清華新考研

新东方考研数学名师团队匠心打造

魔研考研系列丛书

魔研考研数学之线性代数

小侯七　周洋鑫　崔原铭　主编

清華大學出版社

魔研考研系列丛书

魔研考研数学

之

线性代数

小侯七　周洋鑫　崔原铭　主编

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书以教育部最新颁布的线性代数教学大纲和教育部考试中心组织编写的考研大纲为依据，内容包括了考研数学中线性代数的全部考点和相关内容. 全书各章节均按照讲、练、考(自测)的结构编写，书中例题甄选自历年考研真题和经典题型，使学生在学习上形成一套闭环，而且本书中的“魔研君点睛”是一大特色.

本书通俗易懂、深入浅出，可作为考研数学的备考用书，也可作为大学数学学习的辅导用书，以及数学爱好者的自学教材.

图书在版编目(CIP)数据

魔研考研数学之线性代数/小侯七，周洋鑫，崔原铭主编. —北京：清华大学出版社，2018
(魔研考研系列丛书)
ISBN 978-7-302-51365-0

Ⅰ. ①魔… Ⅱ. ①小… ②周… ③崔… Ⅲ. ①线性代数—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 232184 号

责任编辑：汪 操
封面设计：常雪影
责任校对：王淑云
责任印制：丛怀宇

出版发行：清华大学出版社
网 址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地 址：北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编：100084
社 总 机：010-62770175 邮 购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市少明印务有限公司
经 销：全国新华书店
开 本：185mm×260mm **印 张**：11 **字 数**：266 千字
版 次：2018 年 10 月第 1 版 **印 次**：2018 年 10 月第 1 次印刷
定 价：36.00 元

产品编号：078804-01

魔研考研系列丛书编委会

前　言

一个出身武术世家的数学老师的数学梦

小侯七

在来到新东方做考研数学老师之前，我最为人知的身份是“侯家拳传人”．我8岁开始跟随爷爷学习祖传的侯家拳，那时学的是皮毛；十几岁的时候拜师吉林武术名家陈国诚，系统地学习了陈式太极拳和一些刀法、剑法，算是小有成绩；到大庆后，与东北众多武术名家亦师亦友，学到了包括太极拳、螳螂拳、查拳在内的很多拳种；再后来到上海，更是得到了武术泰斗“神拳大龙”蔡龙云老先生的指点，将原本无标准套路的侯家拳虎搏功整理出入门三大母拳：静山桩、虎搏缠手、川杨功．

我不仅仅是学功夫，更是热衷于传播功夫，先后成立过“中华振武会”“Tiger 武学堂”等武术组织，搞国际武术文化推广．前前后后有十几个国家的留学生和访华团体，都是带着我教给他们的中国功夫回到自己的国家的．

为什么在武术界风生水起的我，突然转行到了教育行业？其实不是转行，而是“谋条生路”．振兴武术是我一生的坚持，只要我还活着，只要有机会，我就肯定会把中国的国粹推广和发扬．但同学们，追求梦想的前提是活下去，活下去就需要有经济来源．而我振兴武术略显“愚忠”，从来不收一分钱，既不收个人的学拳费，也不收组织的劳务费，除了收过上海理工大学日本文化交流中心的200元补贴外，这辈子在武术上我没赚过其余一分钱．

侯氏家族虽不敢称名门望族，但家中一直都有代代相传的家族文化，武术在我们家族是神圣的，能和我学习侯家拳，说明我们有缘分，你我是有缘人，怎么还能收费呢？绝对不可以．可我到底该靠什么来生活？随随便便对付一份工作？那样我觉得是浪费人生．

我有三大爱好，还有三种爱吃的食物，分别是“读书、练武、做数学，牛肉、土豆、炒番茄”．读书我曾经做过“小侯七读书会”，虽然影响不大，但充满着读书人的情怀；练武自不用多说，我骨子里都流着武术人的血液，对我来说举手投足都是练武，唯一没真正去做的那就是做数学了．

我自小就喜欢数学，尤其高中时遇到了一位有魔力的班主任数学老师，更是让我对数学产生了浓厚的兴趣．如果说一定要让我找一个可以维持生计的工作，那我毫无疑问会选择做数学．最重要的是，做数学是我的三大爱好之一，与我那充满浓浓情怀的人生规划并不矛盾．

就这样，我来到了上海新东方，一不留神在终极面试中成为了全校第一名，做了考研数学老师，更是一不留神还成了考研数学项目组长、考研数学教研负责人，当了“官”了．

从我做考研数学老师那天起，我给自己定了三个规矩：踏踏实实教知识，认认真真搞教育，堂堂正正为人师．每次面对学生或者走上讲台前，我都会提醒自己，千千万万不能忘了这三个规矩．所以，在以往的教职生涯中，我敢拍着胸脯说做到了无愧于心．

在和学生的交流中，我发现很多学生的基础并不好. 有些同学可能是毕业多年，早已经将数学知识还给当年的老师了；有些同学虽在校园但前几年没有认真学数学，现在决定要考研才发现自己的数学不行. 什么原因导致的数学基础不好，我并不关心，我只关心如何能把数学教好，如何能让打算考研的同学们把数学学好.

市面上考研数学的辅导书非常多，而且大多写得都不错，但我也有自己的想法，比如能不能用通俗、直白、“接地气”的语言解释数学概念，能不能有让同学们一目了然、一点即通的“点睛”部分，等等. 带着这些想法，2017 年愚人节，我便与我的挚友清华大学出版社汪操老师沟通，他对我的想法很支持，给出了很多建议. 就这样，我开始组建团队，周洋鑫和崔原铭这两位优秀的考研数学老师走进了我的视野.

我和周洋鑫初识是在 2017 年 9 月，当时新东方教育科技集团组织教师赛课，洋鑫是数学组赛课第一名. 他的讲课风格和对数学的理解，我非常欣赏. 从那时起我们成了彼此考研数学圈最好的朋友之一. 深入了解后我得知，他是北京新东方的骨干名师、博士，对数学有着独特的认知. 我将我的图书规划讲给他听，他非常激动，说：“侯哥，这正是我想要的考研数学辅导用书.”还记得有一天，我去北京出差，他带着我逛他博士就读的母校，边走边和我说他关于数学的梦想，以及他对爱情、事业甚至人生的规划. 我静静地听着，心中却早已无法压抑那份激动，因为我觉得此人绝非等闲之辈，实乃有鸿鹄之志的“天才少年”. 就这样，我正式邀请他加入我的团队，全面参与“魔研考研数学系列”的编写工作. 事实证明，我的决定是正确的.

崔原铭是复旦高才生，曾经在上海新东方兼职，但由于各种原因并没有上台讲课，毕业后去了上汽通用汽车有限公司工作. 在我刚刚担任考研数学项目组长的时候，他就特别积极地联系我，说要重回新东方，实现自己的数学梦. 当时我由于课程任务重，管理工作繁忙，所以并没有“搭理”他. 但他特别执着，一定坚持要见我，于是我就约他来了上海新东方总部. 还记得那是 2017 年 10 月的一个下午，我俩在上海新东方总部咖啡吧第一次见面，在接下来的沟通中，我发现他竟然也是个数学天才，2017 年我接触的全国考研数学老师数以百计，新东方数学团队也有七八十人，让我“心动”的除了洋鑫，就是原铭了. 还记得在上海南京东路一家餐厅用餐时，他说：“侯哥，数学并不枯燥，是讲课人的方法太枯燥；数学可以很通俗易懂，是易懂的书太少. 就像做菜一样，材料都相同，要有一个好厨师调配.”后来，他正式加入到新东方考研数学的大家庭，其超强的能力也得到了其他同事的认可. 再后来，我又把他拉进“魔研考研数学系列”的编写团队.

我们三人的合作非常愉快，三本书我们都有参与，但根据各自的擅长，每本书每人负责若干章节. 在很多人眼里，写这种辅导用书，不就是“复制”和“粘贴”吗？但看拳和打拳真不一样，我们对每个概念都会选自己认为最恰当的描述方式，对每一道题的选取都精挑细琢、深思熟虑，并且在课堂上通过学生检验.

最让我感动的是 2018 年除夕夜，当晚 10 点左右，在安徽泾县“娘家”过年的我刚刚陪完亲戚，打算拿出电脑和一堆材料开始整理书稿的时候，突然洋鑫来电，他略带疲惫地问：“侯哥在干嘛？”

我打了个哈欠说：“酒也喝了，鞭炮也放了，饺子也包了，该写写书、做做题了.”

洋鑫一下子兴奋起来，说：“我也正打算写书稿，要不我们一起？”

因为对数学知识点的认识需要全面和准确，所以我们三人经常讨论，因此常常会保持语

音通话的状态一起写书.

我说:“不知道原铭有没有空.”

洋鑫说:“是他打电话告诉我,他要写书稿,恰好我也有此意,才给你打的电话.”

那一瞬间我感动了.两个兄弟都这么努力,我这当大哥的还能掉队吗?必须写起来!

……

我要感谢上海新东方王洛老师、新东方集团张伟老师、清华大学出版社汪操老师,还要感谢我的助理老师们,在我因工作量大而无法分身时,他们帮我梳理了部分基础性材料,花费了大量心血.最后,感谢新东方教育科技集团和清华大学出版社的大力支持,是你们让“魔研考研数学系列”有了诞生的可能.

总体来说,《魔研考研数学之高等数学》《魔研考研数学之线性代数》和《魔研考研数学之概率论与数理统计》是我和洋鑫还有原铭倾尽心血完成的三本书,但由于能力有限、时间仓促,在编写过程中难免有不足之处,请读者、同行以及专家朋友们多多提出宝贵意见,我们愿意积极改正并同步提高.

小侯七敬上.

小侯七

新浪微博:小侯七

导　学

有一次在高铁上，小侯七老师突然问我："洋鑫，线性代数从近十几年的考研真题上看，题型以及出题方式早已模式化了，那么为什么有些学生已经非常努力了但却还是分数不高呢？"我顿时陷入了深思. 直到后来我才渐渐意识到"可能是认识的原因"，也许的确是大家并没有正确复习的认识，对考点的把握没那么精准，复习没有重点，导致很多学习时间的荒废. 因此，我觉得很有必要带着大家从出题人的角度聊一下线性代数的考研那点事！

线性代数是考研数学三大分支之一，从 2006 年新考研试卷结构开始，在试卷中主要考查两个选择题（2×4 分＝8 分）、一个填空题（1×4 分＝4 分）、两个解答题（2×11 分＝22 分），在总分为 150 分的试卷中占据 34 分的重要位置. 一般地，数学一、数学二和数学三在线性代数的考题中已经趋近统一了，除了数学一在大纲要求上多出"向量空间"部分的内容以外，大致已是一样的了. 因此，这里我主要聊聊最后两个解答题的大致出题点和解题套路. 可能在一开始你不能有深层次的理解，但是当大家学完整本书后再回过头来看时，可能就会有更深层次的理解了.

这两道大题的大致埋伏点，我将其比作"两驾马车".

第一驾马车　向量、方程组两兄弟

下面给出一个一般的非齐次线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad 【形式一】$$

运用矩阵乘法，不难得到

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \text{简记为 } \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}. \qquad 【形式二】$$

其系数矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，未知量向量为 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，常数项向量为 $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

对形式一做恒等变形，则

$$x_1\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix}+\cdots+x_n\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}.$$

若记$\boldsymbol{\alpha}_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{pmatrix}$，$j=1,2,\cdots,n$，则当$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$时，原方程组就转化为

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta},$$ 【形式三】

即方程组这三种形式是彼此等价的.

对于形式三，不难发现其恰恰就是“$\boldsymbol{\beta}$能否由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表示”的问题，而且线性表示的系数恰好是非齐次线性方程组的解. 于是得出结论一：**非齐次线性方程组的求解与常数项向量能否由系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示根本上讲是同一个问题.**

若常数项向量$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}$，方程组就转化为了齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$，同理形式三也就变成 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0}$. 这个表述与我们在“线性相关、线性无关”中讨论的不谋而合. 具体点讲，“存在一组不全为零的系数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 使得 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0}$ 成立时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关”$\Leftrightarrow$“$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解”；“若 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0}$ 成立，仅有所有系数全为零，此时$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关”$\Leftrightarrow$“$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解”.

因此，得到结论二：**齐次线性方程组的求解与 $\boldsymbol{A}$ 的每个列向量间的线性相关性根本上讲是同一个问题.**

在上面的基础上，我们可以在攀爬的路上更进一步，继续讨论下一个问题. 在此，引入矩阵方程概念：

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&\cdots&x_{1m}\\x_{21}&x_{22}&\cdots&x_{2m}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_{n1}&x_{n2}&\cdots&x_{nm}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1m}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2m}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{m1}&b_{m2}&\cdots&b_{mn}\end{pmatrix},$$ 【形式一】

简记为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{B}$. 其中，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$为系数矩阵，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&\cdots&x_{1m}\\x_{21}&x_{22}&\cdots&x_{2m}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_{n1}&x_{n2}&\cdots&x_{nm}\end{pmatrix}$为未知量矩阵，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1m}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2m}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{m1}&b_{m2}&\cdots&b_{mn}\end{pmatrix}$为常数项矩阵.

若记 $\boldsymbol{x}_j=\begin{pmatrix}x_{1j}\\x_{2j}\\\vdots\\x_{nj}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_j=\begin{pmatrix}b_{1j}\\b_{2j}\\\vdots\\b_{mj}\end{pmatrix}$，$j=1,2,\cdots,m$，则矩阵方程形式一转化为

$$A(x_1\quad x_2\quad\cdots\quad x_m)=(\beta_1\quad\beta_2\quad\cdots\quad\beta_m)$$

$$\Leftrightarrow(Ax_1\quad Ax_2\quad\cdots\quad Ax_m)=(\beta_1\quad\beta_2\quad\cdots\quad\beta_m)$$

$$\Leftrightarrow Ax_j=\beta_j,\quad j=1,2,\cdots,m.$$ 【形式二】

根据结论一可知，上式表示的意义是"β_j 能否由系数矩阵 A 的列向量组线性表示"，换句话讲就是"B 的列向量组能否由系数矩阵 A 的列向量组线性表示". 处理问题时，我们需要求解 m 个同系数矩阵的非齐次线性方程组，对应的解 x_j 就是β_j 由 A 的列向量组表示的系数. 因此，不难得出结论三：**矩阵方程的求解与向量组间的线性表示在根本上讲是同一个问题**.

这里的三大结论，也就是考研线性代数的第一个大题的高频考点. 从基本出发，线性方程组的求解就变得尤为重要. 在求解中，都是对系数矩阵(或增广矩阵)进行行初等变换化为行最简矩阵然后求解，这种基本的思路方法，一定要熟练掌握、融会贯通！

第二驾马车　矩阵相似对角化和二次型

二次型的问题实际上是实对称矩阵相似对角化的一个几何应用，所以先来谈谈矩阵的相似对角化.

所谓矩阵相似对角化，即是"一个矩阵与一个对角矩阵相似". 回到定义上，则可表述为"存在一个可逆矩 P，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$(对角矩阵)".

假设已经找到可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$，我们一起再看看使得相似对角化的可逆矩阵 P 以及相似对角化结果Λ 都满足什么关系.

将 P 表示为分块列矩阵形式：$P=(\beta_1\quad\beta_2\quad\cdots\quad\beta_n)$，根据 $P^{-1}AP=\Lambda$，则

$$AP=P\Lambda\Leftrightarrow A(\beta_1\quad\beta_2\quad\cdots\quad\beta_n)=(\beta_1\quad\beta_2\quad\cdots\quad\beta_n)\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow(A\beta_1\quad A\beta_2\quad\cdots\quad A\beta_n)=(\lambda_1\beta_1\quad\lambda_2\beta_2\quad\cdots\quad\lambda_n\beta_n)$$

$$\Leftrightarrow A\beta_j=\lambda_j\beta_j,\quad j=1,2,\cdots,n.$$

不难得知，λ_j 为 A 所对应的特征值，β_j 为特征值λ_j 所对应的特征向量. 因此，A 的所有特征值构成了相似对角化的结果Λ，特征向量作为列向量构成了 P，并且 P 中列向量的排列次序与对角矩阵主对角线上的特征值排列次序要一一对应，这就是相似对角化的计算问题的核心. 正是有了这些问题，才使得特征值和特征向量这组概念变得有意义！

这些问题讨论结束后，就可以去研究二次型的问题了，这里只讲最主要的"正交变换法化标准形问题的缘由".

对于一般的二次型 $f=x^{\mathrm{T}}Ax$ 而言，其二次型对应的矩阵是实对称矩阵，而对于标准形

的二次型其所对应的矩阵是对角矩阵. 我们通过变换 $x=Qy$ 化二次型为标准形时, $f=x^{T}Ax \Rightarrow f=(Qy)^{T}A(Qy)=y^{T}(Q^{T}AQ)y$. 若要使得变换完结果是对角矩阵, 只需要完成一个问题, 即 $Q^{T}AQ=\Lambda$(对角矩阵).

前面已经讨论过对角化的问题, 但只能找到一个可逆矩阵进行相似对角化, 即 $P^{-1}AP=\Lambda$, 这是个重要问题! 切换下思路, 如果存在一个矩阵 Q, 使得 $Q^{T}=Q^{-1}$, 那不就解决了嘛! 于是, 正交矩阵走上了考研的舞台! 正交矩阵刚好能满足这样一个条件, 根据性质"实对称矩阵一定存在正交矩阵 Q, 使得 $Q^{T}AQ=Q^{-1}AQ=\Lambda$", 似乎一切的谜团即将打开!

这里我不细致去讲解, 单纯地给出"一个矩阵满足什么条件才能是正交矩阵"问题的答案, 需要满足两点:

(1) 该矩阵的列向量间彼此正交;

(2) 该矩阵的列向量均为单位向量.

原本使得相似对角化的 P 是一个可逆矩阵, 列向量间仅仅满足线性无关的性质, 所以只需要进一步对其列向量进行正交化(施密特正交化), 再单位化, 就可以将其化为正交矩阵了. 于是一切都大功告成了!

见识了这两驾马车, 大家肯定对这部分有了更新的认识, 带着这种认识再去看看本书中详细讲解的每章内容吧! 大家肯定会有"柳暗花明又一村"的感觉, 这也是考研线性代数中的核心.

最后, 我再谈谈本书的用法.

本书用法指南

全书总共分 6 章, 每章都由"考研大纲要求与重点导学""必会基本内容""考试题型与解析""自测题精选"四大部分组成.

(1) 考研大纲要求与重点导学. 本部分主要阐述大纲在各个章节的要求, 分析大纲的考点内容, 目的是让大家更加具有侧重点、方向性地进行复习备考.

(2) 必会基本内容. 本部分主要对大纲所要求的知识点进行讲解, 这是本书每个部分的基础片段. 同时, 在每个繁杂知识点下加入"魔研君点睛"的详细解读, 并且后面紧接着"小试牛刀"部分加以训练, 使得大家更好地理解与把握基本知识, 完成考研基础的第一阶段.

(3) 考试题型与解析. 本部分是本书的核心内容, 通过每章节的核心知识点, 从题型角度进行分类. 每个类型问题都会先对方法加以总结, 然后通过精挑细选的经典习题加以强化训练, 让大家可以更好地把握考研, 进入到知识理解的第二阶段.

(4) 自测题精选. 本部分旨在帮助大家学以致用, 锻炼自己独立处理问题的能力, 这个阶段是知识理解的内化与升华.

在使用本书的过程中, 依照线性代数学科学习的特点, 给大家提供三个建议:

(1) 注重基础知识和基础运算. 线性代数课程最大的特点就是: 基础知识点多, 易混淆; 基础运算繁杂, 易出错. 所以, 在复习过程中, 要多注意基本知识点的内在联系, 多进行基础运算, 处理过程切忌粗心大意.

(2) 注重知识框架体系的建立. 线性代数课程的难度在于 6 章内容的紧密联系, 比如单

从"行列式、矩阵的秩、向量组线性相关性、方程组、特征值"就可以作为一条主线进行知识联系，所以在复习过程中，要多从不同角度联系 6 章知识.

(3) 重复，再重复."温故而知新"，很多知识点是需要重复与揣摩才能理解深刻的，很多练习题也只有通过不断温故才能更加熟练.因此，重复地学习，不断地训练，将会收获更多.

启程吧，同学们，朋友们！考研的征途上，我们一路同行！

在此，感谢我的团队好友——一同夜以继日打磨书稿的小侯七老师、崔原铭老师.魔研考研数学这套书出版问世的这一天，我们三人激动之情难以言表，很多回忆都伴随着我们共同的愿景——"为考研学子更轻松、更快乐地学习数学而奋斗"变得更有使命感、仪式感.除夕夜团圆饭后彻夜写书，课程连连的疲惫后继续改稿，视频会议讨论直至深夜……，回想起，难以诉说的感动！事无巨艰，何来人杰.生活在永不遏制的奋斗中变得生生不息，你我皆是如此，奋斗吧！

所有的伟大，都源于一个勇敢的开始！请不要放弃，继续努力.

最后，再次感谢魔研团队的共同努力，同时也感谢清华大学出版社的大力支持，感谢所有为本书付出辛勤汗水、提出宝贵意见的人.鉴于编者能力有限，书中疏漏之处在所难免，若有不足之处，恳请读者和同行专家批评指正.

周洋鑫

新浪微博：考研数学周洋鑫

目　　录

第1章 行列式

考研大纲要求与重点导学

1. 本章大纲及考试要求

序号	考试内容与要求	适用科目
1	了解行列式的概念，掌握行列式的性质	数学一、二、三
2	会应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式	数学一、二、三

2. 本章概要与重点导学

在复习考研线性代数这门学科时，行列式是最先接触到的一个概念. 对于 n 阶矩阵，n 这个量就包含着巨大的信息，它可以帮助我们判断矩阵是否可逆、矩阵的行(列)向量是否线性无关. 准确理解行列式的概念和性质是第1章复习的重中之重.

在考研中，行列式的考查形式千变万化，但是归根结底需要掌握的是行列式的具体算法，即：(1)利用行列式各种性质计算数值型行列式；(2)与矩阵性质相结合，计算抽象型行列式；(3)掌握行列式展开定理，解决余子式相关问题.

必会基本内容

一、n 阶行列式基本定义

1. 排列和逆序

排列：把 n 个不同的元素排成一列，叫做这 n 个元素的(全)排列.

逆序数：对于一个排列 $p_1p_2p_3\cdots p_n$，考虑元素 p_i，如果 p_i 前面的元素中比 p_i 大的有 t_i 个，则 p_i 这个元素的逆序数是 t_i，全体元素的逆序数和 $t=t_1+t_2+\cdots+t_n$ 即是这个排列的逆序数.

奇排列和偶排列：如果一个排列的逆序数为奇数，则称这个排列为奇排列，否则为偶排列.

小试牛刀

【例 1.1】 求排列 1423 的逆序数.

解析 元素1前面没有元素，逆序数为0.

元素4前面没有比它大的元素，逆序数为0.

元素2前面有一个4比它大，逆序数为1.

元素 3 前面有一个 4 比它大，逆序数为 1.

所以，1423 的逆序数为 $0+0+1+1=2$.

2. n 阶行列式的定义式

n 阶行列式定义为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

这里 $a_{1p_1},a_{2p_2},\cdots,a_{np_n}$ 是选取的不同行不同列的 n 个元素，共 n^2 组，t 是 $p_1p_2\cdots p_n$ 这个排列的逆序数. 从而可以推出二阶和三阶行列式的公式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=(-1)^0 a_{11}a_{22}+(-1)^1 a_{12}a_{21}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}&=(-1)^0 a_{11}a_{22}a_{33}+(-1)^2 a_{12}a_{23}a_{31}+(-1)^2 a_{13}a_{21}a_{32}+\\&\quad(-1)^1 a_{11}a_{23}a_{32}+(-1)^1 a_{12}a_{21}a_{33}+(-1)^3 a_{13}a_{22}a_{31}\\&=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.\end{aligned}$$

魔研君点睛

用 n 阶行列式的定义式可以写出任意阶行列式的值，但是超过三阶之后，公式就会变得极为复杂. 因此，高阶行列式化简就显得极为关键，此时要用到行列式的完全展开式.

二、行列式的完全展开式

在 n 阶行列式中，将 a_{ij} 所在的行和列划去，剩下的 $n-1$ 阶行列式，称为 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}；记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，A_{ij} 叫做 a_{ij} 的代数余子式.

例如，对于行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$，元素 2 的余子式 $M_{12}=\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}=36-42=-6$，而它的代数余子式 $A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}=6$.

行列式的完全展开式

定理 1.1 行列式的值等于行列式任意一行(列)的元素与它对应的代数余子式的乘积之和，即

$$D_n=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in},\quad i=1,2,\cdots,n,$$

或

$$D_n=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj},\quad j=1,2,\cdots,n.$$

定理 1.2 行列式某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\quad i\neq j,$$