



面向 21 世纪 课 程 教 材
Textbook Series for 21st Century

工科数学分析基础

第三版 上册

● 王绵森 马知恩 主编

高等教育出版社



面向 21 世纪 课程 教材
Textbook Series for 21st Century

工科数学分析基础

第三版 上册

● 王绵森 马知恩 主编



高等教育出版社·北京

内容提要

本书第一版是教育部“高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果,是面向 21 世纪课程教材和教育部工科数学学科“九五”规划教材,普通高等教育“九五”国家级重点教材,曾获教育部 2002 年全国普通高等学校优秀教材一等奖;第二版是“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材。第三版分上、下两册出版,第 1—4 章为上册,主要内容为一元函数微积分与常微分方程;第 5—7 章为下册,主要内容为多元函数微积分与无穷级数。

本书在保持第二版编写特色的基础上,根据几年来的教学实践经验,进行了较大的修订。适当降低了本书的难度,同时对部分内容进行了改写,使得本书思路更加简明,更加符合认识规律,更易于读者接受。在教材的表现形式上,采用双色印刷,并增加了边注和二维码,以满足读者的个性化学习需求。在习题的选配,仍然分为 A、B 两类,并配有综合练习题,删去了一些难题,增加了一些基本训练题,还特别增加了章后习题,在书末附有部分习题答案与提示。

本书既可作为高等理工科院校的非数学类专业本科生教材,也可供其他专业选用和社会读者阅读。

图书在版编目(CIP)数据

工科数学分析基础. 上册 / 王绵森, 马知恩主编

. -- 3 版. -- 北京: 高等教育出版社, 2017.8 (2018.6重印)

ISBN 978-7-04-048216-4

I. ①工… II. ①王… ②马… III. ①数学分析-高等学校-教材 IV. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 186351 号

策划编辑 蒋青

责任编辑 蒋青

封面设计 姜磊

版式设计 张杰

插图绘制 尹文军

责任校对 刘丽娟

责任印制 赵义民

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印 刷 大厂益利印刷有限公司
开 本 787 mm×1092 mm 1/16
印 张 24.5
字 数 450 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.hepmall.com.cn>
<http://www.hepmall.com>
<http://www.hepmall.cn>
版 次 1998 年 11 月第 1 版
2017 年 8 月第 3 版
印 次 2018 年 6 月第 2 次印刷
定 价 47.20 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物 料 号 48216-00



面向21世纪课程教材



“十二五”普通高等教育
本科国家级规划教材



普通高等教育“十五”
国家级规划教材



普通高等教育“九五”
国家级重点教材

第三版前言

本书作为教育部面向 21 世纪课程教材于 1998 年正式出版,2006 年经修改出版第二版,问世至今已近二十年。在此期间,许多专家、教师和广大读者对本书作了充分肯定,也提出了一些有益的意见和建议。为了适应当前高等院校教学的实际需求,进一步提高教材质量,高等教育出版社数学分社还组织了部分使用过本书的兄弟院校的教师进行座谈,认真听取他们的意见。编写组经过讨论,决定在基本保持本书第二版框架结构和主要特色的基础上,从教材内容和表现形式上再进行一次较大的修改。

在教材内容方面的修改之处主要有

1. 删去了一些要求过高的内容,降低了某些内容的难度。例如,删去了第八章无限维分析入门、第七章中微分方程定性分析方法初步以及第五章中挠率计算公式的证明和 Frenet 公式。

2. 对某些内容的写法进行了修改。例如,为了便于学生接受,在多元函数微分中更加突出在重点讲清二元或三元的基础上再推广到 n 元;改变将偏导数作为方向导数特例的写法,先讲偏导数再讲方向导数,并且改变了在可微条件下用计算公式来定义梯度的写法,使梯度的物理意义更加鲜明。又如,为了与多数教材中的习惯讲法相一致,将函数的凹凸性改为函数图像的凹凸性。在内容的表述方面,更加突出了微积分的基本思想方法,并将它贯穿到全书中,同时更加注重揭示数学中的一些重要思想方法,使思路更加清晰。

3. 为了满足某些后继课程的需要,将本书第二版中的常微分方程的内容与第三章中几类简单的微分方程合并为第四章放在上册,将无穷级数作为第七章放到下册。在常微分方程中重点讲解线性微分方程式,然后再讲线性微分方程组,后者作为选学内容,用异体字排印。

在教材的表现形式上,我们采用了黑、蓝双色印刷,增加了许多边注和二维码。在边注中设置了“想一想”“注意”和“注”三种栏目,这样做的目的是用简明的语言加强对重要内容的剖析,揭示思路,帮助读者加深理解。我们初次尝试在教材中添置二维码,通过对某些教学内容的小结、提高、拓展和深化,以满足读者个性化的学习要求。

在这次修改中,还增加了几个附录,将一些常用的数学公式、常见的曲线和图形罗列出来,方便读者查阅。我们还对全书中的习题和答案进行了删减和修改,改正了某些错

误,并在每章后增加了该章的习题,供学有余力的同学选做。

我们衷心感谢兄弟院校的专家、同行,读者以及我校的数学教师。多年来,他们对本书内容提出了许多宝贵的意见,这些意见对提高教材的质量起到了十分重要的作用。另外还要感谢高等教育出版社数学分社和西安交通大学教务处的关怀和资助,感谢高等教育出版社数学分社编审蒋青,她为本书的编辑加工付出了艰辛的劳动!

参加这次修订工作的有:马知恩、王绵森、武忠祥、常争鸣、李换琴和赵小艳。我们真诚地欢迎广大专家、同仁和读者对第三版继续提出批评和修改意见。

编者

2017年4月于西安交通大学

第二版前言

本书第一版于1998年出版以来,受到了有关专家和教师的广泛关注,很多兄弟院校将本书作为相关课程的教材。该书于2001年获“中国高等学校科学技术一等奖”,2002年又获“国家优秀教材一等奖”,并被列入高等教育出版社“高等教育百门精品课程教材建设计划”中的精品项目。为了进一步提高教材的质量,我们总结了几年来的教学经验,广泛听取了专家、使用过该书的教师和学生的意见,对第一版进行了认真的修改。本次修改是在保持第一版的框架结构和主要特色的基础上进行的,主要修改之处如下:

1. 精简了一些次要内容,适当降低了某些内容的难度。例如:将第一章的前两节合并为一节,删去了某些枝节问题,以加深对函数概念的理解为主线改写了映射的有关内容;删去了闭区间套定理、凸函数的一个等价命题、第一型面积分用双参数表示的一般计算公式、常微分方程中的可积组合与首次积分;在积分存在的条件下证明第一型曲线积分的计算公式;多元数量值函数微分学中的有关问题在重点讲清二元情形后再推广到多元;重写了向量值函数的导数与微分的内容,通过其分量来定义它的导数与可微性;某些内容改用异体字排版供读者选学等。

2. 根据几年来使用该书的教学实践经验,对部分内容进行了改写,使思路更加简明,更加符合认知规律,更易于为读者接受。例如:将一阶微分方程中的可分离变量和线性方程作为两种基本类型,其余类型作为可通过变量代换化为这两种基本类型的方程;删去函数列的一致收敛性,直接讲解函数项级数的一致收敛性;在讲解有重要应用的一元向量值函数的导数与微分的基础上,推广到二元和多元;对向量值函数的链式法则以及由方程组所确定的隐函数求导法也采用由特殊到一般的方法,重点放在低维情形;极坐标下二重积分化为二次积分,先用比较形象的无限累加的思想来讲解;对某些定理或公式的证明也以便于接受的需要作了改写或补充等。

3. 从应用的需要出发,添加了少量内容。例如:多元函数的等值线与等值面及其在函数的几何表示、梯度和Lagrange乘数法中的应用;线性微分方程组稳定性判定(工程中常用);增加了少许应用性例题、习题和综合练习题等。

4. 删去了一些难题,增加了一些基本训练习题。

5. 对文字叙述作了进一步加工,改正了一些错误和不确切之处。

几年来,许多专家、多次使用过本书的兄弟院校和西安交通大学的教师与学生通过

口头和书面等多种形式对第一版提供了宝贵的意见,这些意见对提高本书的质量起到了非常重要的作用。在此,我们真诚地向他们表示衷心的感谢!恳请他们对第二版继续提出批评和修改意见。

参加本次修订工作的有马知恩、王绵森、魏战线、武忠祥、常争鸣和徐文雄。

编者

2005年10月于西安交通大学

第一版前言

本书是按照原国家教委面向 21 世纪教学改革立项项目《工科数学教学内容和课程体系改革的研究与实践》的要求编写的一本改革教材,面向重点院校对数学要求较高的理工科非数学类专业。旨在传授数学知识的同时,着力于提高读者的数学素养和能力,为读者在今后工作中更新数学知识,学习现代数学方法奠定良好的基础,培养读者应用数学知识解决实际问题的意识、兴趣和能力。与现行的同类教材相比,本书力求突出以下几个特点:

1. 拓宽和加强数学基础。当代科学技术的发展对数学知识的需求越来越广、越来越深、越来越现代化。在 21 世纪攀登科技高峰的各个领域的带头人和科技骨干,应当具备更加宽厚的数学基础。这不仅要求在大学阶段学习一定的数学知识,还需要在数学的抽象性、逻辑性和严谨性方面受到必要的熏陶和训练,掌握学习数学的思想方法,以便提高自我更新知识、学习有关现代数学知识的能力。基于这种想法,本书加强了极限理论。在实数完备性的基础上,从确界定理出发,讲解并证明了极限理论中的几个基本定理;证明了闭区间上连续函数的几个重要性质;简要介绍了 \mathbf{R}^n 空间中点集拓扑的初步知识,并在此基础上讲解多元函数的极限与连续性概念。此外,还增加了一些科学技术中颇有用途的数学知识。例如,一致连续、一致收敛、含参变量积分、向量值函数的微分、微分方程组等。

2. 注意分析、代数、几何内容的有机结合,相互渗透。本书在多元函数微积分和微分方程组部分,加强了向量和矩阵的运用,充分利用向量、矩阵和线性代数中其他知识来表述分析中的有关内容。例如,用 Jacobi 矩阵来表示 \mathbf{R}^n 到 \mathbf{R}^m 的多元向量值函数的微分;利用梯度、Hesse 矩阵来表示多元函数 Taylor 公式中的有关系数;利用向量和矩阵研究微分方程组;运用向量值函数的微分来研究曲线与曲面;将第二型线面积分与向量场的研究密切结合等。这种处理方法,不但符合现代数学的发展趋势,也可以更好地满足现代科技对数学用法的要求,有利于改变在后继课程中学生不习惯于运用向量和矩阵的状况,培养学生综合运用数学知识的能力。

3. 内容安排形成三个台阶,逐步提高教学要求。全书内容可分为三大部分,形成三个台阶,希望读者通过跨越三个台阶的学习,逐步提高自身的素养和学习能力,以有利于与今后学习现代数学接轨。第一部分内容,即第一个台阶,是书中的前四章,包括一元函

数微积分与级数。这部分在讲解微积分基本概念、基本理论和基本方法的基础上,着重于数学分析基本思维方法的训练,使读者在抽象性、逻辑性和严谨性方面受到必要的熏陶。第二部分内容,即第二个台阶,是书中的第五、六、七章,包括多元函数微积分和常微分方程组。这部分将所讨论的空间由一维推广到(有限) n 维,加强了向量、矩阵在 n 维空间有关概念和理论中的应用,使一些内容的表述更趋现代化。例如,将多元函数的微分定义为从 \mathbf{R}^n 到 \mathbf{R}^m 的线性映射;将一些多元函数的积分统一为几何形体上的积分;将微分方程组写成向量形式,用矩阵的特征值理论讲解线性微分方程组的求解问题;以参数方程为主讲解曲线与曲面的有关内容。与现行的同类教材相比,这部分内容的处理适当地提高了难度,其目的是让读者从一维空间跨入多维空间后,在抽象思维和对高维问题的表达能力等方面上一个台阶。第三部分内容,即第三个台阶,是书中的第八章,介绍了无限维分析的初步知识和某些基本思想,显示了无限维分析的一些应用。旨在引导读者从有限维空间跨入无限维空间,使读者对现代数学的某些思想方法有所了解,在抽象能力上得到进一步的提高。

4. 加强数学应用能力的培养。本书在讲解数学内容的同时,力求突出在解决实际问题的有重要应用的数学思想方法,揭示重要数学概念和方法的本质。例如,在绪论中强调且贯穿全书的微积分基本思想方法;微分中的局部线性化思想;Taylor公式和无穷级数中的逼近思想;极值问题中的最优化思想;积分应用中的微元法以及贯穿全书的变换思想和方法等。本书除保存了一些几何、物理方面的例子外,增加了不少诸如在工程、生态、人口、经济、医学甚至日常生活方面的例题和习题,注意了应用问题的趣味性,以增强对读者的吸引力。此外,还配备了一些综合练习题,有的需要上机计算,使读者从建立模型,寻求方法到问题解决的全过程受到初步的训练。

5. 削减次要内容,淡化运算技巧。与现行同类教材相比,本书精简了一些次要内容。例如,以链式法则为主精练了一元函数的求导法;不定积分只介绍换元与分部两种基本积分法,删去了有理函数、三角有理函数和某些无理函数的积分法;删去了函数作图;将某些近似计算移至后续课程等。在习题配备上,分成A、B两类,A类题为基本要求,避免过多的运算技巧;B类题可供学有余力的读者选用。

6. 为学习现代数学开设内容展示的窗口和延伸发展的接口,尽量使用现代数学的语言、术语和符号。例如,介绍微分方程的相平面和稳定性、无限维分析、Frenet标架和公式等,以扩大读者视野,也为今后更新知识铺路搭桥。

学习本书下册内容需要线性代数与空间解析几何知识。建议将线性代数与空间解析几何另行单独设课,与本课程双轨并进,并在学习本书下册内容前完成。书中用楷体字排印的内容不作基本要求,对第七章第五节与第八章的内容,各校可视具体情况不讲或少讲。根据我们试点的经验,用180学时左右(含习题课)可以讲完本书的主要内容。

参加本书编写的有马知恩、王绵森、魏战线、常争鸣、武忠祥和徐文雄。全书分上、下

两册,上册由王绵森、马知恩主编,下册由马知恩、王绵森主编。在编写过程中参阅了我校从1992年到1995年在电类教改试点班使用的《高等数学讲义》。本书初稿完成后,由部分编者王绵森、魏战线、徐文雄以及西北工业大学王雪芳、孟雅琴两位副教授分别在两校的部分班级中进行了两届教学试点,对本书的修改完善起了重要作用。西安交通大学的寿纪麟教授曾参加过总体方案和部分内容的讨论,提出了宝贵意见。编者借此机会对王雪芳、孟雅琴副教授和寿纪麟教授表示衷心的感谢。我们要特别感谢主审人董加礼教授,他花费了大量的时间,对书稿进行了非常认真细致的审查,提出了许多宝贵的意见和建议。感谢参加审稿会的谢国瑞教授以及汪国强、田铮、马继钢和林益诸教授对书稿提出的宝贵意见和建议。他们的意见和建议对提高本书的质量起了十分重要的作用。感谢高等教育出版社的文小西编审、杨芝馨副编审,没有他们加倍的辛勤工作,本书不可能这样快地与读者见面。

本书得到原国家教委教学改革和重点教材建设基金的资助,还得到西安交通大学教务处的关怀和资助,借此机会我们向有关方面一并表示感谢。

面向21世纪的改革教材应该多模式、多品种,本书仅是就其中的一种模式所做的初步探索和尝试。在内容精简和现代化以及培养学生数学应用能力等方面,我们虽然也做了一些努力,但仍感差距很大。限于编者的水平,加之短期内仓促成章,不妥之处在所难免。殷切期望专家、同行和广大读者批评指正。

编者

1998年4月于西安交通大学

目 录

绪论	1
第一章 函数、极限、连续	7
第一节 集合、映射与函数	7
1.1 集合及其运算	7
1.2 实数集的完备性与确界存在定理	10
1.3 映射与函数的概念	12
1.4 线性函数的基本属性	16
1.5 复合映射与复合函数	18
1.6 逆映射与反函数	19
1.7 初等函数与双曲函数	20
习题 1.1	21
第二节 数列的极限	24
2.1 数列极限的概念	24
2.2 收敛数列的性质	29
2.3 数列收敛性的判别准则	33
习题 1.2	41
第三节 函数的极限	43
3.1 函数极限的概念	43
3.2 函数极限的性质	49
3.3 两个重要极限	53
3.4 函数极限的存在准则	56
习题 1.3	58
第四节 无穷小量与无穷大量	60
4.1 无穷小量的概念与性质	60
4.2 无穷小的比较	62

4.3 无穷小的等价代换	65
4.4 无穷大量	66
习题 1.4	68
第五节 连续函数	69
5.1 函数的连续性概念与间断点的分类	69
5.2 连续函数的运算性质与初等函数的连续性	73
5.3 闭区间上连续函数的性质	77
5.4 函数的一致连续性	81
* 5.5 一维空间 \mathbf{R} 上的压缩映射原理与迭代法	84
习题 1.5	85
第 1 章习题	87
综合练习题	89
第二章 一元函数微分学及其应用	91
第一节 导数的概念	91
1.1 导数的定义	91
1.2 导数的几何意义	96
1.3 可导与连续的关系	98
1.4 导数在科学技术中的含义——变化率	99
习题 2.1	102
第二节 求导的基本法则	104
2.1 函数和、差、积、商的求导法则	104
2.2 复合函数的求导法则	106
2.3 反函数的求导法则	108
2.4 初等函数的求导问题	110
2.5 高阶导数	111
2.6 隐函数求导法	113
2.7 由参数方程确定的函数的求导法则	115
2.8 相关变化率问题	117
习题 2.2	119
第三节 微分	123
3.1 微分的概念	124
3.2 微分的运算法则	126

3.3 高阶微分	127
3.4 微分在近似计算中的应用	127
习题 2.3	128
第四节 微分中值定理及其应用	130
4.1 函数的极值及其必要条件	130
4.2 微分中值定理	131
4.3 L'Hospital 法则	137
习题 2.4	142
第五节 Taylor 定理及其应用	144
5.1 Taylor 定理	145
5.2 几个初等函数的 Maclaurin 公式	148
5.3 Taylor 公式的应用	150
习题 2.5	153
第六节 函数性态的研究	154
6.1 函数的单调性	154
6.2 函数的极值	156
6.3 函数的最大(小)值	158
6.4 函数图像的凹凸性与拐点	161
习题 2.6	165
第 2 章习题	168
综合练习题	170
第三章 一元函数积分学及其应用	172
第一节 定积分的概念、存在条件与性质	172
1.1 定积分问题举例	172
1.2 定积分的定义	175
1.3 定积分的存在条件	178
1.4 定积分的性质	180
习题 3.1	184
第二节 微积分基本公式与基本定理	186
2.1 微积分基本公式	186
2.2 微积分基本定理	189
2.3 不定积分	192

习题 3.2	194
第三节 两种基本积分法	197
3.1 换元积分法	197
3.2 分部积分法	208
3.3 初等函数的积分问题	213
习题 3.3	213
第四节 定积分的应用	216
4.1 建立积分表达式的微元法	217
4.2 定积分在几何中的应用举例	218
4.3 定积分在物理中的应用举例	222
习题 3.4	225
第五节 反常积分	227
5.1 无穷区间上的积分	227
5.2 无界函数的积分	230
5.3 无穷区间上积分的审敛准则	233
5.4 无界函数积分的审敛准则	236
5.5 Γ 函数	238
习题 3.5	239
第 3 章习题	241
综合练习题	244
第四章 常微分方程	245
第一节 几类简单的微分方程	245
1.1 几个基本概念	246
1.2 可分离变量的一阶微分方程	249
1.3 一阶线性微分方程	250
1.4 可用变量代换法求解的一阶微分方程	253
1.5 可降阶的高阶微分方程	257
1.6 微分方程应用举例	260
习题 4.1	265
第二节 高阶线性微分方程	267
2.1 高阶线性微分方程举例	267
2.2 线性微分方程解的结构	270

2.3 高阶常系数线性齐次微分方程的解法	277
2.4 高阶常系数线性非齐次微分方程的解法	282
2.5 高阶变系数线性微分方程的求解问题	290
习题 4.2	291
* 第三节 线性微分方程组	293
3.1 线性微分方程组的基本概念	293
3.2 线性微分方程组解的结构	295
3.3 常系数线性齐次微分方程组的求解方法	302
3.4 常系数线性非齐次微分方程组的求解	312
3.5 微分方程组应用举例	313
习题 4.3	318
第 4 章习题	320
综合练习题	322
附录	323
附录 1 函数的参数表示与极坐标表示	323
附录 2 常见曲线及其方程	327
附录 3 常用的三角函数公式	334
附录 4 反三角函数定义及其图形	335
附录 5 复数及其运算	338
附录 6 简明积分表	340
部分习题答案与提示	347
参考文献	372

同学们来到大学,要学习许多新的数学课程,微积分就是其中第一门重要的数学基础课.在开始学习这门课的时候,自然要问,它与中学已经学过的初等数学有什么不同?微积分的研究对象与基本思想方法是什么?下面就来简要地讲一讲这些问题.

大家知道,现实世界中的万事万物,都在一定的空间中运动变化而在运动变化过程中都存在一定的数量关系.按照恩格斯的说法,数学就是研究现实世界中数量关系与空间形式的科学.简略地说,就是研究数和形的科学.时至今日,虽然数学的内容更加丰富、方法更加综合、应用更加广泛,但是,关于数学的上述说法大体上还是正确的.只是随着人们对事物认识的逐渐深化,作为数学研究对象的“数”和“形”,在数学发展的不同阶段,它们的内涵和表现形式也不尽相同!

数学的发展可以划分为三个阶段.

从古希腊时代(公元前5世纪—公元前3世纪)到17世纪中叶,是数学发展的第一阶段.在这长达两千多年的时期内,由于生产力的落后,人们把客观世界中各种事物看成是孤立的、静止不变的,因而数学中研究的“数”基本上是常数或常量(即在某一运动变化过程中保持不变或相对保持不变、可以看作取固定数值的量),研究的“形”也主要是简单的、不变的、规则的几何形体(例如直线段、直边形与直面形等).通过研究常量间的代数运算和规则几何形体内部及相互间的关系,分别形成了初等代数和初等几何,统称为初等数学.因此,这个阶段常被称为初等数学阶段或常量数学阶段.

从1637年著名法国哲学家、数学家 R. Descartes (1596—1650) 建立解析几何到19世纪末是数学发展的第二阶段.在这个阶段中,由于工业革命的兴起,推动了机械、造船、采矿、航海和修建铁路等新兴工业的建立和发展,大大拓宽了人们的视野,加深了人类对自然界的认识.现实世界中的各种事物都处于不停的运动变化之中,物理、力学和天文学等学科的迅速发展,要求建立新的数学工具研究物体的运动变化规律,研究曲线和曲面的性质.在这种形势下,天才的英国物理学家、力学家、天文学家和数学家 I. Newton (1642—1727) 和德国数学家和哲学家 G. W. Leibniz (1646—1716)