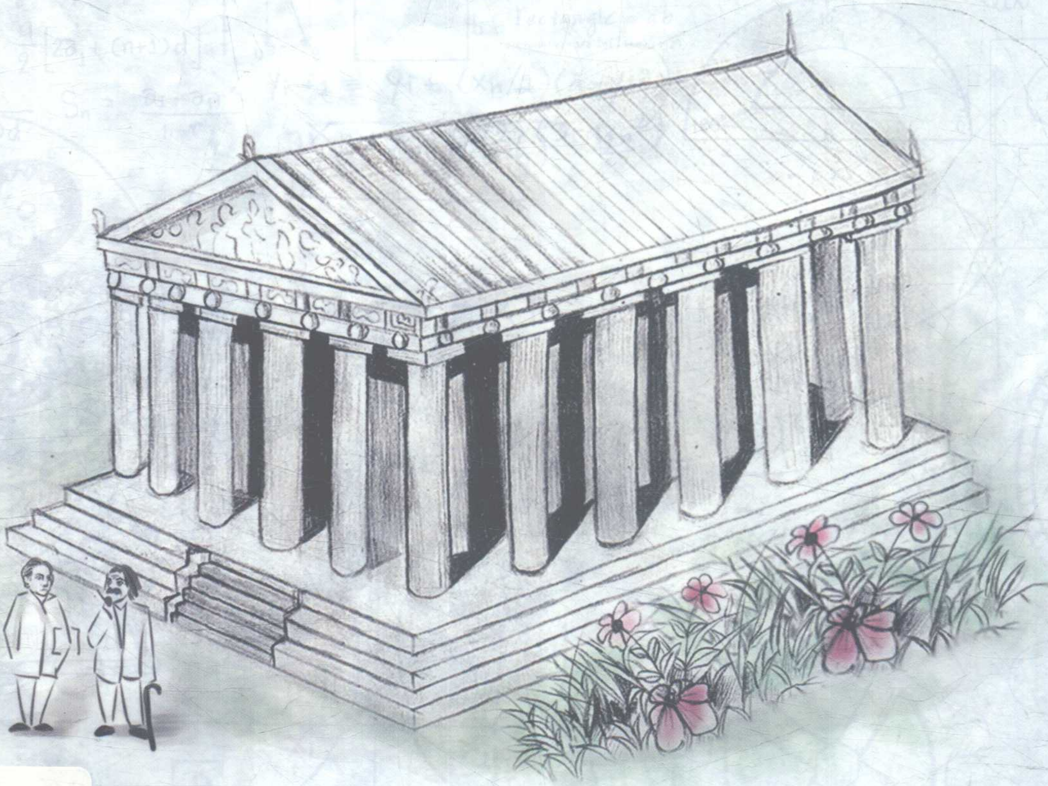
泡利的错误

科学殿堂的花和草

卢昌海◎著



清華大學出版社

泡利的错误

科学殿堂的花和草

卢昌海◎著

清華大学出版社
北京

图书在版编目（CIP）数据

泡利的错误：科学殿堂的花和草 / 卢昌海著. —北京：清华大学出版社，2018
ISBN 978-7-302-50689-8

Ⅰ. ①泡…　Ⅱ. ①卢…　Ⅲ. ①自然科学－普及读物　Ⅳ. ①N49

中国版本图书馆CIP数据核字（2018）第163116号

责任编辑：胡洪涛　王　华
封面设计：施　军
责任校对：刘玉霞
责任印制：宋　林

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　邮　　编：100084
社 总 机：010-62770175　　邮　　购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市国英印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：165mm×235mm　　印　张：12　　字　　数：180 千字
版　　次：2018 年 9 月第 1 版　　印　　次：2018 年 9 月第 1 次印刷
定　　价：45.00 元

产品编号：077316-01

谨以本书献给我的家人

自　序

这本书照说是不必有单独序言的，因为跟《小楼与大师：科学殿堂的人和事》和《因为星星在那里：科学殿堂的砖与瓦》属同一系列的文章合集，从而该像后两者那样共用序言。

可惜在这个本质上是非线性的世界里，长期预测是不容易的——比如在撰写那篇序言时，我就只预计写两本书：一本为科学史，一本为科普——并且还明确写到了文字里。

我的理科类的散篇不外乎科学史和科普，照说那样一瓜分也就一网打尽了。

然而我却低估了多年码字积存的文章数量，而且也忘了自己还在继续写……

因此只得为这本书另撰序言。

仔细说来，昔日的序言除开口闭口只谈“两本书”外，还有一处没为这本书留余地，那就是替当时预计的两本书所拟的副标题一为“科学殿堂的人和事”，一为“科学殿堂的砖与瓦”。“人和事”为“软件”，“砖与瓦”系“硬件”，软、硬件都有了，科学殿堂还缺什么？

思来想去，也就只能添些花草了，于是这本书的副标题就取为“科学殿堂的花和草”。

这副标题跟内容倒也相称，因为这本书所收录的文章中，几篇主要的都是介绍科学中的波折而非主线，从而具有花絮色彩。比如最“切题”的《泡利的错误》介绍了著名物理学家泡利所犯的错误，是已成历史的花絮；篇幅最长的《μ子反

常磁矩之谜》是“现在进行时”的波折，因为背后的几种主要可能——理论计算存在错误、实验测量存在错误或标准模型存在局限——皆属波折；其他几篇长文诸如《追寻引力的量子理论》和《宇宙学常数、超对称及膜宇宙论》由于是介绍尚无定论的前沿探索，则有很大可能会被未来判定为花絮。

当然，所有波折都是相对于主线而言的，对所有波折的介绍也都离不开作为背景的主线，因此读者在这本书里读到的也有对主线的介绍，而非仅仅是波折。另外，当然也不排除某些波折会成为未来主线的源头。

科学殿堂离不开花和草，就像真实的殿堂不能只有砖与瓦。相对于“砖与瓦”构筑的恢宏大厦，“花和草”虽象征着错误和波折，却也印证着我在《泡利的错误》一文的结语中所说的话：

> 科学一直是犯着错误，不断纠正着错误才走到今天的，永远正确绝不是科学的特征——相反，假如有什么东西标榜自己永远正确，那倒是最鲜明不过的指标，表明它绝不是科学。

这是科学给我们的最大教益，也是我在许多科学史和科普作品中试图传达的观念——然而也许都不如这本关于“花和草”的书传达得那么明确。

因此，希望读者们喜欢这本书[①]。

2017 年 12 月 24 日完稿

① 顺便说明一点，收录在本书中的文章以写作时间而论，时间跨度在 10 年以上，细心的读者也许能看出写作风格上的演变。此次收录成书前，我对文字做过修订，但对写作风格及主体内容未做改动（特别是，文章中的数据乃是写作之时的数据，这一点需请读者注意）。

目　录

第一部分

数学

1 无穷集合可以比较吗？[①]

大家都知道，自然数（即 0，1，2，3，…）有无穷多个，平方数（即 0，1，4，9，…）也有无穷多个。现在我们来考虑这样一个问题：自然数和平方数哪个更多？有读者也许会说："这还用问吗？当然是自然数多啦！"确实，平方数只是自然数的一部分，而整体大于部分，因此自然数应该比平方数更多。但细想一下，事情又不那么简单。因为每个自然数都有一个平方，每个平方数也都是某个自然数的平方，两者可以一一对应。从这个角度讲，它们又谁也不比谁更多，从而应该是一样多的，就好比两堆石头，就算不知道各有多少粒，如果能一粒一粒对应起来，我们就会说它们的数目一样多。

同一个问题，两个相互矛盾的答案，究竟哪一个答案正确呢？

像这种对无穷集合进行比较（即比较元素数目）的问题，曾经让许多科学家感到过困扰。比如著名的意大利科学家伽利略就考虑过我们上面这个问题。他的结论是：那样的比较是无法进行的。

不过，随着数学的发展，数学家们最终还是为无穷集合的比较建立起了系统性的理论，它的基石就是上面提到的一一对应的关系，即：两个无穷集合的元素之间如果存在一一对应，它们的元素数目就被定义为"相等"。按照这个定义，上面两个答案中的后一个，即自然数与平方数一样多，是正确的。

科学人

对无穷集合进行比较的系统理论是德国数学家乔治•康托尔（George Cantor）提出的。康托尔生于 1845 年，是集合论的奠基者。康托尔的理论是如此新颖，连他自己

---

① 本文是受《十万个为什么》第六版《数学》分册约稿而写的词条，但未被收录。

也曾在给朋友的信件中表示“我无法相信”。与他同时代的许多其他数学家更是对他的理论表示了强烈反对，甚至进行了尖锐攻击。

但时间最终证明了康托尔的伟大。他的集合论成为现代数学的重要组成部分。德国数学大师戴维•希尔伯特（David Hilbert）在一篇文章中表示“没有人能把我们从康托尔为我们开辟的乐园中赶走”。英国哲学家伯特兰•罗素（Bertrand Russell）也称康托尔的理论“也许是这个时代最值得夸耀的成就”。

但有读者也许会问：前一个答案所依据的“整体大于部分”在欧几里得的《几何原本》中被列为公理，不也是很可靠的吗？为什么不能作为对无穷集合进行比较的基石呢？这是因为，两个无穷集合之间通常并不存在一个是另一个的部分那样的关系。比如平方数的集合与素数（即 2，3，5，7，…）的集合就谁也不是谁的部分。如果用“整体大于部分”作为基石，就会无法比较。

不过，“整体大于部分”也并没有被抛弃，因为在无穷集合的比较中，还会出现这样的情形，那就是一个无穷集合的元素能与另一个无穷集合的一部分元素一一对应，却不能与它的全体元素一一对应。在这种情形下，数学家们就会依据“整体大于部分”的原则，将后一个无穷集合的元素数目定义为“大于”前一个无穷集合的元素数目（或前一个无穷集合的元素数目“小于”后一个无穷集合的元素数目）。这种情形的一个例子，是自然数集合与实数集合的比较。很明显，自然数集合的元素（即自然数）能与实数集合的一部分元素（即实数中的自然数）一一对应，但它能否与实数集合的全体元素（即实数）一一对应呢？答案是否定的（参阅“微博士”）。因此自然数集合的元素数目“小于”实数集合的元素数目。

微博士

我们在正文中举过一个例子，那就是自然数集合的元素数目“小于”实数集合的元素数目。现在让我们来证明这一点。我们要证明的是自然数不能与 0 和 1 之间的实数一一对应（从而当然也不能与全体实数一一对应）。

我们用反证法：假设存在那样的一一对应，那么 0 和 1 之间的实数就都能以自然数为序号罗列出来。但是，我们总可以构造出一个新实数，它小数点后的每个数字都

在 0 和 9 之间，并且第 n 位数字选成与第 n 个实数的小数点后第 n 位数字不同。显然，这样构造出来的实数与任何一个被罗列出来的实数都不同（因为小数点后至少有一个数字不同）。这与 0 和 1 之间的实数都能以自然数为序号罗列出来相矛盾。这个矛盾表明自然数是不能与 0 和 1 之间的实数一一对应的。

这个证明所用到的构造新实数的方法被称为对角线方法，它在无穷集合的比较中是一种很重要的方法。

现在我们知道了在无穷集合的元素数目之间可以定义“相等”“大于”“小于”这三种比较关系。但这还不等于回答了“无穷集合可以比较吗？”这一问题。因为我们还不知道会不会有某些无穷集合，它们之间这三种关系全都不满足。那样的情形如果出现，就说明有些无穷集合是不能比较的——起码是不能用我们上面定义的这三种关系来比较。

那样的情形会不会出现呢？这是一个很棘手的问题，涉及数学中一个很重要的分支——集合论——的微妙细节。而集合论有几个不同的“版本”，它们对这一问题的答案不尽相同。因此从某种意义上讲，这可以算是一个有争议的问题。不过，对于目前被最多数学家所使用的“版本”来说，这一问题的答案是明确的，即：那样的情形不会出现。换句话说，任何两个无穷集合都是可以比较的。

2012 年 3 月 6 日写于纽约

2 实数都是代数方程的根吗？[1]

读者们大都在学校里学过解方程，其中解得最多的就是所谓代数方程，比如 $3x-1=0$，$x^2+2x-8=0$，等等。这些方程的一个主要特点，就是每一个包含未知数的项都只包含未知数的正整数次幂。除此之外，代数方程还有一个很重要的特点，那就是项的数目是有限的。

现在，我们要回答这样一个问题：实数都是代数方程的根吗？不过，仅凭上面的定义，这个问题是简单得毫无意义的，因为所有实数 r 显然都是代数方程 $x-r=0$ 的根，因此答案是肯定的。为了让问题有一定难度，我们要对上面的定义加一个限制，那就是每一项的系数（包括常数项）都只能是有理数。加上这一限制后的代数方程确切地讲应称为“有理数域上的代数方程”，不过为简洁起见，我们仍将其称为“代数方程”[2]。

现在让我们重新来回答“实数都是代数方程的根吗？”这一问题。首先很明显的是，所有有理数 q 都是代数方程 $x-q=0$ 的根。其次，学过一元二次方程的读者都知道，虽然所有系数都被限制为有理数，代数方程的根却不一定是有理数。比如 $x^2-2=0$ 的两个根，$\sqrt{2}$ 和 $-\sqrt{2}$，就是无理数。因此，代数方程的根既可以是有理数，也可以是无理数，从而至少在表面上具备了表示所有实数的潜力。

但有潜力不等于能做到，关键得要有证明。最早对“实数都是代数方程的根吗？”这一问题作出回答并给予证明的是法国数学家约瑟夫·刘维尔，他不仅证明了某些实数不是任何代数方程的根，而且还具体构造出了那样的实数，从而以

---

① 本文收录于《十万个为什么》第六版《数学》分册（少年儿童出版社，2013 年 8 月出版），发表稿受到编辑的某些删改，标题改为了《实数都是整数系数代数方程的根吗？》。

② 需要提醒读者注意的是，不同文献对“代数方程”的定义不尽相同。在某些文献中，“代数方程”按定义就是“有理数域上的代数方程”。

最雄辩的方式给出了答案——否定的答案。

科学人

法国数学家约瑟夫·刘维尔（Joseph Liouville）是最早证明超越数存在的数学家。他于 1844 年给出了超越数存在的证明，并于 1851 年具体构造出了用十进位小数表示的超越数。刘维尔在数学及数学物理的某些其他领域也颇有成就。

刘维尔所构造的超越数抽象意义大于实用意义。更具实用意义的超越数，最早是由法国数学家查尔斯·埃尔米特（Charles Hermite）证明的。他于 1873 年证明了 e 是超越数。埃尔米特也在其他领域颇有贡献，许多数学及数学物理的术语是以他的名字命名的。

另一位在超越数研究上作出过知名贡献的是德国数学家费迪南·冯·林德曼（Ferdinand von Lindemann）。他于 1882 年证明了 π 是超越数。林德曼在数学上没有太多其他贡献，但他有几位极著名的学生，比如著名数学家戴维·希尔伯特（David Hilbert）和赫尔曼·闵科夫斯基（Hermann Minkowski），著名物理学家阿诺德·索末菲（Arnold Sommerfeld）等。

现在我们知道，有很多重要的实数，比如自然对数的底 e，圆周率 π，等等，都不是代数方程的根。为了便于表述，数学家们把能够用代数方程的根来表示的数称为代数数，把不能用代数方程的根来表示的数称为超越数。实数既包含代数数，也包含超越数。有理数与 $\sqrt{2}$ 是代数数的例子；e 和 π 则是超越数的例子。我们的问题用这一新术语可以重新表述为：实数都是代数数吗？答案则如上所述是否定的。

微博士

刘维尔对超越数存在的证明并不只是构造出少数几个特殊的超越数，而是证明了一大类实数都是超越数。为了纪念他的贡献，那一大类实数被统称为刘维尔数。可以证明，单刘维尔数这一种类型的超越数，就远比代数数多。不过，跟超越数的全体相比，刘维尔数依然只是凤毛麟角。

刘维尔数最初是用连分数来表示的。第一个用十进位小数表示的刘维尔数（也是

第一个用十进位小数表示的超越数）是 0.110001000⋯（小数点后面的数字规律是这样的：小数点后第 $n!$——n 的阶乘——位的数字为 1，其余的数字全都为零）。这个数通常被称为刘维尔常数，但有时候也被称为刘维尔数，虽然它只是无穷多个刘维尔数中的一个。

不过，答案虽然揭晓了，找到或证明一个具体的超越数却往往不是容易的事情。比如对 e 和 π（尤其是 π）是超越数的证明就费了数学家们不小的气力。而像 e+π 和 e−π 那样的简单组合是否是超越数，则直到今天也还是谜。

接下来我们还可以问一个问题，那就是代数数多还是超越数多？从构造和证明超越数如此困难来看，也许很多读者会猜测是代数数多。事实却恰恰相反。1874 年，德国数学家康托尔证明了超越数远比代数数多（这里所涉及的是无穷集合元素数目的比较，具体可参阅前文《无穷集合可以比较吗？》）。事实上，他证明了实数几乎全都是超越数！

超越数的存在不仅仅具有抽象的分类意义，而且可以解决一些具体的数学问题。比如，几何中的"尺规作图"方法所能做出的线段的长度——相对于给定的单位长度——可被证明为只能是代数数[①]。因此 π 是超越数这一看似只具有抽象分类意义的结果，直接证明了困扰数学家们多年的"尺规作图三大难题"之一的"化圆为方"是不可能办到的。

最后，我们要补充提到的是，代数方程的根既可能是实数，也可能是复数。相应地，代数数和超越数这两个概念也适用于复数，并且与实数域中的情形类似，复数也并不都是代数数（事实上，复数也几乎都是超越数）。

2012 年 3 月 19 日写于纽约

① 但反过来则不然，并不是所有长度由代数数表示的线段都能用"尺规作图"的方法做出。