"十三五"应用型人才培养工程规划教材

运筹学基础教程

◎ 尤翠莲　马红艳　苏珂　主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

“十三五”应用型人才培养工程规划教材

运筹学基础教程

主　编　尤翠莲　马红艳　苏　珂
参　编　（按姓氏笔画排序）
许　春　李小川　张元元
张瑞丽　郝杨阳　侯茹月

机 械 工 业 出 版 社

本书主要包括绪论、线性规划与单纯形方法、对偶理论与灵敏度分析、整数规划、非线性规划、凸规划、动态规划、图与网络分析、网络计划技术 9 章内容. 考虑到线性规划问题与对偶问题在实际中的不同应用，本书分别用两节加以介绍. 同时，由于凸规划在最优化中具有重要作用，所以本书将凸规划单独编写一章. 本书从学生的实际水平和兴趣出发，在每章中都增加了对相应数学史的背景介绍，在每一章最后都附有案例分析，并且采用“模块式”的编写手法，便于灵活运用.

本书可作为数学与应用数学专业本科生、研究生的运筹学课程教材，也可作为经济、管理、系统工程等专业的专业课教材，还可作为从事该专业教学、科研的教师与工程技术人员的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

运筹学基础教程/尤翠莲，马红艳，苏珂主编. —北京：机械工业出版社，2017. 10

“十三五”应用型人才培养工程规划教材

ISBN 978-7-111-58227-4

Ⅰ. ①运…　Ⅱ. ①尤…　②马…③苏…　Ⅲ. ①运筹学 – 高等学校 – 教材　Ⅳ. ①O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 245550 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
策划编辑：汤　嘉　责任编辑：汤　嘉　韩效杰
责任校对：刘　岚　封面设计：张　静
责任印制：孙　炜
北京玥实印刷有限公司印刷
2018 年 1 月第 1 版第 1 次印刷
169mm × 239mm · 13. 5 印张 · 287 千字
标准书号：ISBN 978-7-111-58227-4
定价：35.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务　　网络服务
服务咨询热线：010 – 88379833　　机 工 官 网：www. cmpbook. com
读者购书热线：010 – 88379649　　机 工 官 博：weibo. com/cmp1952
教育服务网：www. cmpedu. com
金 书 网：www. golden – book. com

前　言

本书是作者多年来在为数学与应用数学、信息与计算科学等专业的本科生开设的“运筹学”课程的教学实践的基础上，根据讲义并借鉴其他优化类书籍编写而成的.

本书的特点是：

1. 着眼于激发学生兴趣，深入浅出，对涉及的运筹学各领域的背景及关键人物进行了简要介绍，按发展的时间顺序形成脉络体系，使学生对该领域内容能有整体的认识，以及更深入的理解，克服学生畏惧抽象数学的恐惧心理，充分调动他们学习的积极性和主动性，加深学习印象，巩固学习成果.

2. 为强化本科生动手能力，在每个算法后面均附有算法实现的MATLAB程序源代码，加深学生对理论知识的理解和印象，实现理论与实践的结合，并且算法步骤较为详尽.

3. 非线性规划理论部分的内容较其他教材更完整、全面，证明更详细，有深入学习需求的学生和相关科研工作者可进行选读.

4. 在章节的安排上既注重理论，又力求联系经济、管理以及工程的实际，每章最后附有相应的案例分析，从而使得运筹学的思想方法能够看得见、摸得着.

5. 在写作手法上，采用学生易于接受的形式，循序渐进，很多结论都配有几何解释，并进行图示说明，同时书中附有较多的应用实例和较完整的理论证明，并配有较丰富的习题.

本书是运筹学的通用教材，对于一般的本科生，对非线性规划部分某些抽象的理论证明理解或了解即可，不必花过多的精力，并不影响本书的阅读；对于一般读者，只需具备微积分、线性代数以及少量的概率论的知识即可. 本书可作为高年级本科生和研究生的专业教材，也可作为经济、管理、工程技术等领域相关人员的参考书.

本书共9章，全部讲授约需86学时. 使用本书进行教学时，各专业可根据自身特点和需要适当选讲，尤其是5~9章的内容相对比较独立，对于学时偏少的专业，可着重讲授其中的几章，而其余章节可作为选读材料.

本书的编写得到了河北大学及相关兄弟院校的大力支持与帮助，也得到了同仁们的关心和指导，同时参考了大量中外文文献资料，作者在此一并表示衷心的感谢.

全书由尤翠莲、苏珂完成书稿的统筹工作，马红艳负责统稿审校. 许春编写了第1、4章，任乐乐编写了第2章，郝杨阳编写了第3章，李小川编写了第5章，侯茹月编写了第6、9章，张瑞丽编写了第7章，张元元编写了第8章. 由于作者水平有限，书中难免有不足和错误之处，恳切希望得到运筹学界专家及读者的批评和指正.

目　录

第 1 章 绪论

本章介绍运筹学的大体发展状况和其所研究的内容，主要包括运筹学的由来和各种不同的定义与目的、运筹学解决问题的一般过程和一些基本的数学模型.

1.1 运筹学概况

1.1.1 运筹学名称的由来

运筹学名称取自于中国著作《史记·高祖本纪》中的经典语句“夫运筹帷幄之中，决胜千里之外”，摘取“运筹”二字作为这门学科的名称，即含有运用策划，以策略取胜等意义，较为恰当地反映了这门学科的性质和内涵. 运筹学，英国人称为 Operational Research，在美国称为 Operations Research（简写为 O. R.），可译为“运用研究”或“经营研究”.

1.1.2 运筹学的定义与目的

运筹学是一门新兴的应用科学. 由于它所研究的对象极其广泛，因此有着不同的定义. 1976 年，美国运筹学会定义运筹学是用科学方法来决定在资源不充分的情况下如何最好地设计人机系统，并使之最好地运行的一门学科，该定义着重处理实际问题；1978 年，联邦德国的科学词典上定义“运筹学是从事决策模型的数字解法的一门学科”，该定义强调数字解，注重数学方法；英国运筹学杂志认为“运筹学是运用科学方法来解决在各行业中有关人力、机器、物资、金钱等的大型系统的指挥和管理方面所出现的问题，目的是帮助管理者科学决策，谨慎行动”.

运筹学涉及的主要是管理领域的问题，研究的基本方法是数学建模，比较多地运用各种数学工具，基于这点，有人将运筹学称作“管理数学”. 运筹学在现代化管理中发挥着

日益重要的作用，它的目的是为行政管理人员和决策者在行政和决策时提供科学的依据. 因此，运筹学是实现现代化管理的有力工具. 当今，运筹学在生产管理、工程技术、军事作战、科学实验、航空航天、财政经济等领域都有广泛的应用.

1.1.3 运筹学的起源与发展

运筹学作为科学名词出现在20世纪30年代末. 当时英、美为了对付德国的空袭，将雷达作为防空系统的一部分，这在技术上是可行的，但实际运用时却并不好用. 为此一些科学家开始就如何合理运用雷达展开了一类新问题的研究. 因为它与研究技术问题不同所以就称之为“运用研究”（operational research）.

为了进行运筹学研究，在英、美的军队中成立了一些专门的小组，并开展了护航舰队保护商船队的编队问题的研究以及当船队遭受德国潜艇攻击时如何使船队损失最少的问题的研究. 通过研究反潜深水炸弹的合理爆炸深度，德国潜艇被摧毁数增加到原来的400%；在研究船只受敌机攻击如何减少损失的问题时，提出了大船应急转向和小船应缓慢转向的逃避方法. 虽然研究结果使船只在受敌机攻击时，中弹数由47%降到29%，但是当时研究和解决的问题都是短期的和战术性的.

第二次世界大战后，英、美军队中相继成立了更为正式的运筹研究组织. 并且以兰德公司（RAND）为首的一些部门开始着重研究战略性问题、未来武器系统的设计以及其可能合理运用的方法. 例如为美国空军评价各种轰炸机系统，讨论了未来的武器系统和未来战争的战略. 他们还研究了前苏联的军事能力及其未来的发展，分析前苏联政治局计划的行动原则和对将来的行动进行预测.

20世纪50年代，由于开发了各种洲际导弹，到底发展哪种导弹，运筹学界也投入了研究. 到20世纪60年代，除军事方面的应用研究以外，运筹学相继在工业、农业、经济和社会问题等领域有了广泛的应用. 与此同时，运筹学也有了飞速地发展，并形成了许多的运筹学分支. 如：数学规划（线性规划、非线性规则、整数规划、目标规划、动态规划、随机规划等）、图论与网络、排队论（随机服务系统理论）、存储论、对策论、决策论、维修更新理论、搜索论、可靠性理论和质量管理方法等.

20世纪50年代中期，钱学森、许国志等教授将运筹学由西方引入我国，并结合我国的特点将运筹学在国内推广应用. 我国在1956年曾用过“运用学”的名称，到1957年正式定名为运筹学. 运筹学在经济数学方面，特别是投入产出表的研究和应用方面开展较早，其在质量控制（后改为质量管理）上的应用也有特色. 在此期间以华罗庚教授为代表的一大批数学家加入到运筹学的研究队伍当中，使运筹学的很多分支很快跟上了当时的国际水平.

从以上简史可见，为运筹学的建立和发展做出贡献的有物理学家、经济学家、数学家、以及其他专业的学者、军官和各行业的实际工作者. 最早建立运筹学会的国家是英国（1948年），接着是美国（1952年）、法国（1956年）、日本和印度（1957年）等，截至

2005 年，国际上已有 48 个国家和地区建立了运筹学会或类似的组织. 我国的运筹学会成立于 1980 年. 在 1959 年，英、美、法三国的运筹学会发起成立了国际运筹学联合会（IFORS），以后各国的运筹学会纷纷加入，我国于 1982 年加入该会. 此外还有一些地区性组织. 如欧洲运筹学协会（EURO）成立于 1975 年；亚太运筹学协会（APORS）成立于 1985 年.

关于运筹学将往哪个方向发展，从 20 世纪 70 年代起西方运筹学工作者就有了种种观点，至今仍未说清. 这里提出运筹学界的某些观点，供研究参考. 美国前运筹学会主席邦特（S. Bonder）认为运筹学应往三个方向发展：运筹学应用、运筹科学和运筹数学. 并强调发展前两者，从整体讲应协调发展. 事实上运筹数学到 20 世纪 70 年代已形成一系列强有力的分支，数学描述相当完善，这是一件好事，正是这一点使不少运筹学界的前辈认为有些专家钻进运筹数学的深处，忘掉了运筹学的原有特色，忽略了多学科的横向交叉联系和解决实际问题的研究. 近几年来出现一种新的批评，指出有些人只迷恋于数学模型的精巧、复杂化，使用高深的数学工具，而不善于处理大量新的不易解决的实际问题. 现代运筹学工作者面临的大量新问题是经济、技术、社会、生态和政治等因素交叉在一起的复杂问题.

因此，从 20 世纪 70 年代末至 20 世纪 80 年代初不少运筹学家提出：大家要注意研究大系统，注意与系统分析相结合，美国科学院国际开发署写了一本书，其书名就把系统分析和运筹学并列. 有的运筹学家提出了“要从运筹学到系统分析”的观点，由于研究新问题的时间范围很广，因此必须与未来紧密结合，并且因为面临的问题大多涉及技术、经济、社会、心理等综合因素，所以在运筹学中除常用的数学方法以外，还引入了一些非数学的方法和理论. 曾在 20 世纪 50 年代写过《运筹学的数学方法》的美国运筹学家沙旦（T. L. Saaty）在 20 世纪 70 年代末提出了层次分析法（AHP），他认为过去过分强调精确的数学模型很难解决那些非结构性的复杂问题，往往那些看起来简单和粗糙的方法，加上决策者的正确判断，却能解决实际问题. 切克兰特（P. B. Checkland）把传统的运筹学方法称为硬系统思考，它适用于解决那种结构明确的系统以及战术和技术性问题，而对于结构不明确的，有人参与活动的系统就不太胜任了. 这时就应采用软系统思考方法，相应的一些概念和方法都应该有所变化，如将过分理想化的“最优解”换成“满意解”. 过去把求得的“解”看作精确的、不变的固定的东西，而现在要以“易变性”的观点看待所得的“解”，以适应系统的不断变化. 解决问题的过程是决策者和分析者发挥创造力的过程，这就是 20 世纪 70 年代以来人们愈来愈对人机交互算法感兴趣的原因.

在 20 世纪 80 年代一些重要的与运筹学有关的国际会议中，大多数学者认为决策支持系统是使运筹学发展的一个好机会. 进入 20 世纪 90 年代和 21 世纪初期，发生两个很重要的变化趋势：一个是软运筹学崛起，主要发源地在英国，1989 年英国运筹学学会召开了一个会议，随后由罗森汉特（J. Rosenhead）主编了一本论文集（后来被称为软运筹学的“圣经”），该论文集里提到了不少新的属于软运筹学的方法，如软系统方法论

(SSM：Checkland)、战略假设表面化与检验（SAST：Mason & Mitroff)、战略选择（SC：Friend)、问题结构法（PSM：Bryant & Rosenhead)、超对策（Hyper game：Benett)、亚对策（Meta game：Howard)、战略选择发展与分析（SODA：Eden)、生存系统模型（VSM：Beer)、对话式计划（IP：Ackoff)、批判式系统启发（CSH：Ulrich）等. 2001 年该书出版了修订版，增加了很多实例. 另一个趋势是与优化有关的软计算发展起来，这种方法不追求严格最优，具有启发式思路，并借用来自生物学、物理学和其他学科的思想来建立方法，其中最著名的有遗传算法（GA：Holland)、模拟退火（SA：Metropolis)、神经网络(NN)、模糊逻辑（FL：Zadeh)、进化计算（EC)、禁忌算法（TS)、蚁群优化（ACO：Dorigo）等. 目前国际上已有世界软计算协会，并于 2004 年召开了第 9 届国际会议，但都是在网络上开会，并且有杂志：Applied Soft Computing. 此外在一些经典的运筹学分支方面，如线性规划也出现了新的亮点，如内点法；图论中出现无标度网络（scale - free network）等.

总之运筹学还在不断发展中，新的思想、观点和方法不断地出现. 所提供的一些运筹学思想和方法都是基本的，是作为学习运筹学的读者必须掌握的知识.

1.1.4 运筹学的主要内容和工作程序

1. 运筹学的主要内容

运筹学按所解决问题性质上的差别，将实际问题归结为不同类型的数学模型. 大致包括线性规划、非线性规划、动态规划、图与网络分析、存贮论、排队论、对策论、决策论等.

(1) 线性规划（Linear Programming）

经营管理中如何有效地利用现有人力物力完成更多的任务，或在预定的任务目标下，如何耗用最少的人力物力去实现. 这类统筹规划的问题如果用数学语言表达，需要先根据问题要达到的目标选取适当的变量，问题的目标通过用变量的函数形式表示（称为目标函数)，对问题的限制条件用有关变量的等式或不等式表达（称为约束条件). 当变量连续取值，且目标函数和约束条件均为线性时，称这类模型为线性规划模型. 有关对线性规划问题建模、求解和应用的研究构成了运筹学中的线性规划这一分支. 线性规划由于建模相对简单，有通用算法和计算机软件，因此是运筹学中应用最为广泛的一个分支. 用线性规划求解的典型问题有运输问题、生产计划问题、下料问题、混合配料问题等. 虽然有些规划问题目标函数是非线性的，但往往可以采用分段线性化等手段，转化为线性规划问题求解.

(2) 非线性规划（Nonlinear Programming）

如果线性规划模型中目标函数或约束条件不全是线性的，那么对这类模型的研究构成非线性规划分支. 由于大多工程物理量的表达式是非线性的，因此非线性规划在各类工程的优化设计中有着较多的应用，是优化设计的有力工具.

(3) 动态规划(Dynamic Programming)

动态规划是研究多阶段决策过程最优化的运筹学分支. 有些经营管理活动由一系列相互关联的阶段组成，在每个阶段依次进行决策，而且上一阶段的输出状态就是下一阶段的输入状态，各阶段决策之间互相关联，因此构成一个多阶段的决策过程. 动态规划研究多阶段决策过程的总体优化，即从系统总体出发，要求各阶段决策所构成的决策序列使目标函数值达到最优.

(4) 图与网络分析(Graph Theory and Network Analysis)

生产管理中经常碰到工序之间的合理衔接搭配问题，设计中也会经常碰到研究各种管道、线路的通过能力以及仓库、附属设施的布局等问题. 运筹学中把一些研究的对象用节点表示，对象之间的联系用连线(边)表示，点、边的集合构成图. 图论是研究由节点和边所组成图形的数学理论和方法. 图是网络分析的基础，根据研究的具体网络对象(如铁路网、电力网、通信网等)，赋予图中各边某个具体的参数，如时间、流量、费用、距离等，规定图中各节点代表具体网络中任何一种流动的起点、中转点或终点，然后利用图论的方法来研究各类网络结构和流量的优化分析. 网络分析还包括利用网络图形来描述一项工程中各项作业的进度和结构关系，以便对工程进度进行优化控制.

(5) 存贮论(Inventory Theory)

存贮论是一种研究最优存贮策略的理论和方法，如为了保证企业生产的正常进行，需要有一定数量原材料和零部件的储备，以调节供需之间的不平衡. 实际问题中，需求量可以是常数，也可以是服从某一分布的随机变量；每次订货需要一定的费用，提出订货后，货物可以一次到达，也可能分批到达；从提出订货到货物的到达可能是即时的，也可能需要一个周期(订货提前期)；在某些情况下允许缺货，有些情况不允许缺货. 存贮策略研究在不同需求、不同供货方式及不同到达方式等情况下，确定在什么时间点以及一次提出多大批量的订货，使用于订购、贮存和可能发生短缺的费用的总和为最少. 存贮论的最优批量公式是在20世纪20年代初提出的.

(6) 排队论(Queueing Theory or Waiting Line)

在生产和生活中存在大量有形或无形的拥挤和排队现象. 排队系统由服务机构(服务员)及被服务的对象(顾客)组成. 一般顾客的到达及服务员用于对每名顾客的服务时间是随机的，服务员可以是一个或多个，多个情况下又分平行或串联排列. 排队按一定规则进行，如分为等待制、损失制、混合制等. 排队论研究在顾客不同输入、各类服务时间的分布不同、不同服务员数及不同排队规则情况下的排队系统的工作性能和状态. 为设计新的排队系统及改进现有系统的性能提供数理依据. 排队论的先驱者丹麦工程师爱尔朗(Er-lang) 1917年在哥本哈根电话公司研究电话通信系统时提出了排队论的一些著名公式.

(7) 对策论(Game Theory)

一类用于研究具有对抗局势的模型. 在这类模型中，参与对抗的各方称为局中人，每

个局中人均有一组策略可供选择，当各局中人分别采取不同策略时，对应一个各局中人收益或需要支付的函数. 在社会、经济、管理等与人类活动有关的系统中，各局中人都按各自的利益和知识进行对策. 每个人都力求扩大自己的利益，但又无法精确预测其他局中人的行为，他们之间还可能玩弄花招，制造假象、对策论为局中人在这种高度不确定和充满竞争的环境中，提供一套完整的、定量化和程序化的选择策略的理论和方法. 对策论已应用于对商品、消费者、生产者之间的供求平衡分析、利益集团间的协商和谈判以及军事上各种作战模型的研究等.

(8) 决策论（Decision Theory）

决策论是指为最优地达到目标，依据一定准则，对若干备选的行动方案进行的抉择. 随着科学技术的发展，生产规模和人类社会活动的扩大，要求用科学的决策替代经验决策，即实行科学的决策程序，采用科学的决策技术和具有科学的思维方法. 决策过程一般有：形成决策问题，包括提出方案，确定决策目标及决策效果的度量；确定各方案对应的结果及其出现的概率；确定决策者对不同结果的效用值；综合评价，决定方案的取舍. 决策论是对整个决策过程中涉及方案目标选取与度量、概率值确定、效用值计算，一直到最优方案和策略如何选取的科学理论.

2. 运筹学的工作流程

任何一门学科从研究范畴上都大致可分为以下四个方面：观察现象且找出进行这种观察所需要的特殊方法、理论或模型的建立；将理论与观察相结合并从结果中得到预测；将这些预测同新的观察相比较加以证实. 运筹学也不例外，围绕着模型的建立、修正与实施，对上述四个方面的研究可分为以下步骤.

运筹学在解决大量实际问题的过程中形成了自己的工作流程.

(1) 提出和形成问题. 即要弄清问题的目标，可能的约束条件，问题中的可控变量以及有关参数.

任何决策问题在进行定量分析前，先必须认真地进行定性分析. 目的一是要确定决策目标，明确主要应决策什么，选取上述决策时的有效性度量，以及在对方案比较时这些度量的权衡；二是要辨认哪些是决策中的关键因素，在选取这些关键因素时存在哪些资源或环境的限制. 分析时往往先提出一个初步的目标，通过对系统中各种因素和相互关系的研究，使这个目标进一步明确化. 此外还需要同有关人员进一步讨论，明确有关研究问题的过去与未来，问题的边界、环境以及包含这个问题在内的更大系统的有关情况，以便在对问题的表述中明确要不要把整个问题分解成若干较小的子问题. 在上述分析的基础上，可以列出表述问题的各种基本要素，包括哪些是可控的决策变量，哪些是不可控的变量，确定限制变量取值的各种工艺技术条件，以及确定优化和对方案改进的目标.

(2) 建立模型. 即把问题中可控变量、参数和目标与约束之间的关系用一定的数学模型或者数学关系式表示出来.

模型是对现实世界的事物、现象、过程或系统的简化描述或其部分属性的模仿，是对

实际问题的抽象概括和严格的逻辑表达．模型表达了问题中可控的决策变量、不可控变量、工艺技术条件及目标有效度量之间的相互关系．模型的正确建立是进行运筹学研究中的关键一步，对模型的建立是一项艺术，它是将实际问题、经验、科学方法三者有机结合的创造性的工作．建立模型的好处，一是使问题的描述高度规范化，掌握其本质规律．如在管理科学中，对人力、设备、材料、资金的利用安排都可以归纳为资源的分配利用问题，从而可以建立起一个统一的规划模型，而对规划模型的研究代替了对一个个具体问题的分析研究．二是建立模型后，可以通过输入各种数据资料，分析各种因素同系统整体目标之间的因果关系，从而确立一套逻辑的分析问题的程序方法．三是建立系统的模型为应用计算机来解决实际问题架设起桥梁．建立模型时既要尽可能包含系统的各种信息，又要抓住本质的因素．一般建模时应尽可能选择建立数学模型，即用数学语言描述的一类模型．但有时问题中的各种关系难以用数学语言表达，或问题中包含的随机因素较多时，也可以建立起一个模拟的模型，即将问题的因素、目标及模型运行时的关系用逻辑框图的形式表示出来．

（3）求解．用各种手段（主要是数学方法，也可用其他方法）将模型求解．

根据问题的需要，可分别求出最优解、次最优解或满意解；依据对解的精度的要求及算法上实现的可能性，解的精度要求可由决策者提出；解又可分为精确解和近似解等．

（4）解的检验．首先检查求解步骤和程序有无错误，然后检查解是否反映现实问题．

将实际问题的数据代入模型，找出精确的或近似的解．为了检验得到的解是否正确，常采用回溯的方法，即将历史的资料输入模型，研究得到的解与历史实际的符合程度，以判断模型是否正确．当发现有较大误差时，要将实际问题同模型重新对比，检查实际问题中的重要因素在模型中是否已经考虑到，检查模型中各公式的表达是否前后一致，当输入发生微小变化时检验输出变化的相对大小是否合适，当模型中各参数取极值时检验问题的解，还要检查模型是否容易求解，并能在规定时间内算出所需的结果等，以便发现问题进行修正．

（5）解的控制．通过控制解的变化过程决定对解是否要做一定的改变．

任何模型都有一定的适用范围，模型的解是否有效，要首先注意模型是否继续有效，并依据灵敏度分析的方法，确定最优解保持稳定时的参数变化范围．一旦外界条件参数变化超出这个范围，应及时对模型和导出的解进行修正．

（6）解的实施．将解用到实际中必须考虑到实施的问题，如向实际部门讲清解的用法，在实施中可能产生的问题和解决办法．

这是很关键但也是很困难的一步．只有提供实施方案后，研究成果才能有收获．这一步要求明确：方案由谁去实施，什么时间去实施，如何实施，要求估计实施过程可能遇到的阻力，并为此制订相应的克服困难的措施．

上述步骤往往需要交叉反复进行．因此在运筹学的研究中，除对系统进行定性分析和收集必要的资料外，一项主要工作就是努力去建立一个用以描述现实世界复杂问题的数学

模型. 这个模型是近似的，它既精确到足以反映问题的本质，又粗略到足以求出数量上的解. 本书中介绍的各类模型的例子都是经过大大简化后的，只能用于帮助对各类模型的理解. 若要较深刻地领会各类模型的建模过程，必须通过对实际问题的研究分析，才能掌握运筹学研究问题的科学方法和解决问题的思路.

1.2 基本数学模型

1.2.1 线性规划模型

如果在规划问题的数学模型中，决策变量的取值是连续的，目标函数是决策变量的线性函数，约束条件是含决策变量的线性等式或不等式，则该类规划问题的数学模型称为线性规划模型.

作为优化领域最重要的工具之一，下面用一个简单的例子介绍线性规划的数学模型.

例 1.1 某工厂生产甲、乙两种产品，生产每吨这两种产品所需要的原材料以及设备的台数以及资源总量如表 1.1 所示，生产甲、乙两种产品的利润分别为 8 万元、6 万元，问该工厂该如何安排生产甲、乙两种产品的产量，才能使获利最大?

表 1.1 两种产品所需要的原材料以及设备的台数以及资源总量

	每吨产品的消耗		资源总量
	甲	乙	
原材料	20	10	90
设备	5	3	25

解 设该厂应该生产甲产品 x_1 t，生产乙产品 x_2 t，其利润用 Z 表示，则所得到的模型如下：

$$\max z = 8x_1 + 6x_2,$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} 20x_1 + 10x_2 \leqslant 90, \\ 5x_1 + 3x_2 \leqslant 25, \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

该问题即为简单的线性规划模型，一般的数学模型及求解方法会在后续章节中给出.

1.2.2 随机规划模型

在现实生活中，人们制定决策时经常会碰到存在不确定性的现象，其中一类就是随机现象. 描述、刻画随机现象的变量称为随机变量. 含有随机变量的数学规划称为随机规划.

随机规划是处理数据带有随机性的一类数学规划，它与确定性数学规划最大的不同在于其系数中引进了随机变量，这使得随机规划比起确定性数学规划更适用于实际问题. 在

管理科学、运筹学、经济学、最优控制等领域，随机规划有着广泛的应用. 下面举出一个例子供读者了解.

例1.2 某工厂生产过程中需要 A，B 两种化学成分，现有甲、乙两种原材料可供选用. 其中原料甲中化学成分 A 的单位含量为$\frac{a}{10}$，B 的单位含量为$\frac{b}{3}$；原料乙中化学成分 A 的单位含量为$\frac{1}{10}$，B 的单位含量为$\frac{1}{3}$. 根据生产要求，化学成分 A 的总含量不得少于$\frac{7}{10}$个单位，化学成分 B 的总含量不得少于$\frac{4}{3}$个单位. 若甲、乙两种原材料的价格相同（假设为1)，问如何采购原材料，可以使得既满足生产要求，又使成本最低?

显然，这个问题可以用线性规划模型来描述. 根据题意，假设采购的原材料甲的数量为 x_1，乙的数量为 x_2，容易得到如下的线性规划模型：

$$\min x_1 + x_2,$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} ax_1 + x_2 \geqslant 7, \\ bx_1 + x_2 \geqslant 4, \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

于是，在该模型中只要知道 a，b 的值，立即可以求得最优解.

但是实际问题中，原材料甲中与化学成分 A，B 含量有关的参数 a，b 是不确定的，假设 $x = a$ 是 $1 \leqslant x \leqslant 4$ 上服从均匀分布的随机变量，$y = b$ 是$\frac{1}{3} \leqslant y \leqslant 1$ 上服从均匀分布的随机变量，则此问题就变成随机规划问题了.

1.2.3 模糊规划模型

模糊现象是人们制订决策时经常会碰到的另一类不确定性现象，而描述、刻画模糊现象的量称为模糊集，为了方便，把模糊集称为模糊参数，含有模糊参数的数学规划称为模糊规划. 有关模糊集的概念读者可以参阅相关书籍，这里以例题的形式供读者了解模糊规划.

模糊规划形式较多，这里介绍一种最简单的模糊规划，与线性规划不同的地方就是约束条件不确定. 在普通的线性规划中，若约束条件带有弹性，即右端常数 b_i ($i = 1, 2, \cdots, m$) 可能取 ($b_i - d_i$, $b_i + d_i$) 内的某一个值，这里的 $d_i > 0$，它是决策者根据实际问题选择的伸缩指标，这样的规划称为模糊线性规划.

例1.3 某企业根据市场信息及自身的生产能力，准备开发甲、乙两种系列产品，甲种系列产品最多大约能生产400套，乙种系列产品最多大约能生产250套. 据测算：甲种产品每套成本3万元，获纯利润7万元；乙种产品每套成本2万元，获纯利润3万元. 生产两种系列产品的资金总投入大约不能超过1500万元. 问如何安排生产才能使企业获利

最多?

解 设生产甲 x_1 套，生产乙 x_2 套，则可以建立模型如下：

$$\max z = 7x_1 + 3x_2,$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \tilde{\leqq} 1500, \\ x_1 \tilde{\leqq} 400, \\ x_2 \tilde{\leqq} 250, \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

其中“$\tilde{\leqq}$”表示“近似的小于或等于”，它是一个模糊概念，可以用模糊集来表示.

模糊线性规划是将约束条件和目标函数模糊化，引入相关结论，从而导出一个新的线性规划问题，新问题的最优解称为原问题的模糊最优解.

1.2.4 网络优化模型

在生产管理中经常遇到工序间的合理衔接搭配问题，设计中经常碰到研究各种管道、线路的通过能力和仓库、附属设施的布局等问题，在运筹学中把一些研究的对象用节点表示，对象之间的联系用连线（边）表示，点、边的结合构成图，如果给图中的各边赋予某些具体的权数，并指定了起点和终点，称这样的图为网络图. 图与网络分析这一分支通过对图与网络性质及优化的研究，解决设计与管理中的实际问题.

网络优化就是研究如何有效地计划、管理和控制网络系统，使之发挥最大的社会和经济效益.

网络规划中涉及各方面的问题，这里介绍几个例子作为了解，具体内容参见正文章节.

例 1.4 公路连接问题

如图 1.1 所示，某一地区有 5 座主要城市，现准备修建高速公路把这些城市连接起来，使得从其中任何一个城市都可以经高速公路直接或间接到达另一座城市. 假定已经知道了任意两座城市之间修建高速公路的成本，那么应如何决定在哪些城市间修建高速公路，使得总成本最小呢?

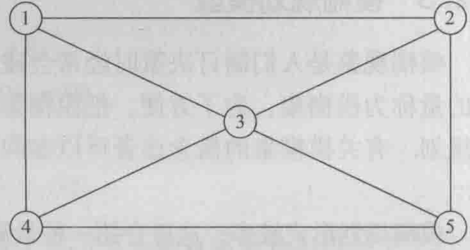

图 1.1 公路连接问题

例 1.5 最短路问题（SPP－Shortest Path Problem）

如图 1.2 所示，一名货柜车驾驶员奉命在最短的时间内将一车货物从 A 地运往 F 地. 从 A 地到 F 地的公路网纵横交错，因此有多种行车路线可以选择，这名驾驶员应选择哪条线路呢? 假设货柜车的运行速度是恒定的，那么这一问题相当于需要找到一条从 A 地到 F 地的最短路.

例 1.6 最大/最小费用流

如图 1.3 所示，从 A 地到 F 地的公路网纵横交错，每天每条路上的通车量有上限. 从 A 地到 F 地每天最多能通车多少辆?

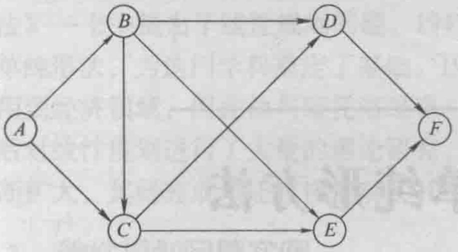

图 1.2 最短路问题

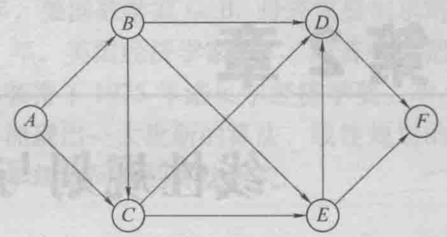

图 1.3 最大或者最小费用流

网络优化一般是建立在图与网络的基础上，结合各种方法研究最小树与最小树形图、最短路问题、最大流问题、最小费用流问题和匹配问题等.

习题1

1.1 什么是运筹学? 运筹学的主要内容包括哪些?

1.2 简述运筹学解决问题的一般步骤.

1.3 运筹学包括哪些基本的数学模型?

参考文献

[1] 薛毅，耿美英. 运筹学与实验 [M]. 北京：电子工业出版社，2008.

[2] 胡运权，郭耀煌. 运筹学教程 [M]. 北京：清华大学出版社，1998.

[3] 刘宝碇，赵瑞清. 随机规划与模糊规划 [M]. 北京：清华大学出版社，1998.