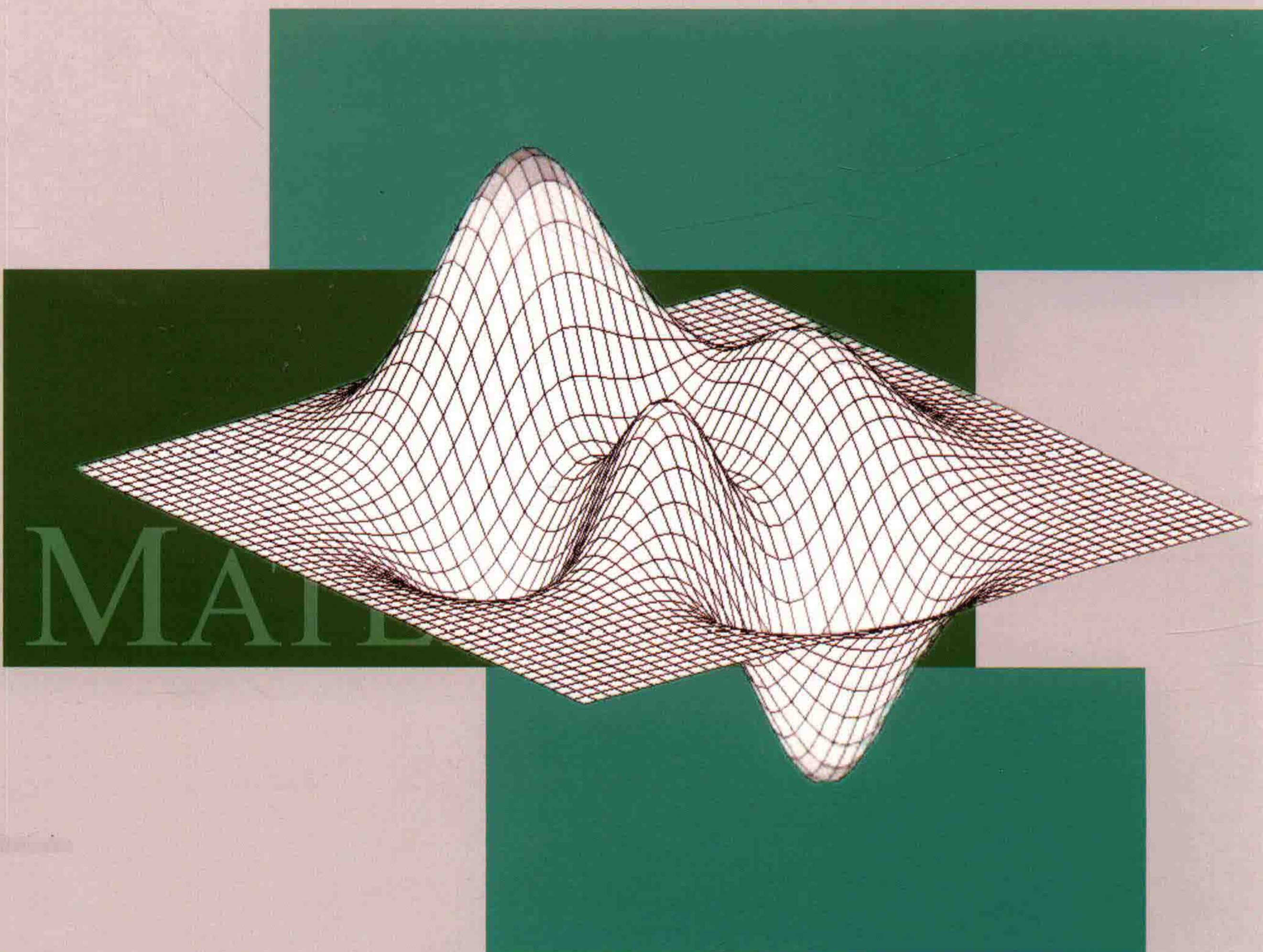
大学数学教学与改革丛书

高等数学（下册）

王 红 杨策平 主编



科学出版社

大学数学教学与改革丛书

高等数学

（下册）

王　红　杨策平　主编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书以"学习数学基本知识，提高数学应用能力"为宗旨，汲取了现行教学改革中一些成功举措. 在每章开始引入本章应用实例，引导学生联系实际，并将数学软件 MATLAB 融入每一章，让学生在理解高等数学基本理论的基础上，用 MATLAB 软件进行数学计算，以培养学生掌握运用数学工具解决实际问题的能力.

本书分上、下两册出版，下册包括空间解析几何、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、数学软件简介等内容. 具有结构严谨，叙述直观清晰，内容通俗易懂、结合实际等特点.

本书可作为高等学校理工类相关专业的教材或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下册/王红，杨策平主编. —北京：科学出版社，2018. 8

(大学数学教学与改革丛书)

ISBN 978-7-03-058266-9

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①王… ②杨… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 156357 号

责任编辑：邵 娜 闫 陶/责任校对：杨聪敏

责任印制：彭 超/封面设计：彬 峰

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市首壹印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

开本：787×1092 1/16

2018 年 8 月第 一 版 印张：13 1/4

2018 年 8 月第一次印刷 字数：315 000

定价：50.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

本书是在保持传统教材内容的基础上，为深入贯彻数学教学改革和学科建设精神，针对普通高等学校理工类学生编写的教材．在保持结构严谨、内容通俗易懂的同时，注重基础、加强应用．本书具有以下特色．

（1）尽量减少烦琐而又难以起到启发思维作用的逻辑证明．在编写的过程中，编者力求使学生在学习过程中较好地了解高等数学的基本内容，特别突出基本思想和基本方法，注重对学生的基本运算、分析问题及解决问题能力的培养．文字表述详尽通畅，平易近人，易教易学，内容编排利于教学的组织和安排．

（2）注重高等数学知识的实际应用．本书在每一章开始引入与本章知识点相关的应用实例，引导学生联系实际，并在该章结束时给出实例解答．强调数学建模的思想和方法，以达到学以致用、服务专业课程的效果．所选用的例题、习题突出数学基本能力的训练而不过分追求技巧．

（3）注重教学实践性，每章最后一节内容均有 MATLAB 软件求解示例．通过数学实验将高等数学与数学软件的应用有机结合起来，让学生在理解高等数学基本理论基础上，用 MATLAB 进行数学计算，帮助学生掌握用数学工具解决实际问题的能力，培养学生的数学建模能力．

本书参加编写的人员有：王红、杨策平、朱玲、徐循、朱长青、刘清国、郑列、方瑛、刘磊、张凯凡、黄斌、任潜能、许松林、蒋汇峰、陈华、黄毅、胡二琴、李家雄、耿亮等，由王红、杨策平担任主编，徐循、朱玲、朱长青、刘清国担任副主编，由王红、杨策平统稿、定稿．

由于编者水平有限，书中难免有疏漏和不足之处，恳请广大读者提出批评、指正，以便再版时予以修订．

编　者

2018 年 5 月

目　录

第7章　空间解析几何

7.1　空间直角坐标

7.1.1　空间直角坐标系

在空间取定一点 O，以 O 为公共原点作三条两两垂直的数轴，依次记为 x 轴(横轴)、y 轴(纵轴)和 z 轴(竖轴)，统称为坐标轴，这样就构成了空间直角坐标系，记作 $Oxyz$ 坐标系，点 O 称为坐标原点. 在空间直角坐标系中，一般采用右手系，即 x,y,z 轴的方向符合右手规则，这就是：以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从 x 轴正向以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向 y 轴正向时，大拇指的指向就是 z 轴的正向，如图 7-1 所示.

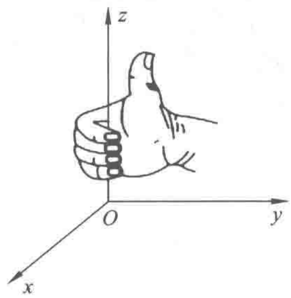


图 7-1

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面，这样确定的三个平面统称为坐标面，分别叫做 xOy 平面、yOz 平面、zOx 平面；这三个平面将空间划分成八个部分，称为空间直角坐标系的八个卦限. 由 x 轴正半轴、y 轴正半轴和 z 轴正半轴确定的卦限叫做第一卦限，其他第二、第三、第四卦限，在 xOy 平面的上方，按逆时针方向确定. 第五至第八卦限，在 xOy 平面的下方，第一卦限之下的是第五卦限，按逆时针方向确定，这八个卦限分别用字母 I、II、III、IV、V、VI、VII、VIII 表示(如图 7-2).

建立了空间直角坐标系后，就可建立空间的点与由三个实数组成的有序数组之间的一一对应关系.

设 M 为空间中的任一点，过点 M 分别作垂直于三个坐标轴的三个平面，与 x 轴、y 轴和 z 轴依次交于 A,B,C 三点，其坐标分别为 x,y,z，则点 M 就唯一确定了一个有序数组 (x,y,z)，称数组 (x,y,z) 为点 M 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中的坐标，如图 7-3 所示. x,y,z 分别称为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标.

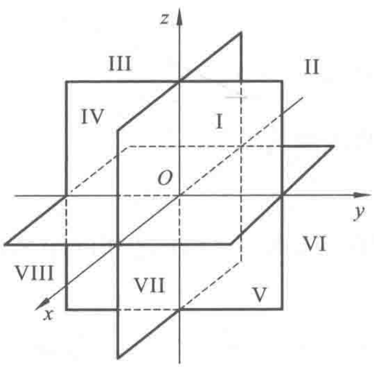


图 7-2

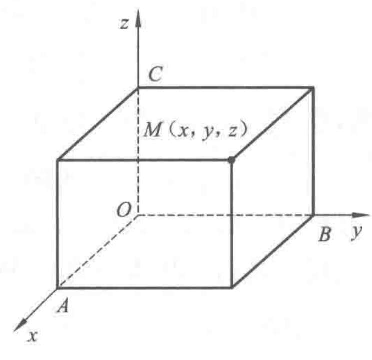


图 7-3

反之，对于任意给定的一个有序数组 (x,y,z)，分别以 x,y,z 为横坐标、纵坐标和竖坐标. 在三个坐标轴上描出三个点 A,B,C，过这三个点分别作垂直于三个坐标轴的平面，三个平面只有一个交点 M，该点就是以有序数组 (x,y,z) 为坐标的点. 这样就建立了空间中的点 M 与有序数组 (x,y,z) 之间的一一对应关系.

显然，原点 O 的坐标为 $(0,0,0)$；x 轴、y 轴、z 轴上的点的坐标分别是 $(x,0,0)$，$(0,y,0)$，$(0,0,z)$；三个坐标面 xOy，yOz，zOx 上的点的坐标分别是 $(x,y,0)$，$(0,y,z)$，$(x,0,z)$.

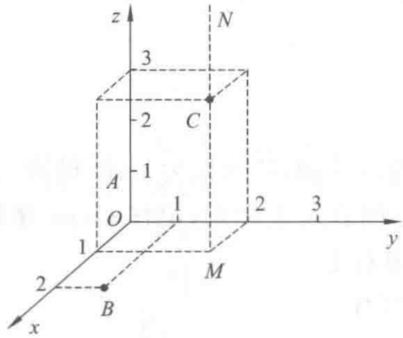


图 7-4

例 1 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，画出点 $A(0,0,1)$，$B(2,1,0)$，$C(1,2,3)$.

解 根据点 A、点 B 的坐标知，点 A 在 z 轴上，点 B 在 xOy 平面上. 下面画点 C，先在 x 轴的正方向上取 1 个单位的点，y 轴的正方向上取 2 个单位的点，过这两点在 xOy 平面上分别作 y 轴与 x 轴的平行线，交于点 M，过 M 作 Oz 的平行线 MN，在直线 MN 上，点 M 的上方取 3 个单位的点. 这样便得到点 C(图 7-4).

7.1.2 空间两点间的距离

在数轴上，$M_1(x_1)$，$M_2(x_2)$ 两点之间的距离为

$$d = |M_1M_2| = |x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2}.$$

在平面上，$M_1(x_1,y_1)$，$M_2(x_2,y_2)$ 两点之间的距离为

$$d = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

设在空间上任意两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$，求它们之间的距离 $d = |M_1M_2|$.

事实上，过两点 M_1，M_2 分别作垂直于三条坐标轴的平面，这六个平面围成一个以 $|M_1M_2|$ 为对角线的长方体(图 7-5).

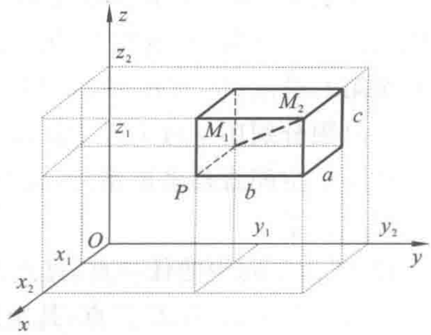


图 7-5

由于长方体的三个棱长分别为

$$a = |x_2 - x_1|, \quad b = |y_2 - y_1|,$$
$$c = |z_2 - z_1|,$$

所以

$$\begin{aligned} |M_1M_2| &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \end{aligned} \tag{1}$$

特别地，点 $M(x,y,z)$ 与坐标原点 $O(0,0,0)$ 的距离为

$$|OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

例 2 设 $A(-1,2,0)$，$B(-1,0,-2)$ 为空间两点，求 A 与 B 之间的距离.

解 根据公式(1)得 A 与 B 之间的距离为

$$|AB| = \sqrt{[-1-(-1)]^2 + (0-2)^2 + (-2-0)^2} = 2\sqrt{2}.$$

例 3 在 z 轴上求与点 $A(3,5,-2)$ 和 $B(-4,1,5)$ 等距的点 M.

解 由于点 M 在 z 轴上，则 M 点的坐标可设为 $(0,0,z)$，又因

$$|MA| = |MB|,$$

根据公式(1)得

$$\sqrt{(3-0)^2+(5-0)^2+(-2-z)^2} = \sqrt{(-4-0)^2+(1-0)^2+(5-z)^2},$$

解得

$$z = \frac{2}{7},$$

则 M 点为 $\left(0,0,\frac{2}{7}\right)$.

习 题 7-1

1. 研究空间直角坐标系各个卦限中点的坐标特征，指出下列各点在哪个卦限：

$A(1,-2,3)$， $B(2,3,-4)$， $C(2,-3,-4)$， $D(-2,-3,1)$.

2. 研究在各个坐标面和坐标轴上的点的坐标各有什么特征，指出下列各点在哪个坐标面或坐标轴上：

$A(3,4,0)$， $B(0,4,3)$， $C(3,0,0)$， $D(0,-1,0)$.

3. 求点 $M(x,y,z)$ 与 x 轴、xOy 平面及原点的对称点坐标.

4. 试证以 $A(4,1,9)$,$B(10,-1,6)$,$C(2,4,3)$ 为顶点的三角形是等腰三角形.

7.2 向量及其坐标表示法

7.2.1 向量的概念

在力学、物理学等学科的研究中，常会遇到这样一类量，它们既有大小又有方向. 例如力、力矩、位移、速度、加速度等，我们把这类既有大小又有方向的量称为向量(或矢量).

在数学上，用一条有方向的线段(称为有向线段)表示向量，有向线段的方向表示向量的方向. 以 A 为起点、B 为终点的有向线段表示的向量记为 $\overrightarrow{AB}$(图 7-6). 向量可用粗体字母表示，也可以用书写体字母表示，如：$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{r}$,$\boldsymbol{v}$,$\boldsymbol{F}$ 或 $\vec{a}$,$\vec{r}$,$\vec{v}$,$\vec{F}$.

图 7-6

向量的大小称为向量的模. 向量 $\boldsymbol{a}$,$\vec{a}$,$\overrightarrow{AB}$ 的模分别记为 $|\boldsymbol{a}|$，$|\vec{a}|$，$|\overrightarrow{AB}|$. 模等于 1 的向量称为单位向量. 模等于 0 的向量称为零向量，记作 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$. 零向量的起点与终点重合，其方向看作是任意的. 规定：两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 不论起点是否一致，如果大小相等，方向相同，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是相等的，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 这就是说，经过平行移动后能完全重合的向量是相等的. 允许平行移动的向量称为自由向量. 不特别说明，本书讨论的向量均为自由向量.

两个非零向量如果其方向相同或相反，则称这两个向量平行. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，记为 $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$. 零向量与任何向量平行.

当两个平行向量的起点放在同一点时，其终点与公共的起点在一条直线上. 所以，两

向量平行又称为这两向量共线.

类似地,还有共面的概念.设有 k $(k \geqslant 3)$ 个向量,当把它们起点放在同一点时,如果 k 个终点与公共起点在一个平面上,则称这 k 个向量共面.

7.2.2 向量的线性运算

1. 向量的加法

向量的加法运算规定如下:

设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,平移向量使 $\boldsymbol{b}$ 的起点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合,从 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量 $\boldsymbol{c}$(图 7-7) 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和,记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

上述作两向量之和的方法叫做向量加法的三角形法则.

当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时,平移向量使 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点重合,以 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 为邻边作一平行四边形,从公共起点到对角的向量(图 7-8) 等于向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 这就是向量加法的平行四边形法则.

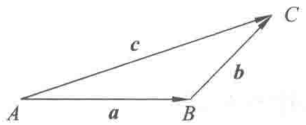


图 7-7

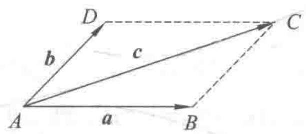


图 7-8

向量加法符合下列运算规律:

(1) **交换律** $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) **结合律** $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

由于向量的加法符合交换律与结合律,故 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ $(n \geqslant 3)$ 相加可写成

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n,$$

按向量相加的三角形法则,可得 n 个向量相加的法则如下:使前一向量的终点作为第二个向量的起点,依次作向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$,最后以第一个向量的起点为起点,第 n 个向量的终点为终点作一向量,这个向量即为其和.

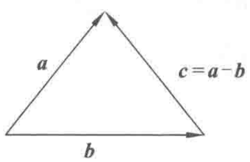


图 7-9

根据向量的三角形法则,若向量 $\boldsymbol{b}$ 加向量 $\boldsymbol{c}$ 等于向量 $\boldsymbol{a}$,则称向量 $\boldsymbol{c}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之差,记为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$(图 7-9).

2. 向量与数的乘法

下面,给出向量与数的乘法的定义.

向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积记作 $\lambda\boldsymbol{a}$,规定 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量,其模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$,它的方向当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相同,当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相反.

当 $\lambda=0$ 时,$|\lambda\boldsymbol{a}|=0$,即 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量,其方向是任意的.

特别地,当 $\lambda=\pm 1$ 时,有

$$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}, \quad (-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}.$$

向量与数的乘积符合下列运算规律:

(1) **结合律** $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$,其中 λ,μ 都是常量;

(2) **分配律** $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$;

$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

例 1 在平行四边形 $ABCD$ 中,设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$. 试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}$,$\overrightarrow{MB}$,$\overrightarrow{MC}$,$\overrightarrow{MD}$,其中 M 是平行四边形对角线的交点(图 7-10).

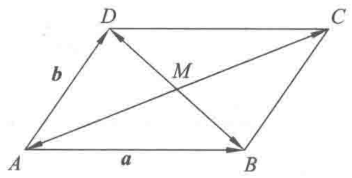


图 7-10

解 由于平行四边形的对角线互相平分,所以

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}, \quad 即 \quad -(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\overrightarrow{MA},$$

于是

$$\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

因为$\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MA}$,所以$\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$. 又因 $-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MD}$,所以$\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$. 由于$\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MD}$,所以$\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

前面已经讲过,模等于 1 的向量称为单位向量. 如果 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,则向量$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$是与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量,记为 $\boldsymbol{e}_a=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$,称为 $\boldsymbol{a}$ 的单位化向量,且有 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$.

7.2.3 向量的坐标表示法

向量的运算仅用几何方法来研究是不够的,所以需要用代数方法来研究. 下面先介绍向量的坐标表示法.

在坐标轴上分别取与 x 轴、y 轴和 z 轴方向相同的单位向量称为基本单位向量,分别用 $\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{j}$,$\boldsymbol{k}$ 表示.

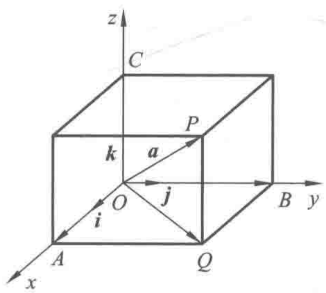


图 7-11

设向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点在坐标原点 O,终点为 $P(x,y,z)$,过点 $P(x,y,z)$ 作三个平面分别垂直于三条坐标轴,交点依次为 A,B,C(图 7-11),根据向量与数的乘法运算得向量$\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i}$,$\overrightarrow{OB}=y\boldsymbol{j}$,$\overrightarrow{OC}=z\boldsymbol{k}$,由向量加法的三角形法则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QP}\\&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

称 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示式,记作 $\boldsymbol{a}=\{x,y,z\}$,其中 x,y,z 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标.

由两点间的距离公式得 $\boldsymbol{a}$ 的模就是点 O 与点 P 之间的距离,即

$$|\boldsymbol{a}|=|OP|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

若$\overrightarrow{AB}$是以 $A(x_1,y_1,z_1)$ 为起点、$B(x_2,y_2,z_2)$ 为终点的向量(图 7-12),则向量$\overrightarrow{AB}$的坐标表示式为

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}&=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\\&=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\\&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

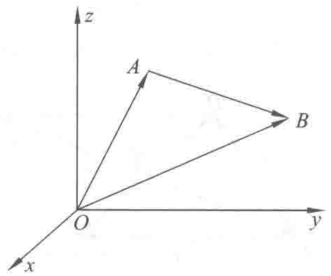


图 7-12

$\overrightarrow{AB}$ 也可记为

$$\overrightarrow{AB}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}.$$

由此可知，起点不在坐标原点的向量的坐标，恰好等于向量终点坐标与起点坐标之差. 向量$\overrightarrow{AB}$的模就是A与B两点间的距离$|AB|$，即$|AB|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

利用向量的坐标，可得向量的加法、减法以及向量与数的乘法的运算如下：

设

$$\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\},\quad \boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\},$$

即

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k},$$

则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k}=(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z).$$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x)\boldsymbol{i}+(a_y-b_y)\boldsymbol{j}+(a_z-b_z)\boldsymbol{k}=(a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z).$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x)\boldsymbol{i}+(\lambda a_y)\boldsymbol{j}+(\lambda a_z)\boldsymbol{k}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)(\lambda\text{ 为实数}).$$

向量是由其模与方向确定的，所以对于非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标(a_x,a_y,a_z)，其模与方向也可以用其坐标来表示.

设向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点在坐标原点，终点坐标就是(a_x,a_y,a_z)，根据两点间距离公式得 $\boldsymbol{a}$ 的模的坐标表示为$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$. 显然，非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向可由该向量与三个坐标轴正向的夹角α,β,γ来表示，也可以用这三个角的余弦$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$来表示. α,β,γ称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的三个方向角，$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦，且

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}.$$

且

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

例 2 已知两点 $A(2,2,\sqrt{2})$ 和 $B(1,3,0)$，计算向量$\overrightarrow{AB}$的模、方向余弦和方向角.

解 这里$\overrightarrow{AB}=\{1-2,3-2,0-\sqrt{2}\}=\{-1,1,-\sqrt{2}\}$，则

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2}=2;\quad \cos\alpha=-\frac{1}{2},\quad \cos\beta=\frac{1}{2},\quad \cos\gamma=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

从而

$$\alpha=\frac{2\pi}{3},\quad \beta=\frac{\pi}{3},\quad \gamma=\frac{3\pi}{4}.$$

习 题 7-2

1. 下列向量哪个是单位向量?

(1) $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$;　　　　(2) $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$.

2. 设向量 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$,计算 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

3. 给定向量 $\boldsymbol{a}=\{3,5,-1\}$, $\boldsymbol{b}=\{2,2,3\}$, $\boldsymbol{c}=\{4,-1,3\}$,求

(1) $2\boldsymbol{a}$;　　　　(2) $2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}$.

4. 求平行于 $\boldsymbol{a}=\{1,1,1\}$ 的单位向量.

5. 给定两定点 $A(4,0,5)$ 及 $B(7,1,3)$ 的向量$\overrightarrow{AB}$,求与$\overrightarrow{AB}$ 同向的单位向量.

6. 求起点为 $A(1,2,1)$,终点为 $B(-19,-18,1)$ 的向量$\overrightarrow{AB}$ 的坐标表示式及 $|\overrightarrow{AB}|$.

7. 求向量 $\boldsymbol{a}=\{1,\sqrt{2},1\}$ 的单位化向量 $\boldsymbol{e}_a$,并求 $\boldsymbol{a}$ 的方向与三个坐标轴正向的夹角 α, β, γ.

7.3 数量积与向量积

7.3.1 两向量的数量积

1. 数量积的定义与性质

设一物体在力 $\boldsymbol{F}$ 作用下从点 M_1 移到点 M_2,以 $\boldsymbol{s}$ 表示位移$\overrightarrow{M_1M_2}$. 由物理学知识得,力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功为

$$W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta,$$

其中 θ 为 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角(图 7-13).

将这个例子抽象为数学概念就得到向量的数量积的定义.

定义 1　对于两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,其模 $|\boldsymbol{a}|$, $|\boldsymbol{b}|$ 与其夹角 θ 余弦的乘积称为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的数量积或点积,记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$(图 7-14),即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta.$$

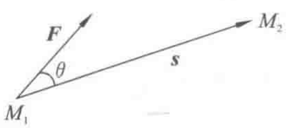


图 7-13

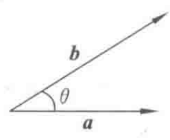


图 7-14

由于 $|\boldsymbol{b}|\cos\theta=|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$,当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时, $|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 就是向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 的投影,记为 $\boldsymbol{b}_a=|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$. 同理,当 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时, $\boldsymbol{a}_b=|\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$. 所以,两向量的数量积也可以用投影形式表示出来 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot\boldsymbol{b}_a=|\boldsymbol{b}|\cdot\boldsymbol{a}_b$.

由数量积定义知:

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}|\cos\theta=|\boldsymbol{a}|^2$.

显然，$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1$.

(2) 对于两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，而 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$，$|\boldsymbol{b}|\neq 0$，所以 $\cos\theta=0$，从而 $\theta=\frac{\pi}{2}$，即 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 反之，如果 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $\theta=\frac{\pi}{2}$，$\cos\theta=0$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=0$.

由于零向量的方向可以看作是任意的，零向量与任何向量都垂直. 因此，上述结论可叙述为：向量 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

由这个结论得 $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0$.

数量积符合下列运算律：

(1) **交换律**　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；

(2) **分配律**　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$；

(3) $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$，$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot(\mu\boldsymbol{b})=\lambda\mu(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$，$\lambda,\mu$ 为数.

2. 数量积的坐标表示式

设 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，根据数量积的运算律得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+a_xb_z\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}\\&\quad+a_yb_x\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+a_yb_y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+a_yb_z\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}\\&\quad+a_zb_x\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+a_zb_y\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}\\&=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z,\end{aligned}$$

即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

3. 两非零向量夹角余弦的坐标表示式

由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$，当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时，有

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

例 1　已知三点 $M(1,1,1)$，$A(2,2,1)$ 和 $B(2,1,2)$，求 $\angle AMB$.

解　从 M 到 A 的向量记为 $\boldsymbol{a}$，从 M 到 B 的向量记为 $\boldsymbol{b}$，则 $\angle AMB$ 就是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角. 这里

$$\boldsymbol{a}=\{1,1,0\},\quad \boldsymbol{b}=\{1,0,1\}.$$

因为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times1+1\times0+0\times1=1,$$

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1^2+1^2+0^2}=\sqrt{2},$$

$$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}.$$

所以，

$$\cos\angle AMB=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{1}{2}.$$

从而，$\angle AMB=\frac{\pi}{3}$.

7.3.2 两向量的向量积

1. 向量积的定义与性质

定义 2 设向量 $\boldsymbol{c}$ 是由两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 按下列方式确定的.

(1) $\boldsymbol{c}$ 的模 $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$,其中 θ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 间的夹角;

(2) $\boldsymbol{c}$ 垂直于由 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 决定的平面,$\boldsymbol{c}$ 的方向根据右手规则从 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$ 确定.则向量 $\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积,记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

注意:与数量积不同,向量积不是数量,而是向量.

由向量积的定义知,

(1) $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$.

(2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

因为夹角 $\theta=0$,所以 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a}|^2\sin 0=0$.

由此可得 $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$.

(3) 对于两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,如果 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$;反之,如果 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$,则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

这是因为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,且 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$, $|\boldsymbol{b}|\neq 0$,所以 $\sin\theta=0$,于是 $\theta=0$ 或 π,即 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$;反之,$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$,则 $\theta=0$ 或 π,于是 $\sin\theta=0$,从而 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=0$,即 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

由于零向量与任何向量平行,因此,上述结论可叙述为:向量 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

向量积符合下列的运算律:

(1) **交换律** $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$;

(2) **分配律** $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$;

(3) $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ (λ 为实数).

2. 向量积的坐标表示式

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$.按向量积的运算规律可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}+a_xb_z\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}+a_yb_x\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}+a_yb_y\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}+a_yb_z\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}\\&\quad+a_zb_x\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}+a_zb_y\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

由于

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j},$$

所以

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}.$$

为了便于记忆,利用三阶行列式性质,可写成

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}.$$

例 2 设 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$,计算 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.