到抽象, 材料的处理力求由浅入深, 先易后难.

例如, 目前入学的大学新生中, 有些人在中学里就学过矩阵, 有的则没有学过. 因此, 教材必须要兼顾这两部分人的实际情况. 通过线性方程组的系数矩阵和增广矩阵认识矩阵概念, 对于中学阶段没有学过矩阵的学生不会显得过于突兀, 对于学过矩阵的学生也不完全是重复. 再如, 在介绍几何空间时, 为了与中学阶段向量知识衔接, 我们参考了现行的《普通高中数学课程标准》, 尽可能照顾到各方面的学生. 此外, 为了适应部分学生更高的需求, 我们还简要介绍了空间直角坐标变换.

限于篇幅, 少部分定理没有给出完整的理论证明, 而是力图采用直观的、易于理解的方式让学生理解定理的含义, 了解证明定理的思想方法. 例如, 对向量在子空间上的投影, 我们没有给出相关定理的严格证明, 而是通过几何直观, 让学生理解定理的意义. 再如, 我们略去了 Jordan 标准形存在性的证明, 唯一性则通过对具体例子的计算, 让学生体会其证明的思路.

将习题分成三类, 习题 (A) 主要用于学生课后自测之用, 习题 (B) 可作为学生的书面作业, 习题 (C) 则由实验题和应用题组成. 习题的编排次序力求既考虑到内容的先后顺序, 又顾及习题的难易程度, 便于选用.

本书的第 1、2、4、5 章由周建华教授编写, 第 3 章由张小向老师编写, 第 6 章由陈建龙教授编写. 最后由周建华教授负责统稿.

感谢东南大学数学系的全体老师, 尤其是承担本课程教学任务的老师, 本书的成形离不开他们的支持. 感谢东南大学教务处的领导, 他们的鼓励促成了本教材的编写. 最后还要感谢科学出版社对本书的支持.

尽管作了不少努力, 但编者的水平和经验有限, 书中难免会有许多疏漏和不足, 敬请各位专家、读者批评指正.

编　者

2009 年 3 月 1 日

目　录

第 1 章　行列式和线性方程组的求解

线性方程组是线性代数理论重要的组成部分，它不仅对数学本身非常重要，也是科学研究、工程技术、社会、经济、金融以及生产实践中常用的数学工具. ▷[1]

许多数学问题都可以通过解线性方程组得到解决. 例如，在平面解析几何中，如果两条直线的方程分别是

$$a_1x + b_1y = c_1\,,\quad a_2x + b_2y = c_2,$$

那么，它们的交点的坐标就是线性方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

的解. 因此，求它们的交点只需要求这个线性方程组的解. 同样地，要了解空间中平面、直线的交点的情况，实际上也只需求解相应的线性方程组.

在许多应用场合，线性方程组常常发挥着重要作用. 例如，Leontief 的投入产出模型实质上就是用线性方程组表达的经济学模型. 这一模型的建立为经济学研究提供了强有力的手段，Leontief 因此获得了 1973 年的 Nobel 经济学奖. 事实上，运用现代数学理论，许多复杂的实际问题最终都可以转化成求解线性方程组的问题.

我们将会看到，线性代数中的许多问题都是围绕着线性方程组展开的，但讨论线性方程组离不开行列式，而且，行列式还是线性代数和解析几何中许多论题的重要工具. 因此，我们将这一章大体分成两个部分：第一部分着重讨论行列式，提出行列式的概念，讨论行列式的性质，介绍计算行列式的一些典型方法；第二部分主要讨论求线性方程组解的方法. 我们将介绍 Cramer 法则和 Gauss 消元法，并介绍 Gauss 消元法的矩阵表示形式，即矩阵的初等行变换.

1.1　二阶、三阶行列式

行列式概念来源于求解线性方程组. ▷[2] 对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2, \end{cases} \tag{1.1.1}$$

① ▷ 视频：线性方程组的历史简介.

② ▷ 视频：行列式的历史简介.

利用消元法可知, 当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时, 这个线性方程组有唯一解

$$x=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad y=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

为了便于记忆这个公式, 我们用表达式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示数 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$. 这个表达式是由 4 个数构成的两行两列的方块, 称为*二阶行列式*. 这个方块的从左上角到右下角的连线称为*主对角线*, 而从右上角到左下角的连线称为*次对角线*. 一个二阶行列式的值等于其主对角线上两个数的乘积与其次对角线上两个数的乘积之差.

利用二阶行列式, 线性方程组 (1.1.1) 的解就可以用易于记忆的方式表示如下:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{1.1.2}$$

解的表达式中, 分母都是方程组 (1.1.1) 的系数所构成的行列式, x 的分子是将系数行列式的第一列改为常数项后所得的二阶行列式, y 的分子是将系数行列式的第二列改为常数项后所得的二阶行列式.

例 1.1　利用行列式解线性方程组

$$\begin{cases} 2x+3y=4, \\ 5x+6y=7. \end{cases}$$

解　因为系数行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}=-3\neq 0,$$

可以利用行列式求解. 由公式 (1.1.2) 得

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}}=\frac{3}{-3}=-1,\quad y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}}=\frac{-6}{-3}=2,$$

故方程组的解为 $x=-1$, $y=2$. □

对于三元线性方程组的解也有类似的结果. 如果我们定义三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}, \tag{1.1.3}$$

那么, 在适当的条件下, 含三个方程的三元线性方程组的解可以用公式表达, 即当

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

时, 线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

有唯一解

$$x=\frac{D_1}{D}, \quad y=\frac{D_2}{D}, \quad z=\frac{D_3}{D},$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

三阶行列式的展开式比较复杂, 我们可以用较直观的方式记住 (1.1.3) 式:

(1) 展开式中含有六项, 其中三项前取正号, 另三项前取负号;

(2) 每一项都是三个数的乘积, 这三个数均取自行列式的不同行、不同列;

(3) 各个乘积项前的正、负号可以结合图 1.1 选取. 在图 1.1 中, 用实线连起来的三个数的乘积前取正号, 用虚线连起来的三个数的乘积前取负号.

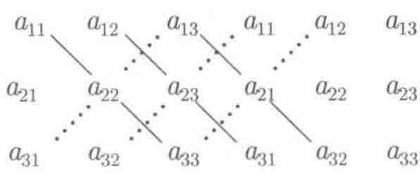


图 1.1

例 1.2 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

解 按照行列式的定义, $D=1+8+27-6-6-6=18$. □

上面确定二阶行列式和三阶行列式展开式中乘积项前正、负号的方法称为**对角线法则**. 用行列式表示线性方程组的解的公式称为 Cramer **法则**.

1.2　n 阶行列式的概念

将要定义的 n 阶行列式是二阶、三阶行列式的推广. 为了方便理解, 以三阶行列式为例, 考察其展开式的规律, 并以此作为定义 n 阶行列式的出发点.

根据 (1.1.3) 式, 三阶行列式是由排成三行三列的九个数所决定的一个表达式, 其中的每个数 a_{ij} 均有两个下标 (i 和 j), 第一个下标 i 标明的是这个数所在的行, 第二个下标 j 标明的是这个数所在的列. 行列式的值是六个乘积项的代数和, 其中的每个项是位于不同行、不同列的三个数的乘积. 事实上, 这个行列式是所有位于不同行、不同列的三个数的乘积的代数和. 因此, 三阶行列式可以表示成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum(\pm a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}),$$

其中的 i_1, i_2, i_3 是 1, 2, 3 这三个数的排列, $\sum$ 表示对所有这种排列求和. 因此, 要将三阶行列式推广到 n 阶行列式, 关键是要找到一个明确的方式, 给出排列 i_1, i_2, i_3 与相应的乘积项前的正、负号间的关系. 为此, 我们先给出 n 级排列及其逆序数的概念.

1.2.1　排列的逆序数

定义 1.1　由 n 个自然数 1, 2, $\cdots$, n 按一定次序排成一列所得的 n 元数串 i_1, i_2, $\cdots$, i_n 称为一个 *n 级排列*.

例如, 3, 5, 4, 1, 2 和 4, 2, 1, 5, 3 是两个不同的 5 级排列. 我们知道, 对于给定的正整数 n, 一共有 $n!$ 个不同的 n 级排列.

定义 1.2　在 n 级排列 i_1, i_2, $\cdots$, i_n 中, 排在第 k 个数 i_k 前面但比数 i_k 大的数的个数称为 i_k 在这个排列中的*逆序数*. 排列 i_1, i_2, $\cdots$, i_n 中各元素逆序数之和称为这个*排列的逆序数*, 记为 $\tau(i_1, i_2, \cdots, i_n)$. 逆序数为奇数的排列称为*奇排列*, 逆序数为偶数的排列称为*偶排列*.

例如, 3, 5, 2, 1, 4 是一个 5 级排列. 在这个排列中, 数 1, 2, 3, 4, 5 的逆序数分别为 3, 2, 0, 1, 0, 因此, 排列 3, 5, 2, 1, 4 的逆序数 $\tau(3,5,2,1,4) = 3 + 2 + 0 + 1 + 0 = 6$.

由于 $\tau(3,5,2,1,4) = 6$, 所以 3, 5, 2, 1, 4 是一个偶排列. 而 $\tau(3,1,5,4,2) = 5$, 所以 3, 1, 5, 4, 2 是一个奇排列.

在所有 n 级排列中, 只有排列 1, 2, $\cdots$, n 的逆序数为零. 我们称 1, 2, $\cdots$, n 为*自然排列*. 显然, 自然排列是偶排列.