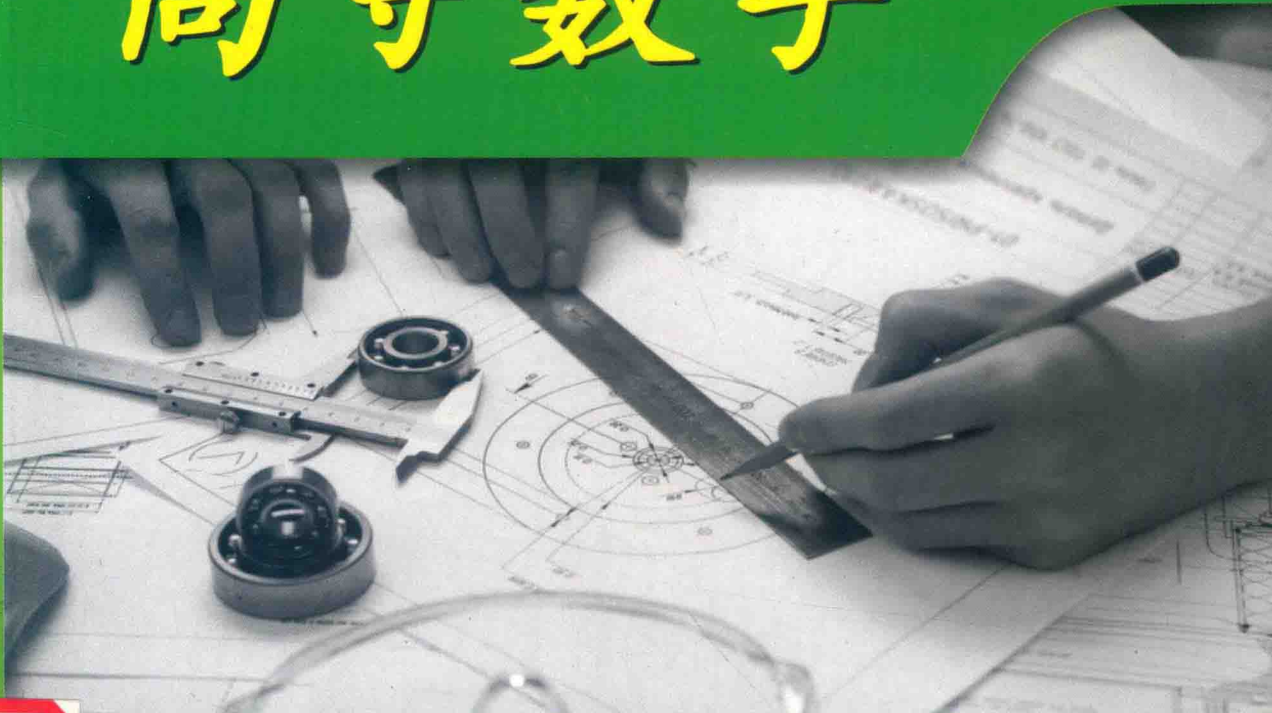
普通高等教育“十二五”规划教材

GAODENGSHUXUE

高等数学



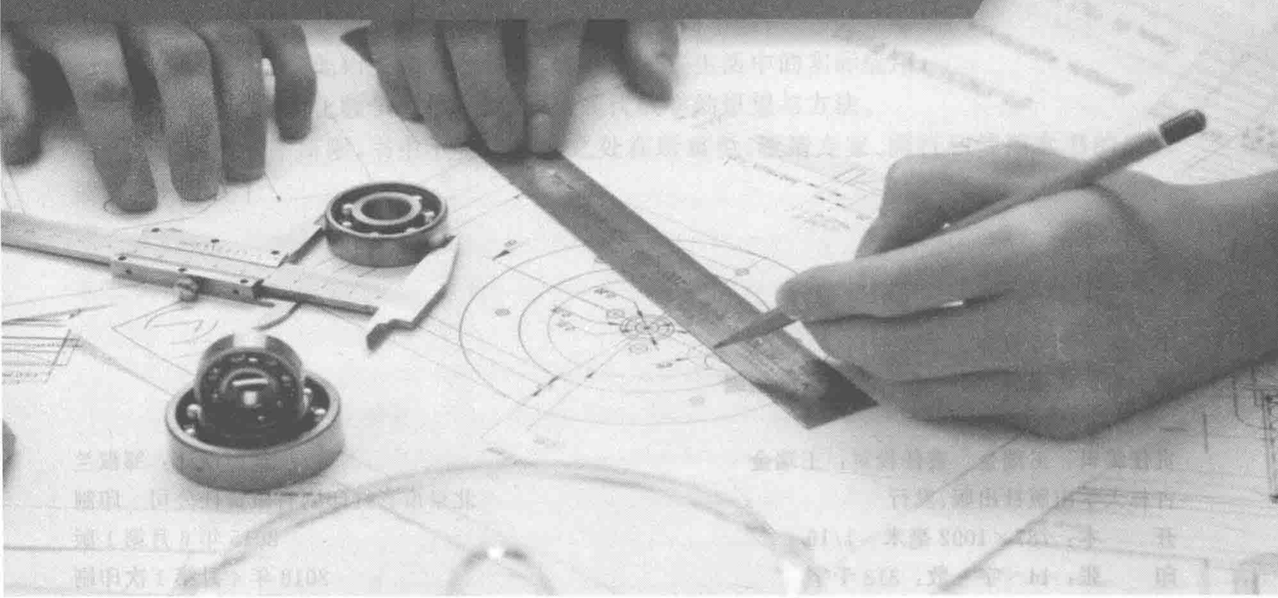
韩孺眉　李　印　吴晓云　主　编

吉林大学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

GAODENGSHUXUE

高等数学



韩孺眉　李　印　吴晓云　主　编

吉林大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 / 韩孺眉，李印，吴晓云主编. —长春：吉林大学出版社，2015.5

ISBN 978-7-5677-3779-2

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①韩… ②李… ③吴… Ⅲ. ①高等数学—高等学校 x 教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 116320 号

内容提要

本书系统地介绍了高等数学课程的基本内容，全书共分八章，内容包括：函数、极限与连续、一元函数微分学及其应用、一元函数积分学及其应用、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、无穷级数、常微分方程、行列式与矩阵等内容。

书　名：高等数学

作　者：韩孺眉　李　印　吴晓云　主编

责任编辑：王瑞金　责任校对：王瑞金

封面设计：邹淑兰

吉林大学出版社出版、发行

北京市彩虹印刷有限责任公司　印制

开　　本：787×1092 毫米　1/16

2015 年 6 月第 1 版

印　　张：14　字　数：313 千字

2018 年 4 月第 1 次印刷

书　　号：ISBN 978-7-5677-3779-2

定　价：36.00 元

社址：长春市明德路 501 号　邮编：130021

发行部电话：0431－89580028/29

网址：http://www.jlup.com.cn

E－mail:jlup@mail.jlu.edu.cn

前　言

高等数学是高等教育的一门重要基础课，该课程不仅为学生后继课程的学习提供必备的数学工具，而且是培养大学生数学素养和理性思维能力的重要途径。本教材根据教育部《关于全面提高高等教育教学质量的若干意见》和教育部新修订的《大学生教育高等数学教学基本要求》为指导，充分研究当前我国高等教育现状，坚持以“应用为目的，必须够用为度，学有所需，学有所用”的定位原则，培养高等院校学生可持续发展的职业能力和迁移能力，突出高等数学的应用性。

本书系统地介绍了高等数学课程的基本内容，全书共分八章，内容包括：函数、极限与连续、一元函数微分学及其应用、一元函数积分学及其应用、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、无穷级数、常微分方程、行列式与矩阵等内容。

与同类教材相比，本教材突出以下特点：

第一，淡化某些繁杂形式，注重核心内容，但简而不略；

第二，加强与其他相关学科的联系，增加了一些生活中的实际应用；

第三，采用现代化数学符号系统，渗透现代数学的思想与方法。

由于编者水平所限，书中不妥与错误之处在所难免，敬请专家、同行和使用本书的广大读者批评指正！

编　者

目 录

第一章 函数、极限与连续 …… (1)
第一节 函 数 …… (1)
一、函数的概念 …… (1)
二、函数的性质 …… (3)
三、初等函数 …… (4)
第二节 极限 …… (8)
一、数列的极限 …… (8)
二、函数的极限 …… (9)
三、无穷大量与无穷小量 …… (12)
四、极限的运算法则 …… (15)
五、两个重要极限 …… (17)
第三节 函数的连续性 …… (19)
一、函数的连续性 …… (19)
二、初等函数的连续性 …… (20)
三、函数的间断点 …… (21)
四、闭区间上连续函数的性质 …… (22)
复习题一 …… (22)
复习题一参考答案 …… (25)
第二章 一元函数微分学及其应用 …… (26)
第一节 导数的概念 …… (26)
一、导数的定义 …… (26)
二、导数的几何意义 …… (29)
三、函数的可导与连续的关系 …… (29)
第二节 一元函数的求导法则 …… (30)
一、导数公式及四则运算法则 …… (30)
二、反函数与复合函数的求导 …… (31)
第三节 高阶导数 …… (34)
第四节 隐函数的导数及由参数方程所确定的函数的导数 …… (36)
一、隐函数的导数 …… (36)
二、由参数方程所确定的函数的导数 …… (38)
第五节 函数的微分 …… (39)
一、微分的概念及几何意义 …… (39)
二、微分的运算法则 …… (41)
三、微分在近似计算中的应用 …… (42)

第六节　微分中值定理 ………………………………………………… (43)
一、罗尔中值定理 ………………………………………………… (43)
二、拉格朗日中值定理 …………………………………………… (45)
三、柯西中值定理 ………………………………………………… (46)
第七节　洛必达法则 ……………………………………………… (47)
一、$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式 ………………………………………… (47)
二、其他类型未定式 ……………………………………………… (49)
第八节　函数性质 ………………………………………………… (50)
一、函数的单调性 ………………………………………………… (50)
二、函数的极值 …………………………………………………… (52)
三、函数的最值 …………………………………………………… (56)
四、曲线的凹凸性与拐点 ………………………………………… (57)
五、曲线的渐近线 ………………………………………………… (60)
六、函数图象的描绘 ……………………………………………… (61)
复习题二 …………………………………………………………… (64)
复习题二参考答案 ………………………………………………… (65)
第三章　一元函数积分学及其应用 ……………………………… (66)
第一节　不定积分的概念及性质 ………………………………… (66)
一、原函数 ………………………………………………………… (66)
二、不定积分 ……………………………………………………… (67)
三、不定积分的基本公式 ………………………………………… (68)
四、不定积分的运算法则 ………………………………………… (69)
第二节　换元积分法 ……………………………………………… (70)
一、第一类换元积分法 …………………………………………… (70)
二、第二类换元积分法 …………………………………………… (73)
第三节　分部积分法 ……………………………………………… (74)
第四节　定积分及其应用 ………………………………………… (75)
一、定积分的概念与性质 ………………………………………… (75)
二、微积分基本公式 ……………………………………………… (80)
三、微积分基本定理 ……………………………………………… (80)
四、牛顿—莱布尼兹公式 ………………………………………… (81)
第五节　定积分的积分法 ………………………………………… (83)
一、定积分的换元法 ……………………………………………… (83)
二、定积分的分部积分法 ………………………………………… (86)
第六节　定积分的简单应用 ……………………………………… (86)
一、微元法 ………………………………………………………… (86)
二、定积分在几何中的应用 ……………………………………… (87)
三、定积分在物理中的应用 ……………………………………… (91)

第七节 广义积分 …………………………………………………………………………(94)
一、无穷区间上的广义积分 ………………………………………………………(94)
二、无界函数的广义积分 …………………………………………………………(95)
复习题三 ………………………………………………………………………………(97)
复习题三参考答案 …………………………………………………………………(102)
第四章 向量代数与空间解析几何 ……………………………………………(105)
第一节 空间直角坐标系 …………………………………………………………(105)
一、空间点的直角坐标 ……………………………………………………………(105)
二、空间两点的距离 ………………………………………………………………(106)
第二节 向量代数 ……………………………………………………………………(107)
一、向量的概念及线性运算 ………………………………………………………(107)
二、向量的坐标 ……………………………………………………………………(109)
第三节 向量的数量积与向量积 …………………………………………………(110)
一、两向量的数量积 ………………………………………………………………(110)
二、两向量的向量积 ………………………………………………………………(113)
第四节 平面与空间直线 …………………………………………………………(115)
一、平面 ……………………………………………………………………………(115)
二、直线 ……………………………………………………………………………(118)
第五节 一般空间曲面 ……………………………………………………………(121)
一、曲面方程的概念 ………………………………………………………………(121)
二、常见的空间曲面及其方程 ……………………………………………………(122)
第六节 一般空间曲线 ……………………………………………………………(127)
一、空间曲线的一般方程 …………………………………………………………(127)
二、空间曲线的参数方程 …………………………………………………………(127)
三、空间曲线在坐标面上的投影 …………………………………………………(128)
复习题四 ………………………………………………………………………………(129)
复习题四参考答案 ……………………………………………………………………(130)
第五章 多元函数微分学 ……………………………………………………………(132)
第一节 多元函数 ……………………………………………………………………(132)
一、多元函数的概念 ………………………………………………………………(132)
二、二元函数的极限 ………………………………………………………………(134)
三、二元函数的连续性 ……………………………………………………………(135)
第二节 偏导数 ………………………………………………………………………(135)
一、偏导数的概念 …………………………………………………………………(136)
二、偏导数的几何意义 ……………………………………………………………(137)
三、高阶偏导数 ……………………………………………………………………(137)
第三节 全微分 ………………………………………………………………………(139)
一、全微分的概念及计算 …………………………………………………………(139)
二、应用全微分进行近似计算 ……………………………………………………(140)

第四节 复合函数的微分法 …………………………………… (141)
第五节 隐函数的微分法 …………………………………… (144)
第六节 多元函数的极值 …………………………………… (145)
第七节 多元函数微分法的几何应用 ……………………… (149)
一、空间曲线的切线与法平面 ………………………… (149)
二、曲面的切平面与法线 ……………………………… (150)
复习题五 …………………………………………………… (152)
复习题五参考答案 ………………………………………… (153)
第六章 无穷级数 ………………………………………… (155)
第一节 数项级数的概念及性质 ………………………… (156)
一、常数项级数的基本概念 …………………………… (156)
二、常数项级数的性质 ………………………………… (157)
第二节 数项级数的审敛法 ……………………………… (158)
一、正项级数及其审敛法 ……………………………… (158)
二、交错级数及其审敛法 ……………………………… (160)
三、绝对收敛与条件收敛 ……………………………… (161)
第三节 幂 级 数 ………………………………………… (161)
一、幂级数的概念 ……………………………………… (161)
二、幂级数的收敛性 …………………………………… (162)
三、幂级数的性质 ……………………………………… (165)
第四节 幂级数的展开 …………………………………… (166)
一、泰勒级数 …………………………………………… (166)
二、函数展开成幂级数 ………………………………… (167)
复习题六 …………………………………………………… (170)
复习题六参考答案 ………………………………………… (171)
第七章 常微分方程 ……………………………………… (172)
第一节 微分方程的基本概念 …………………………… (172)
第二节 可分离变量的微分方程 ………………………… (173)
第三节 一阶线性微分方程 ……………………………… (174)
第四节 二阶微分方程 …………………………………… (174)
一、$y''=f(x)$ 型的微分方程 ………………………… (175)
二、$y''=f(x,y')$ 型的微分方程 ……………………… (175)
三、$y''=f(y,y')$ 型的微分方程 ……………………… (176)
第五节 二阶常系数线性微分方程 ……………………… (176)
一、二阶常系数线性微分方程 ………………………… (176)
二、二阶常系数线性齐次微分方程解的性质 ………… (176)
三、二阶常系数线性齐次微分方程的求解方法 ……… (177)
四、二阶常系数线性非齐次微分方程 ………………… (179)
第六节 微分方程的应用举例 …………………………… (182)

复习题七 …………………………………………………………………… (182)
复习题七参考答案 ………………………………………………………… (184)
第八章 行列式与矩阵 …………………………………………………… (185)
第一节 行列式的概念及计算 …………………………………………… (185)
一、行列式的概念 ………………………………………………………… (185)
二、行列式的性质 ………………………………………………………… (188)
三、克莱姆法则(用行列式解线性方程组) ……………………………… (193)
第二节 矩阵及其初等变化 ……………………………………………… (195)
一、矩阵的概念 …………………………………………………………… (195)
二、矩阵的运算 …………………………………………………………… (197)
第三节 逆 矩 阵 ………………………………………………………… (202)
一、逆矩阵的基本概念 …………………………………………………… (202)
二、逆矩阵存在及判定定理 ……………………………………………… (203)
三、逆矩阵的性质 ………………………………………………………… (204)
四、初等变换求逆矩阵 …………………………………………………… (206)
第四节 矩 阵 的 秩 ……………………………………………………… (208)
一、矩阵的秩的定义 ……………………………………………………… (209)
二、初等变换求矩阵的秩 ………………………………………………… (209)
三、矩阵秩的性质 ………………………………………………………… (211)
复习题八 …………………………………………………………………… (212)
复习题八参考答案 ………………………………………………………… (214)

第一章　函数、极限与连续

函数是数学中最基础的内容，通过反映变量之间的对应关系来描述现实世界；极限是研究函数关系最基本的工具，极限思想贯穿高等数学始终.

第一节　函　数

一、函数的概念

1. 函数的定义

例 1-1-1　将直径为 d 的圆木料锯成为矩形的木材(图 1-1-1)，矩形截面两条边长分别设为 x 及 y，由勾股定理，得

$$x^2+y^2=d^2,$$

解出 y，得

$$y=\pm\sqrt{d^2-x^2}\,(0<x<d),$$

由于 y 只能取正值，所以

$$y=\sqrt{d^2-x^2}\,(0<x<d).$$

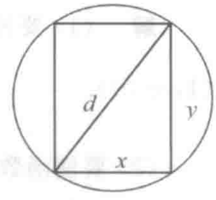


图 1-1-1

例 1-1-2　某企业每年最多生产某种产品 Ct，每吨售价 P 元，则销售该种产品的年总收入 R 与年产量 Q 之间的关系为：

$$R(Q)=PQ(0\leqslant Q\leqslant C).$$

上述例子都给出了两个变量在变化过程中的对应关系，其相同之处为：当一个变量在实数某一范围内任意取定一个数值时，按照一定的规律，另一变量有惟一确定的值与之对应，两个变量间的这种对应关系，在数学上称为函数关系.由值的惟一性，该函数关系称为单值函数，我们主要研究单值函数.

定义 1-1-1　设非空实数集合 D，若对 D 中的每一个 x，可以通过某种对应法则 f 确定惟一的 y，则称 y 是 x 的函数.记作

$$y=f(x),x\in D.$$

其中变量 x 称为自变量，变量 y 称为因变量.自变量 x 的取值范围 D 称为函数的定义域，也可以表示为 $D(f)$；因变量 y 的取值范围称为函数的值域，记为 $Z(f)$.

对于 $x_0\in D$，通过对应法则 f 所确定的值 y_0 称为 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值，记作

$$y_0=y\big|_{x=x_0}=f(x_0).$$

函数的定义域和对应法则是确定函数的两个要素.两个函数只有当定义域和对应法则都相同时，才是同一函数.而我们常说的函数关系指的就是对应法则 f，这点必须确定.

例 1-1-3　函数 $y=x$ 与 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 是不是相同的函数？

解　函数 $y=x$ 定义域为 $(-\infty,+\infty)$，而函数 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 虽然可以整理为 $y=x$，但是在 $x=0$ 时无意义，故定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，因此它们不是相同的函数.

在高等数学中经常用区间来表示函数的定义域和值域.现有一种特殊的区间是以后常用的，即邻域.

开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)(\delta>0)$ 称为 x_0 的 δ 邻域，或简称为 x_0 的邻域，其中 x_0 是邻域的中心，δ 是邻域的半径，见图 1-1-2.

如果在 x_0 的 δ 邻域内去掉点 x_0 得到集合 $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)(\delta>0)$，称为 x_0 的空心邻域，见图 1-1-3.

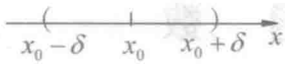


图 1-1-2

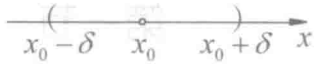


图 1-1-3

例 1-1-4　求下列函数定义域：

(1) $y=\dfrac{\ln(x+2)}{x-1}$；　　(2) $y=\sqrt{6-x^2+x}-\arcsin\dfrac{x+1}{2}$.

解　(1) 要使函数有意义，须使 $\begin{cases}x+2>0\\x-1\neq 0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x>-2\\x\neq 1\end{cases}$，所以函数定义域是 $(-2,1)\cup(1,+\infty)$.

(2) 要使函数有意义，须使 $\begin{cases}6-x^2+x\geqslant 0\\-1\leqslant\dfrac{x+1}{2}\leqslant 1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 3\\-3\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$，所以函数定义域是 $[-2,1]$.

注意　根据实际问题建立的函数关系，其定义域 $D(f)$ 应由实际条件决定.一般来说，经济变量往往取正值，即变量都是大于零的.

2. 函数的表示方法

常用的函数表示方法有三种：公式法、表格法和图象法.

例 1-1-5　某运输公司规定货物的吨公里运价为：在 a 公里以内，每公里 k 元，超过 a 公里后，超过的部分每公里为 $\dfrac{4}{5}k$ 元，求运价 m 和里程 s 之间的函数模型.

解　由题意知，里程不同，运价不同，因此它们之间的关系要分段表示.

当 $0<s\leqslant a$ 时，$m=ks$；

当 $s>a$ 时，$m=ka+\dfrac{4}{5}k(s-a)$.

综上讨论，得函数关系式为

$$m=\begin{cases}ks, & 0<s\leqslant a\\ ka+\dfrac{4}{5}k(s-a), & s>a\end{cases}，定义域为 (0,+\infty).$$

$\begin{cases}ks, & 0<s\leqslant a\\ ka+\dfrac{4}{5}k(s-a), & s>a\end{cases}$ 这种表述函数的方法就是公式法，而该形式函数称为

分段函数.分段函数与一般函数不同:它是自变量 x 在定义域的不同区间内用不同的数学表达式来表示的一个函数.这种函数在经济中经常见到,如我国现行的个人所得税计算公式就是一个分段函数.

例 1-1-6 设银行活期存款月利率为 r_0,一年期定期存款年利率为 r_1. 某人存入本金 P 元,定期一年,第二年自动转存.若提前支取,则利息只能按活期利息 r_0 计算,若存满一年取出,则得利息为 $r_1 P$;若超过一年又不到两年时取出,则超过一年的那段时间的利息按活期利息计算.以 S 表示存款的本利和(单位:元),以 t 表示存款时间(单位:月,以 30 天计算),于是 S 关于 t 的函数关系为:

$$S(t)=\begin{cases}P(1+r_0 t), & 0<t<12\\ P(1+r_1), & t=12\\ P(1+r_1)[1+r_0(t-12)], & 12<t<24\end{cases}.$$

例 1-1-7 设函数 $f(x)=\begin{cases}x+2, & 0\leqslant x\leqslant 2\\ x^2, & 2<x\leqslant 4\end{cases}$,求 $f(1)$、$f(4)$、$f(x-1)$ 的值.

解 当 $0\leqslant x\leqslant 2$ 时,$f(x)=x+2$,所以 $f(1)=3$;

当 $2<x\leqslant 4$ 时,$f(x)=x^2$,所以 $f(4)=16$;

$f(x-1)=\begin{cases}(x-1)+2, & 0\leqslant x-1\leqslant 2\\ (x-1)^2, & 2<x-1\leqslant 4\end{cases}$,即

$f(x-1)=\begin{cases}x+1, & 1\leqslant x\leqslant 3\\ (x-1)^2, & 3<x\leqslant 5\end{cases}$.

二、函数的性质

1. 奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 $D(f)$ 关于原点对称,若对任意 $x\in D(f)$,都有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为偶函数;若 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数.

奇函数的图象关于原点对称,偶函数的图象关于 y 轴对称.当然,有许多函数既不是奇函数也不是偶函数,称为非奇非偶函数.

2. 单调性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义,对区间 (a,b) 内的任意两点 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$),则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调增加(或单调减少),区间 (a,b) 称为单调增区间(或单调减区间).单调增函数和单调减函数统称为单调函数;单调增区间或单调减区间统称为单调区间.

单调增函数的图形是沿 x 轴正向逐渐上升的,见图 1-1-4;单调减函数的图形是沿 x 轴正向逐渐下降的,见图 1-1-5.

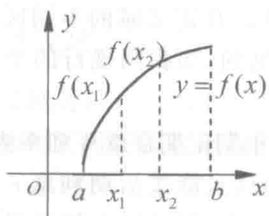


图 1-1-4

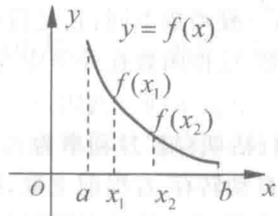


图 1-1-5

上述定义也适用于其他有限区间和无限区间的情形.

3. 周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 $D(f)$.若存在不为零的数 T,使得对于任意 $x \in D(f)$,都有 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.通常所说周期函数的周期是指它的最小正周期.

如 $y=\sin x$ 和 $y=\tan x$ 都是周期函数,其最小正周期分别为 2π 和 π.

4. 有界性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 有定义,若存在正数 M,使得对于任意 $x \in (a,b)$ 都有 $|f(x))| \leqslant M$ 成立,则称 $f(x)$ 在 (a,b) 上有界,否则称 $f(x)$ 在 (a,b) 上无界.此外,有界函数的几何特征是:其图象被控制在两条水平直线之间.

例 1-1-8 函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的,见图 1-1-6. 而 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,2)$ 上是无界的,在 $[1,+\infty)$ 上是有界的,见图 1-1-7.

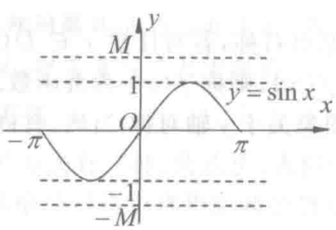


图 1-1-6

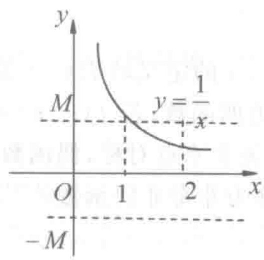


图 1-1-7

显然,函数有界时,正数 M 的取法是不惟一的,如对于 $y=\sin x$ 而言,只要 $M \geqslant 1$, $|\sin x| \leqslant M$ 即成立.

三、初等函数

1. 基本初等函数

以下六类函数统称为基本初等函数:

常数函数　$y=C$(C 为常数);

幂函数　$y=x^{\alpha}$(α 为实数);

指数函数　$y=a^{x}$($a>0, a \neq 1, a$ 为常数),

$y=\mathrm{e}^{x}$($\mathrm{e}=2.71828\cdots$);

对数函数　$y=\log_a x\,(a>0,a\neq1,a$ 为常数$)$，

$y=\ln x$；

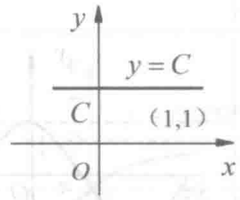
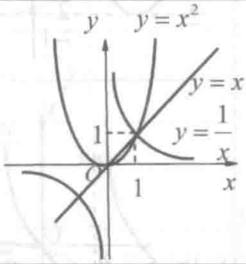
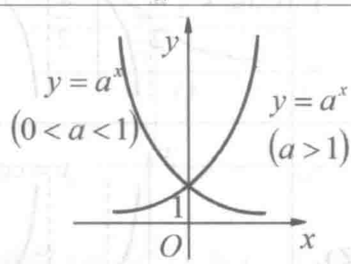
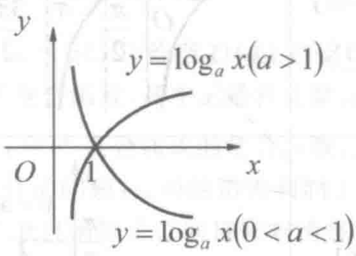
三角函数　$y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$；

反三角函数　$y=\arcsin x, y=\arccos x$，

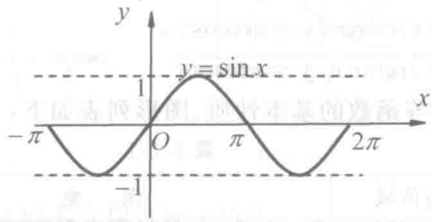
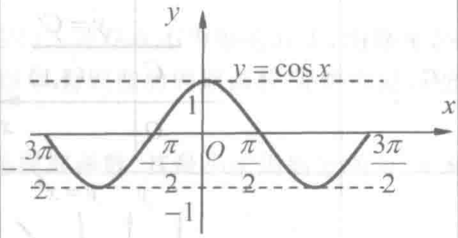
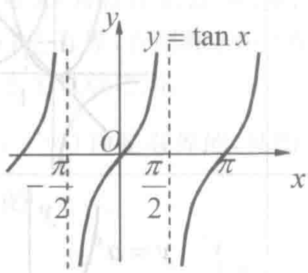
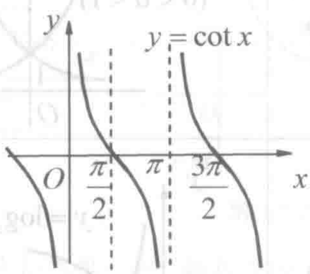
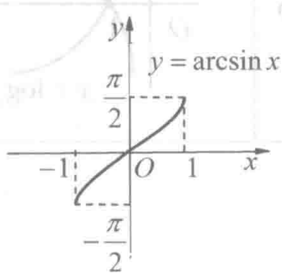
$y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$.

现将这六种基本初等函数的基本性质、图形列表如下：

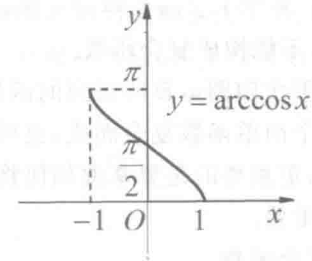
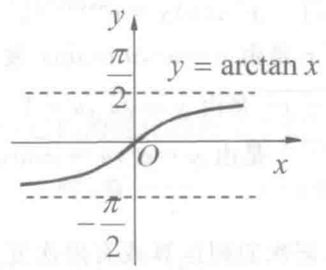
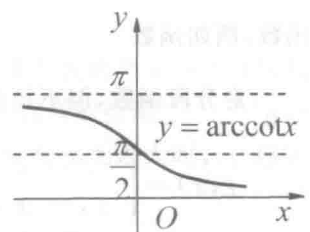
表 1-1-1

函数	定义域与值域	图　象	特　性
$y=C$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y=C$		偶函数
$y=x^a$（a 为任意常数）	随 a 而不同		当 $a>0$，函数在第一象限单调递增；当 $a<0$，函数在第一象限单调递减
$y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		过 $(0,1)$，当 $a>1$ 时单调递增；当 $0<a<1$ 时单调递减
$y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		过 $(1,0)$，当 $a>1$ 时单调递增；当 $0<a<1$ 时单调递减

续表

函数	定义域与值域	图　　象	特　　性
$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		奇函数，周期 2π，有界；在 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加，在 $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$ 内单调减少
$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		偶函数，周期 2π，有界；在 $(2k\pi,2k\pi+\pi)$ 内单调减少，在 $(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)$ 内单调增加
$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\ (k\in Z)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期 π；在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加
$y=\cot x$	$x\neq k\pi\ (k\in Z)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期 π；在 $(k\pi,k\pi+\pi)$ 内单调减少
$y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$ $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$		奇函数，单调增加，有界

续表

函数	定义域与值域	图　象	特　性
$y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$		单调减少，有界
$y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		奇函数，单调增加，有界
$y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$		单调减少，有界

2. 复合函数

若有函数 $y=\sqrt{u}$ 及 $u=\mathrm{e}^x$，可得函数 $y=\sqrt{\mathrm{e}^x}$ $(x\in(-\infty,\infty))$，显然，这不是基本初等函数.这类函数我们称为复合函数.

定义 1-1-2　设函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，若当 $D(f)\cap Z(\varphi)\neq\Phi$ 时，则称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 是 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 的复合函数，其中 x 是自变量，u 为中间变量，y 为函数值.

例如，$y=\sqrt{\mathrm{e}^x}$ 是由 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=\mathrm{e}^x$ 复合而成的复合函数，且 $D(y)=(-\infty,+\infty)$.经济活动中，经常会遇到诸如下面这样的问题：公司的销售利润 L 是销售量 Q 的函数，而销售量又是销售价格 P 的函数，价格 P 通过销售量 Q 间接影响销售利润 L，那么销售利润 L 可以看作价格 P 的函数，这也是复合函数.

说明　不是所有的函数都可以构成复合函数的.如 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=\sin x-2$，有 $D(y)=[0,+\infty)$，$Z(u)=[-3,-1]$，此时这两个 u 取值的交集 $D(y)\cap Z(u)=\Phi$，故 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=\sin x-2$ 构成的关系式 $y=\sqrt{\sin x-2}$ 不是函数关系.

例 1-1-9　下列函数能否构成复合函数？能构成的话，写出复合函数.

(1) $y=\ln u$，$u=1-x^2$；　　(2) $y=\ln(u-1)$，$u=1-x^2$.

解 (1) 因为 $D(y)=(0,+\infty)$,$Z(u)=(-\infty,1]$,即 $D(y)\cap Z(u)=(0,1]$,所以 $y=\ln u$ 和 $u=1-x^2$ 可构成复合函数 $y=\ln(1-x^2)$

(2) 因为 $D(y)=(1,+\infty)$,$Z(u)=(-\infty,1]$,即 $D(y)\cap Z(u)=\Phi$,所以 $y=\ln(u-1)$ 和 $u=1-x^2$ 不能构成复合函数.

由基本初等函数经过有限次四则运算所得到的函数称为简单函数.

复合函数不仅可以由两个简单函数复合而成,也可以由多个简单函数复合而成.

理解复合函数的概念后,更重要的是要掌握如何将复合函数分解为简单函数,这对将要学习的导数与积分的运算很重要.

例 1-1-10 分解下列复合函数:

(1)$y=\sin^2 x$;(2)$y=\sqrt{1-x^2}$;(3)$y=e^{\sin\sqrt{x^2+1}}$.

解 (1) 函数 $y=\sin^2 x$ 是由 $y=u^2$,$u=\sin x$ 复合而成的复合函数;

(2) 函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 是由 $y=\sqrt{u}$,$u=1-x^2$ 复合而成的;

(3) 函数 $y=e^{\sin\sqrt{x^2+1}}$ 是由 $y=e^u$,$u=\sin v$,$v=\sqrt{t}$,$t=x^2+1$ 复合而成的.

3. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合所构成的、由一个解析式表示的函数,称为初等函数.

分段函数不一定是初等函数,例如函数

$$y=\begin{cases}x^2, & x<0\\ 1, & x\geqslant 0\end{cases}$$,是分段函数,但不是初等函数.又如分段函数

$$f(x)=\begin{cases}-x, & x<0\\ x, & x\geqslant 0\end{cases}$$

能化为 $f(x)=\sqrt{x^2}$,所以这个分段函数是初等函数.

初等函数和分段函数是微积分研究的两个主要对象.

第二节 极限

极限是高等数学的重要概念之一,用于研究变量在某一变化过程中的变化趋势,极限的思想和方法是经济数学研究问题的基本思想和方法.

一、数列的极限

为了解数列极限的概念,我们先来考察如下例子.

例 1-2-1 (割圆术)设有一圆,首先作内接正六边形,把它的面积记为 A_1;再作内接正十二边形,记其面积为 A_2;再作内接正二十四边形,记其面积为 A_3;依此下去,每次边数加一倍.一般地,把内接正 $6\times 2^{n-1}$ 边形的面积记为 $A_n(n=1,2,\cdots)$.这样,就得到一系列内接正多边形的面积:$A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n,\cdots$,它们构成一列有次序的数,我们称之为无穷数列.当 n 越大,内接正 n 边形的面积与圆的面积差别就越小,从而以 A_n 作为圆面积的近似值就越精确.但是,无论 n 的值取得多么大,只要 n 取定,A_n 终究只是一个正多边形的面积,还不是圆的面积.因此,设想 n 无限增大(记为 $n\to\infty$,读作 n 趋向无穷大),即内接正多边形的边数无