



计算机专业“十三五”规划教材

计算机 数学基础

JISUANJI SHUXUE JICHU

主编 刘淋



江苏大学出版社
JIANGSU UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本教材主要介绍了计算机理论需要用到的基础数学知识。除了预备知识外，本教材共分为8章，分别介绍了函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，积分及其应用，矩阵与线性方程组，概率论，数理逻辑，图论等内容。

本书既可作为各类院校计算机相关专业的教材，也可供从事计算机专业的科学工作者及相关工程技术人员参考。

计算机数学基础

图书在版编目（CIP）数据

计算机数学基础 / 刘淋主编. -- 镇江 : 江苏大学出版社, 2018.1

ISBN 978-7-5684-0659-8

I. ①计… II. ①刘… III. ①电子计算机—数学基础—高等职业教育—教材 IV. ①TP301.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 009346 号

计算机数学基础

Jisuanji Shuxue Jichu

主 编 / 刘 淋

责任编辑 / 郑芳媛 吴昌兴

出版发行 / 江苏大学出版社

地 址 / 江苏省镇江市梦溪园巷 30 号（邮编：212003）

电 话 / 0511-84446464（传真）

网 址 / <http://press.ujs.edu.cn>

排 版 / 北京金企鹅文化发展中心

印 刷 / 北京谊兴印刷有限公司

开 本 / 787 mm×1 092 mm 1/16

印 张 / 15.75

字 数 / 393 千字

版 次 / 2018 年 1 月第 1 版 2018 年 1 月第 1 次印刷

书 号 / ISBN 978-7-5684-0659-8

定 价 / 48.00 元

如有印装质量问题请与本社营销部联系（电话：0511-84440882）

前

言

计算机是人类科学发展史的里程碑，它将人类从大量烦琐的日常事务中解放出来。电子计算机开启了数字自动化时代。数学是计算机的基础，在计算机理论中需要用到大量的数学知识。例如，软件工程需要图论，软件测试需要组合数学，计算机编程需要集合论、数理逻辑、微积分等。

为适应计算机各专业对数学课程的要求，我们编写了本教材。本教材覆盖了函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，积分及其应用，矩阵与线性方程组，概率论，数理逻辑，图论等内容，重在培养与提高学生应用数学知识解决实际问题的意识与能力，突出分析问题、解决问题所需要的数学思想和计算方法，以便学生在计算机理论的学习和使用过程中，能更灵活地应用数学工具。

本教材具有以下五个特点。

1. 计算应用为主，推证理论为辅。本教材着重于计算能力和应用技巧的训练，省略了很多不必要的原理及结论的推导过程。例如，事件的运算律可由文氏图简单证明而得，故本教材将其证明过程略去，留给读者自行探究。

2. 紧密结合专业课程，重构知识体系。本教材与专业课紧密结合，根据专业课程对教材内容进行了一体化重构设计。全方位、多角度地调动学生的积极性，使学生深刻体会知识的形成和构建过程。例如，根据数理逻辑在计算机程序设计、程序正确性判断和自动推理系统中的应用，本教材系统介绍了数理逻辑系统的建立过程。

3. 海量实例，学练结合。本教材在介绍数学概念和定理时，利用了生动而形象的案例辅助讲解，并通过大量不同形式的例题加深印象，巩固练习，这样不仅有助于学生理解数学定理，还能培养学生利用数学方法解决实际问题的能力。例如，在介绍“通路”的概念时，使用“摆渡问题”作为例题进一步讲解，让学生对“通路”的应用产生简单而直观的认识。

4. 重点突出，便于索引。本教材对公式进行了集中整理，定义和定理显著突出，便于学生在学习过程中抓住重点，使用时也方便查找。

5. 个性贴士，一点就通。教材中插入了大量的小体例，如“注意”“思考”“说明”“规律”等，帮助学生及时梳理知识点，解决难点，抓住重点。

本书由刘琳担任主编，甘媛担任副主编，黄惠玲、吴丽娇、黄柳铃、沈焰焰、黄爱梅、周桂如、金晶晶参与编写，由张玉祥主审。本书在编写过程中参考了大量有价值的文献，在此对文献作者和资料提供者表示衷心的感谢。

由于编者水平及经验有限，教材难免存在不妥及疏漏之处，恳请读者批评指正。另外，本教材配有丰富的教学资源包，学生可登录北京金企鹅联合出版中心的网站（www.bjjqe.com）下载。

编 者

2017年12月

目 录

预备知识

0.1 三角函数和反三角函数	1
0.1.1 弧度制	1
0.1.2 三角函数	2
0.1.3 同角三角函数的关系	4
0.1.4 反三角函数	7
0.2 因式分解	8
0.2.1 提公因式法	9
0.2.2 运用公式法	10
0.2.3 十字相乘法	10
0.3 排列组合	12
0.3.1 加法原理	12
0.3.2 乘法原理	12
0.3.3 排列	12
0.3.4 组合	13
复习题 0	13

第 1 章 函数、极限与连续

1.1 函数	15
1.1.1 函数的概念	15
1.1.2 基本初等函数	16
1.1.3 复合函数	16
1.1.4 初等函数	17
习题 1.1	18
1.2 函数的极限	18
1.2.1 当 $x \rightarrow \infty$ 时的极限	18
1.2.2 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限	20
习题 1.2	21
1.3 无穷小量与无穷大量	22
1.3.1 无穷小量	22

计算机数学基础

1.3.2 无穷大量	24
1.3.3 无穷小量的比较	24
习题 1.3	26
1.4 极限的四则运算法则	26
习题 1.4	30
1.5 两个重要极限	31
1.5.1 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	31
1.5.2 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 或 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$	32
习题 1.5	34
1.6 函数的连续性	34
1.6.1 函数的连续	35
1.6.2 函数的间断	36
1.6.3 初等函数的连续性	38
1.6.4 闭区间上连续函数的性质	39
习题 1.6	40
复习题 1	40

第 2 章 导数与微分 45

2.1 导数的概念	45
2.1.1 两个实例	45
2.1.2 导数的概念	45
2.1.3 导数的几何意义	47
2.1.4 可导与连续	47
习题 2.1	48
2.2 直接求导法	48
2.2.1 基本初等函数的导数公式	48
2.2.2 导数的运算法则	49
2.2.3 反函数的导数	50
习题 2.2	51
2.3 复合函数求导法	52
习题 2.3	54
2.4 隐函数和参数方程求导法	54
2.4.1 隐函数求导法	54
2.4.2 参数方程求导法	55

习题 2.4	56
2.5 高阶导数的求法	57
习题 2.5	58
2.6 函数的微分	58
2.6.1 微分的概念	58
2.6.2 基本初等函数的微分公式与微分运算法则	59
2.6.3 微分在近似计算中的应用	60
习题 2.6	61
复习题 2	62
第 3 章 导数的应用	65
3.1 洛必达法则	65
习题 3.1	67
3.2 函数的单调性与极值	68
3.2.1 函数的单调性	68
3.2.2 函数的极值和最值	69
习题 3.2	72
3.3 曲线的凹凸性与拐点	72
习题 3.3	74
复习题 3	74
第 4 章 积分及其应用	75
4.1 不定积分的概念与性质	75
4.1.1 原函数	75
4.1.2 不定积分的概念	75
4.1.3 不定积分的性质	76
4.1.4 基本积分公式	76
习题 4.1	78
4.2 不定积分的积分方法	79
4.2.1 第一积分换元法	79
4.2.2 第二积分换元法	81
4.2.3 分部积分法	82
习题 4.2	85
4.3 定积分的概念与性质	85
4.3.1 定积分的实际背景	86

计算机数学基础

4.3.2 定积分的定义	87
4.3.3 定积分的几何意义	88
4.3.4 定积分的性质	88
习题 4.3	91
4.4 定积分的计算方法	91
4.4.1 微积分基本公式	91
4.4.2 定积分的换元法	93
4.4.3 定积分的分部积分法	95
习题 4.4	96
4.5 定积分在几何方面的应用	96
4.5.1 微元法	96
4.5.2 平面图形的面积	97
4.5.3 旋转体的体积	99
习题 4.5	101
复习题 4	101

第 5 章 矩阵与线性方程组

5.1 矩阵	103
5.1.1 矩阵的概念	103
5.1.2 特殊矩阵	104
习题 5.1	106
5.2 矩阵的基本运算	106
5.2.1 矩阵的加法	107
5.2.2 数与矩阵的乘法	108
5.2.3 矩阵与矩阵的乘法	108
5.2.4 矩阵的幂	111
5.2.5 矩阵的转置	112
5.2.6 逆矩阵	113
习题 5.2	114
5.3 矩阵的初等变换	115
5.3.1 矩阵的初等变换	115
5.3.2 用初等行变换求逆矩阵	117
5.3.3 用矩阵的初等变换求方程组的解	118
习题 5.3	121
复习题 5	122

第6章 概率论	125
6.1 随机事件与概率	125
6.1.1 随机事件	125
6.1.2 概率的古典定义	131
习题 6.1	133
6.2 概率的基本公式	135
6.2.1 概率的加法公式	135
6.2.2 条件概率公式	136
6.2.3 概率的乘法公式	137
习题 6.2	138
6.3 事件的独立性与伯努利概型	139
6.3.1 事件的独立性	139
6.3.2 伯努利概型	142
习题 6.3	143
6.4 离散型随机变量及其分布	144
6.4.1 随机变量的概念	144
6.4.2 离散型随机变量的分布	145
习题 6.4	150
6.5 连续型随机变量及其分布	151
6.5.1 概率密度函数	151
6.5.2 三种常见连续型随机变量的分布	153
习题 6.5	159
6.6 数学特征	160
6.6.1 数学期望	160
6.6.2 方差	164
习题 6.6	166
复习题 6	167
第7章 数理逻辑	170
7.1 命题及符号化	170
7.1.1 命题的概念	170
7.1.2 命题的符号化	172
习题 7.1	176

计算机数学基础

7.2 命题公式及其真值表	177
7.2.1 命题公式	177
7.2.2 命题公式的赋值及真值表	178
7.2.3 等价公式	180
7.2.4 等值演算	181
习题 7.2	184
复习题 7	184
第 8 章 图 论	186
8.1 图的基本概念	186
8.1.1 图的定义	186
8.1.2 顶点的度	187
8.1.3 完全图	189
8.1.4 图的同构	189
习题 8.1	191
8.2 图的矩阵表示	192
8.2.1 邻接矩阵	192
8.2.2 关联矩阵	194
习题 8.2	197
8.3 图的连通性	198
8.3.1 通路与回路	198
8.3.2 欧拉通路	200
8.3.3 哈密尔顿通路	203
8.3.4 带权图与最短通路	204
习题 8.3	205
复习题 8	206
附录	208
附表一 泊松分布表	208
附表二 标准正态分布函数表	211
参考答案	212

预备知识

0.1 三角函数和反三角函数

0.1.1 弧度制

1. 弧度制的定义

弧度制是另一种用来度量角度的单位制，它的单位是 rad，读作“弧度”。

定义 1 长度等于半径长的弧所对的圆心角称为 1 弧度的角。

如图 0-1 所示， $\angle AOB = 1 \text{ rad}$ ， $\angle AOC = 2 \text{ rad}$ ，周角 $= 2\pi \text{ rad}$ 。

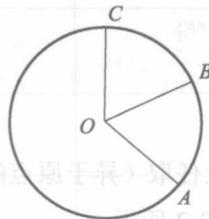


图 0-1

注意

(1) 正角的弧度数是正数，负角的弧度数是负数，零角的弧度数是 0。

(2) 角 α 的弧度数的绝对值为 $|\alpha| = \frac{l}{r}$ (l 为弧长， r 为半径)。

(3) 用角度制和弧度制来度量零角，单位不同，但数量相同（都是 0）。

(4) 用角度制和弧度制来度量任一非零角，单位不同，数量也不同。

2. 角度制与弧度制的换算

(1) $360^\circ = 2\pi \text{ rad}$ ；

(2) $180^\circ = \pi \text{ rad}$ ；

7.2 余弦公式及其变形

$$(3) 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0.01745 \text{ rad}; \quad (4) 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57.30^\circ = 57^\circ 18'.$$

例 1 把 $67^\circ 30'$ 化成弧度.

解 $67^\circ 30' = 67.5^\circ$, 所以可得

$$67^\circ 30' = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \times 67.5 = \frac{3}{8} \pi \text{ rad}.$$

例 2 把 $\frac{3}{5}\pi$ rad 化成度.

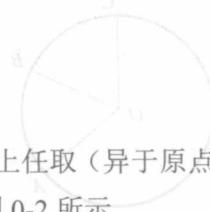
$$\text{解 } \frac{3}{5}\pi \text{ rad} = \frac{3}{5} \times 180^\circ = 108^\circ.$$



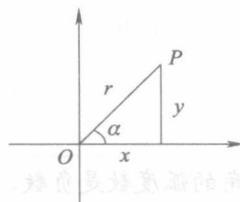
注意

今后在具体运算时, “弧度”二字和单位符号“rad”可以省略. 例如, 3 表示 3 rad , $\sin\pi$ 表示 $\pi \text{ rad}$ 角的正弦.

0.1.2 三角函数



设 α 是一个任意角, 在 α 的终边上任取 (异于原点的) 一点 $P(x, y)$, 则 P 与原点的距离为 $r = \sqrt{|x|^2 + |y|^2} = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$, 如图 0-2 所示.



(1) 比值 $\frac{y}{r}$ 称为 α 的正弦, 记作 $\sin\alpha = \frac{y}{r}$.

(2) 比值 $\frac{x}{r}$ 称为 α 的余弦, 记作 $\cos\alpha = \frac{x}{r}$.

(3) 比值 $\frac{y}{x}$ 称为 α 的正切, 记作 $\tan\alpha = \frac{y}{x}$.

(4) 比值 $\frac{x}{y}$ 称为 α 的余切, 记作 $\cot\alpha = \frac{x}{y}$.

(5) 比值 $\frac{r}{x}$ 称为 α 的正割, 记作 $\sec \alpha = \frac{r}{x} = \frac{1}{\cos \alpha}$.

(6) 比值 $\frac{r}{y}$ 称为 α 的余割, 记作 $\csc \alpha = \frac{r}{y} = \frac{1}{\sin \alpha}$.

以上六种函数统称为三角函数.

三角函数的定义域和值域见表 0-1.

表 0-1

函数	定义域	值域
$y = \sin \alpha$	\mathbb{R}	$[-1, 1]$
$y = \cos \alpha$	\mathbb{R}	$[-1, 1]$
$y = \tan \alpha$	$\{\alpha \mid \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	\mathbb{R}

特殊角的三角函数见表 0-2.

表 0-2

锐角 三角函数	30° (或 $\frac{\pi}{6}$)	45° (或 $\frac{\pi}{4}$)	60° (或 $\frac{\pi}{3}$)
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

例 3 已知 α 的终边经过点 $P(2, -3)$, 如图 0-3 所示, 求 α 的六个三角函数值.

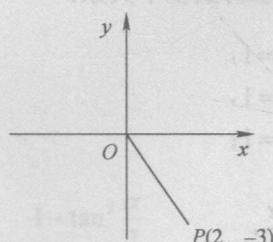


图 0-3

解 $x = 2$, $y = -3$, $r = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$.

所以

$$\sin \alpha = -\frac{3\sqrt{13}}{13}, \quad \cos \alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13},$$

$$\tan \alpha = -\frac{3}{2}, \quad \cot \alpha = -\frac{2}{3},$$

$$\sec \alpha = \frac{\sqrt{13}}{2}, \quad \csc \alpha = -\frac{\sqrt{13}}{3}.$$

例 4 (1) 已知角 α 的终边经过 $P(4, -3)$, 求 $2\sin \alpha + \cos \alpha$ 的值.

(2) 已知角 α 的终边经过 $P(4a, -3a)$ ($a \neq 0$), 求 $2\sin \alpha + \cos \alpha$ 的值.

解 (1) 由定义可得 $r=5$, $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, 所以可得

$$2\sin \alpha + \cos \alpha = -\frac{2}{5}.$$

(2) 若 $a > 0$, $r=5a$, 则 $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, 所以可得

$$2\sin \alpha + \cos \alpha = -\frac{2}{5}.$$

若 $a < 0$, $r=-5a$, 则 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$, 所以可得

$$2\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{2}{5}.$$

0.1.3 同角三角函数的关系

1. 一般关系

由三角函数的定义, 我们可以得到以下关系:

$$(1) \text{ 倒数关系} \begin{cases} \sin \alpha \cdot \csc \alpha = 1, \\ \cos \alpha \cdot \sec \alpha = 1, \\ \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1; \end{cases}$$

$$(2) \text{ 商数关系} \begin{cases} \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \\ \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}; \end{cases}$$

$$(3) \text{ 平方关系} \begin{cases} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \\ 1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha, \\ 1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha. \end{cases}$$

2. 三角函数的诱导公式

1) 诱导公式(一)

$$\sin(k \cdot 2\pi + \alpha) = \sin \alpha; \quad \cos(k \cdot 2\pi + \alpha) = \cos \alpha; \quad \tan(k \cdot 2\pi + \alpha) = \tan \alpha \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

2) 诱导公式(二)

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha; \quad \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha; \quad \tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha;$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha; \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha; \quad \tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha.$$

3) 诱导公式(三)

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha; \quad \cos(-\alpha) = \cos \alpha; \quad \tan(-\alpha) = -\tan \alpha.$$

3. 两角和、差的正弦、余弦、正切

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta;$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta;$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta;$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta;$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta};$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}.$$

4. 二倍角的正弦、余弦、正切

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha;$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha};$$

$$\cot 2\alpha = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}.$$

5. 万能公式

$$\sin \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}};$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}};$$

$$\tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

6. 和差化积和积化和差

1) 和差化积

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

2) 积化和差

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)];$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)];$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)];$$

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)].$$

例 5 已知 $\sin \alpha - \cos \alpha = -\frac{5}{4}$, 求 $\sin \alpha \cos \alpha$ 的值.

解 $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \frac{25}{16}$, 即 $1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{25}{16}$, 所以

$$\sin \alpha \cos \alpha = -\frac{9}{32}.$$

例 6 计算 $\sin 315^\circ - \sin(-480^\circ) + \cos(-330^\circ)$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \text{原式} &= \sin(360^\circ - 45^\circ) + \sin(360^\circ + 120^\circ) + \cos(-360^\circ + 30^\circ) \\ &= -\sin 45^\circ + \sin 60^\circ + \cos 30^\circ \end{aligned}$$

$$= \sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例 7 计算下列各式的值.

$$(1) \cos 105^\circ; \quad (2) \cos 15^\circ; \quad (3) \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{3\pi}{10} - \sin \frac{\pi}{5} \sin \frac{3\pi}{10}.$$

解 (1) $\cos 105^\circ = \cos(60^\circ + 45^\circ) = \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}.$$

$$(2) \cos 15^\circ = \cos(60^\circ - 45^\circ) = \cos 60^\circ \cos 45^\circ + \sin 60^\circ \sin 45^\circ$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}. \end{aligned}$$

$$(3) \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{3\pi}{10} - \sin \frac{\pi}{5} \sin \frac{3\pi}{10} = \cos \left(\frac{\pi}{5} + \frac{3\pi}{10} \right) = \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$