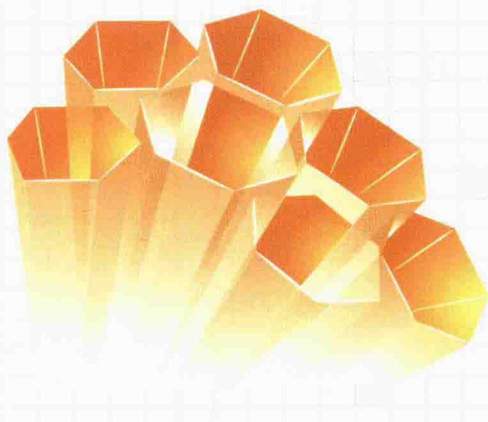
教育部“用信息技术工具改造基础课程”项目
信息环境下大学数学课程改革系列教材
高等学校应用型创新型人才培养系列教材

线性代数及应用

（理工类）

高淑萍　马建荣　张鹏鸽　杨威　编著



西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

教育部“用信息技术工具改

信息环境下大学数学课程改革系列教材

高等学校应用型创新型人才培养系列教材

线性代数及应用(理工类)

高淑萍　马建荣
张鹏鸽　杨　威　编著

西安电子科技大学出版社

内 容 简 介

本书是依托教育部“用信息技术工具改造基础课程”项目中的“用 MATLAB 和建模实践改造线性代数课程”的研究成果，结合作者多年的教学实践编写而成。该成果获陕西省高等学校教学成果一等奖。

本书针对线性代数抽象难学的问题，注重概念定理的几何意义及应用背景的诠释，重点突出，难点分散。注重培养学生的数学建模应用与科学计算的能力，以适应信息时代创新型应用型人才培养的需要。

本书内容包括矩阵及应用、n 维向量与向量空间、行列式与线性方程组、相似矩阵与二次型、线性空间与线性变换及丰富的实际应用案例，各章配有习题及解答。特别地，每章配有教学视频(重点难点讲授、典型例题、知识的补充与扩展、应用案例等)。与本书配套的还有“线性代数在线作业与测试系统”、“线性代数学习 APP”及《线性代数疑难释义》(西安电子科技大学出版社)辅导书。

本书及配套的学习资源构成了适应信息时代学生的综合学习平台。

本书可作为高等院校理工类教材或参考书，尤其适合以创新应用型人才为培养目标的高等院校，也可供自学者和科技工作者阅读。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数及应用/高淑萍等编著.
—西安：西安电子科技大学出版社，2017.2(2017.8 重印)
ISBN 978-7-5606-2766-3

Ⅰ.① 线… Ⅱ.① 高… Ⅲ.① 线性代数 Ⅳ.① O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 035050 号

策　　划　毛红兵
责任编辑　毛红兵
出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路 2 号)
电　　话　(029)88242885　88201467　　邮　　编　710071
网　　址　//www.xduph.com　　电子邮箱　xdupfxb001@163.com
经　　销　新华书店
印刷单位　虎彩印艺股份有限公司
版　　次　2017 年 2 月第 1 版　2017 年 8 月第 2 次印刷
开　　本　787 毫米×1092 毫米　1/16　印张 14.25
字　　数　350 千字
定　　价　37.00 元
ISBN 978-7-5606-2766-3/O·0127

XDUP 3058001-2

前　　言

一、信息时代为大学数学改革提供了新机遇

2009年教育部数学教指委重新修订后的大学数学基础课程教学基本要求："数学不仅是一种工具，而且是一种思维模式；不仅是一种知识，而且是一种素养；不仅是一种科学，而且是一种文化，能否运用数学观念定量思维是衡量民族科学文化素质的一个重要标志。数学教育在培养高素质科学技术人才中具有独特的、不可替代的重要作用。"提出了"知识、素质、能力"三位一体的教育理念。

大学数学教育是培养学生科学素质与创新能力的关键环节。改革是永恒的话题，信息化为教学改革提供了难得的机遇。随着计算机的迅猛发展，对大规模海量数据进行处理的需求日益剧增，因此对理工、经管各专业的线性代数课程的传统教学内容、教学方法等提出了挑战。面对需求的巨大变化，美国的线性代数课程从1990年起发生了革命性的变革，其主要特征是使用软件和面向应用。

正是在这样的背景下，西安电子科技大学项目组(本书的作者)在原副校长陈怀琛教授倡导下，从2004年起高度关注国外线性代数课程改革的研究动态，研读了大量的国外优秀原版教材和教学改革论著，进行了线性代数在后续课程的应用调研工作，对线性代数课程教学内容、教学方法、考核方式、教材建设等方面进行了多年改革试探索与实践。2009年教育部设立教育教学专项"用信息技术工具改造基础课程"，西安电子科技大学主持(也称牵头院校)"用MATLAB和建模实践改造工科线性代数课程"项目(数学类全国仅此一项)。按照教育部的要求，为使项目的研究成果具有更好的示范性和辐射性，特从理工、综合、财经、师范类中遴选出18所合作院校：西安交通大学、东南大学、北京航空航天大学、华南理工大学、东北大学、哈尔滨工程大学、西北大学、对外经济贸易大学、陕西师范大学、桂林电子科技大学、福建师范大学、西安理工大学、西安科技大学、西安石油大学、陕西理工学院等共同进行线性代数课程改革的探索，取得了突出的示范性与辐射性成果，为我国线性代数课程的改革与其他大学数学课程的改革提供借鉴。

二、新教学目标下的大学数学系列教材的编著

目前高校大学数学课程教材中存在不适应问题。主要表现在：理论内容呈现几十年、甚至上百年的一贯制；课程内容未能适应新的社会需求，重理论轻实践，与时代与应用需求脱节；剥离了概念、原理和范例的几何背景与现实意义，导致内容过于抽象；不利于与其他课程及学生自身专业的衔接，进而造成了学生"学不会，用不了"的尴尬局面。教育部数

学基础课程教指委分委原主任清华大学数学系冯克勤教授指出："数学教育的关键是彻底转变观念。大学数学教育改革的目标一是深化教学内容和教材体系的改革，二是积极推进大学数学教育的信息化建设。"因此，信息时代大学数学教育培养新目标下的新型教材建设迫在眉睫，用信息技术工具改革大学数学课程系列教材应运而生，"需求牵引"和"技术推动"是该系列教材的指导思想。

本书作者总结了十多年线性代数改革取得的经验和成果，吸取国外同类优秀教材之长，编著了高等学校理工类《线性代数及应用》创新型教材，以适应信息化背景下创新型应用型科技与工程人才的需要。

三、本书特色

本书及配套的学习资源构成了适应于信息时代学生的综合学习平台。

(1) 将数学建模、丰富的应用案例、数学软件融入线性代数课程内容。

(2) 与传统内容相比，增加了矛盾线性方程组(即超定线性方程组)的最小二乘解，给出了常见的矩阵分解方法等，满足后续专业课程需求，对主要的术语给出了英文表示，方便学生阅读外文教材。

(3) 每章配有教学视频(微课)，其内容包括重点难点讲授、典型例题、数学发展史简介、知识的补充与扩展、应用案例等，方便学生适时学习。

(4) 注重学习过程的考核与管理，研发了"线性代数在线作业与测试系统"，实现了章节在线考核、系统自动阅卷并进行试卷分析。

(5) 配套辅导书《线性代数疑难释义》从不同角度讲授了线性代数的重点、难点。

(6) 自主研发的"线性代数学习 APP"(for android 及 for iphone，已获两项软件著作权)便于学生在手机上随时学习。

目前"线性代数在线作业与测试系统"只针对西安电子科技大学本校学生使用。其他院校若有需求，请与西安电子科技大学出版社联系。

在《线性代数及应用》成书之际，诚挚感谢我校领导、教务处多年来对线性代数课题组的大力支持与指导！对西安电子科技大学出版社领导及毛红兵编辑给予的支持与帮助表示衷心感谢！

本书由西安电子科技大学高淑萍教授、马建荣教授、张鹏鸽副教授、杨威副教授编著，由高淑萍教授统稿。

限于编者水平，书中难免存在不足之处，恳请读者批评指正。

作者
2016 年 12 月

目　录

第 1 章

矩阵及应用

矩阵是线性代数的主要研究对象之一，它在自然科学、工程技术、经济管理、社会科学等各领域都具有广泛的应用. 本章从实际问题出发，引出矩阵的概念，并讨论矩阵的各种运算及一般线性方程组的求解问题.

1.1 高斯消元法

引例 某食品公司收到某种食品的订单，要求该食品是由甲、乙、丙、丁四种原料合成，且该食品中含蛋白质、脂肪和碳水化合物的比例分别为 15%、5% 和 12%. 其中甲、乙、丙、丁原料中含蛋白质、脂肪和碳水化合物的百分比由表 1.1 给出.

表 1.1 原料成分

	甲	乙	丙	丁	成品
蛋白质(%)	20	16	10	15	15
脂肪(%)	3	8	2	5	5
碳水化合物(%)	10	25	20	5	12

那么，如何用这四种原料配置出符合要求的食品呢?

分析：设所需要的原料甲、乙、丙、丁占食品的百分比分别为 x_1，x_2，x_3，x_4，根据题意可以得到方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 20x_1 + 16x_2 + 10x_3 + 15x_4 = 15 \\ 3x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 5 \\ 10x_1 + 25x_2 + 20x_3 + 5x_4 = 12 \end{cases} \tag{1-1}$$

在方程组(1-1)中每一个方程的左端是未知量 x_1，x_2，x_3，x_4 的一次齐次式，右端是常数，这样的方程组称为**线性方程组**(linear equations).

关于线性方程组解的情况，可以通过图 1.1 来表述.

方程组(1-1)如何求解? 在此，不妨以 m 个方程 n 个未知量的线性方程组为例进行讨论. 设 m 个方程 n 个未知量的线性方程组的一般形式如下：

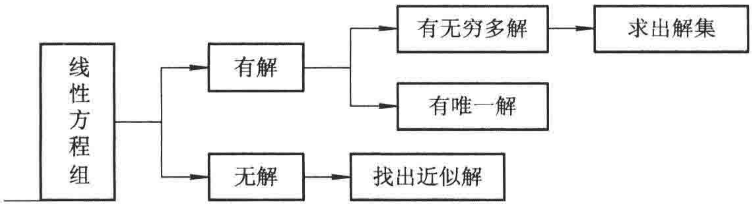


图 1.1 线性方程组解

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1-2}$$

式(1－2)称为 **n 元线性方程组**(linear equations in n unknowns)，其中 x_1，x_2，…，x_n 是未知量；m 是方程个数；a_{ij}($i=1$, 2, …, m; $j=1$, 2, …, n)称为方程组的系数；b_j($j=1$, 2, …, m)称为方程组的常数项. 系数 a_{ij} 的第一个下标表示它在第 i 个方程；第二个下标 j 表示它是未知量 x_j 的系数. 一般情况下，n 与 m 不一定相等.

线性方程组(1－2)中解的全体构成的集合称为解集合. 解方程组就是求其全部解，亦即求出解集合. 如果两个方程组有相同的解集合，则称它们**同解**.

在中学已讲到了用消元法(也称高斯消元法)求解线性方程组. 消元法的基本思想是：通过消元变换把方程组化为容易求解的同解方程组. 下面通过一个例子来复习消元法.

例 求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 \qquad\quad + 6x_4 = -2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -2 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 8x_4 = 2 \end{cases} \tag{1-3}$$

解 将式(1－3)中的第一个方程两端分别乘以－1、－1.5、－0.5，加到第二、三、四个方程，从而可消去第二、三、四个方程中的未知量 x_1，得

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + \qquad + 6x_4 = -2 \\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + 5x_3 = 3 \end{cases} \tag{1-4}$$

将式(1－4)中的第二个方程两端分别乘以－2，加到第三、四个方程中可消去 x_2，得

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 \qquad\quad + 6x_4 = -2 \\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ - x_4 = 0 \\ -3x_3 + 9x_4 = 3 \end{cases} \tag{1-5}$$

把式(1－5)中第三个方程和第四个方程交换位置，得

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \qquad + 6x_4 = -2 \\ \qquad x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ \qquad\quad -3x_3 + 9x_4 = 3 \\ \qquad\qquad\quad -x_4 = 0 \end{cases} \tag{1-6}$$

形如(1－6)的方程组称为**行阶梯形方程组**(row-echelon form equations). 再将式(1－6)中第一个方程两端乘以0.5，第三个方程两端乘以$-\frac{1}{3}$，第四个方程两端乘以-1，得到下面的行阶梯形方程组：

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \qquad + 3x_4 = -1 \\ \qquad x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ \qquad\qquad x_3 - 3x_4 = -1 \\ \qquad\qquad\qquad x_4 = 0 \end{cases} \tag{1-7}$$

综上，方程组(1－7)是对原方程组(1－3)施行下列三种变换而得到的：

(1) 互换两个方程的位置；

(2) 某个方程两端乘以一个非零常数；

(3) 将一个方程的k倍加到另一个方程上.

这三种变换称为线性方程组的初等行变换或称为线性方程组的同解变换. 因为对方程组而言，这些变换不会改变方程组的解，故方程组(1－7)与原方程组(1－3)同解. 这三种变换也称为线性方程组的**同解变换**.

进一步对方程组(1－7)进行回代：由(1－7)中第四个方程知$x_4=0$，将其回代到第三个方程得$x_3=-1$，再将x_4，x_3回代到第二、第一方程中，分别得$x_2=2$，$x_1=1$. 所以，原方程组(1－3)的解为

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad = 1 \\ \quad x_2 \qquad\quad = 2 \\ \qquad x_3 \qquad = -1 \\ \qquad\quad x_4 = 0 \end{cases} \tag{1-8}$$

这样的方程组称为最简阶梯形方程组，得到它就等于求出了方程组的解.

从上述解题过程可以看出，用高斯消元法解线性方程组可分为两步：① 经过若干次初等行变换后得到一个阶梯形方程组；② 用回代法由后向前逐次求出各个未知量.

1.2 矩阵的概念及运算

例1 某车间有三个工作小组，他们在去年四个季度的产量如表1.2所示.

表 1.2　产量统计(单位：台)

	第一季度	第二季度	第三季度	第四季度
第一组	0	200	400	550
第二组	300	150	300	280
第三组	400	300	150	360

我们可以把表 1.2 简化成一个 3 行 4 列的矩形数表，为了表明它的整体性，常给它加一对括号，如下所示，其中第 i 行表示第 i 组，第 j 列表示第 j 季度的产量.

$$\begin{bmatrix} 0 & 200 & 400 & 550 \\ 300 & 150 & 300 & 280 \\ 400 & 300 & 150 & 360 \end{bmatrix}$$

同样，将 1.1 节例 1 的线性方程组(1 - 3)中的系数和常数“提取”出来可写成数表

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 6 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 4 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

于是，我们就可以通过该数表来研究线性方程组.

以上讨论的各种矩形数表就称为矩阵. 学习线性代数的目标之一就是要学会利用矩阵这个工具去解决各种问题.

1.2.1　矩阵的定义

定义 1.1　由 $m \times n$ 个数 a_{ij} $(i=1, 2, \cdots, m\ ;\ j=1, 2, \cdots, n)$ 排成的 m 行 n 列的矩形数表

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为 m 行 n 列**矩阵**($m \times n$ matrix)，简称 $m \times n$ 矩阵，通常用大写字母 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，…或 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}_{m\times n}$，$\boldsymbol{C}_{m\times n}$，…来表示，也记作 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$. a_{ij} 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素，表示位于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列的元素. 元素全是实数的矩阵称为实矩阵；元素全为复数的矩阵称为复矩阵.

如例 1 中产量统计表是 3×4 矩阵. 矩阵这一概念是由 19 世纪英国数学家凯利首先提出的.

1.2.2　几种特殊矩阵

下面我们介绍几种常见的特殊矩阵.

只有一行的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{bmatrix}$$

称为**行矩阵**(row matrix)，又称为**行向量**(row vector)，为避免元素间混淆，行向量常常记为

$$\boldsymbol{A}=[a_1, a_2, \cdots, a_n]$$

只有一列的矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix}$$

称为**列矩阵**(column matrix)，又称为**列向量**(column vector).

如果两个矩阵的行数与列数对应相等，则称它们为同型矩阵.

若 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 是同型矩阵，且所有对应元素值均相等，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **相等**，记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

元素都是零的矩阵称为**零矩阵**(zero matrix)，记作 $\boldsymbol{O}$.

行数与列数相同的矩阵 $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ 称为 ***n* 阶矩阵**($(n\times n)$ matrix)，或称为 ***n* 阶方阵**($(n\times n)$ square matrix)，简记为 $\boldsymbol{A}_n$. 一个 n 阶方阵的左上角与右下角之间的连线称为它的主对角线.

主对角线以下的元素全为零的方阵称为**上三角矩阵**(upper triangular matrix)，即

$$\boldsymbol{A}_n=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

主对角线以上的元素全为零的方阵称为**下三角矩阵**(lower triangular matrix)，即

$$\boldsymbol{A}_n=\begin{bmatrix}a_{11} & 0 & \cdots & 0\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

主对角线以外的元素全为零的方阵称为**对角阵**(diagonal matrix)，即

$$\boldsymbol{A}_n=\begin{bmatrix}a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}\end{bmatrix}$$

矩阵中未写出的元素表示为零，对角矩阵常记为 $\boldsymbol{\Lambda}$ 或 $diag(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$. 主对角线上全为 1 的 n 阶对角矩阵称为**单位矩阵**(unit matrix)，记作 $\boldsymbol{E}_n$，即

$$E_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

从 1.1 节例 1 的求解过程中可以看出，利用方程组的初等变换进行消元时，只是对方程组的系数和常数项进行运算，所以我们可以把线性方程组的系数和常数项“提取”出来，用矩阵的形式来描述线性方程组，这样线性方程组就与矩阵一一对应起来.

线性方程组所有系数所构成的矩阵称为线性方程组的**系数矩阵**(coefficient matrix). 如线性方程组(1-3)的系数矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

由线性方程组所有系数和常数项所构成的矩阵称为线性方程组的**增广矩阵**(augmented matrix)，并记为$\widetilde{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$或$\widetilde{\boldsymbol{A}}=[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}]$，它可以反映出线性方程组的全部特性. 如线性方程组(1-3)的增广矩阵为

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} = [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}] = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 6 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 4 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

其中最后一列 $\boldsymbol{b}$ 表示常数项，也称 $\boldsymbol{b}$ 为常向量.

1.2.3 矩阵的运算

定义 1.2 设有两个同型矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和(sum)，记作 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，规定：

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

若 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，把$(-a_{ij})_{m\times n}$记作$-\boldsymbol{A}$，称为 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵. 显然有 $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$.

由此可定义矩阵的减法为：$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$.

定义 1.3 数 λ 与矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$的乘积，简称**数乘**(scalar-multiplication)，记作 $\lambda\boldsymbol{A}$，规定

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

矩阵的**加法**(addition)和**数乘**统称为矩阵的**线性运算**(linear operation). 不难验证，矩阵的线性运算满足下列运算规律($\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 是同型矩阵，λ、μ 是数).

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$;

(3) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$;

(4) $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$;

(5) $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$;

(6) $(\lambda\mu)\boldsymbol{A}=\lambda(\mu\boldsymbol{A})=\mu(\lambda\boldsymbol{A})$;

(7) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$;

(8) $\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$.

例 2 甲、乙、丙三位学生在期末考试中，4 门课程的成绩分别由表 1.3 给出，而他们的平时成绩则由表 1.4 给出，若期末考试成绩占总成绩的 90%，而平时成绩占 10%，请用矩阵运算来表述这三名同学的各门课程的总成绩.

表 1.3 期末考试成绩

	英语	高数	大物	线代
甲	85	85	65	98
乙	75	95	70	95
丙	80	70	76	92

表 1.4 平时成绩

	英语	高数	大物	线代
甲	90	70	80	92
乙	80	90	82	92
丙	85	75	90	90

解 用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 来表示期末成绩:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 85 & 85 & 65 & 98 \\ 75 & 95 & 70 & 95 \\ 80 & 70 & 76 & 92 \end{bmatrix}$$

用矩阵 $\boldsymbol{B}$ 来表示平时成绩:

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 90 & 70 & 80 & 92 \\ 80 & 90 & 82 & 92 \\ 85 & 75 & 90 & 90 \end{bmatrix}$$

根据题意知，三名同学的总成绩可以用矩阵 $\boldsymbol{C}$ 来表示，具体运算如下：

$$\boldsymbol{C}=0.9\boldsymbol{A}+0.1\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}85\times0.9 & 85\times0.9 & 65\times0.9 & 98\times0.9\\ 75\times0.9 & 95\times0.9 & 70\times0.9 & 95\times0.9\\ 80\times0.9 & 70\times0.9 & 76\times0.9 & 92\times0.9\end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix}90\times0.1 & 70\times0.1 & 80\times0.1 & 92\times0.1\\ 80\times0.1 & 90\times0.1 & 82\times0.1 & 92\times0.1\\ 85\times0.1 & 75\times0.1 & 90\times0.1 & 90\times0.1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}85.5 & 83.5 & 66.5 & 97.4\\ 75.5 & 94.5 & 71.2 & 94.7\\ 80.5 & 70.5 & 77.4 & 91.8\end{bmatrix}$$

从矩阵 $\boldsymbol{C}$ 中第一行可知学生甲的英语、高数、大物、线代的总成绩分别为 85.5，83.5，66.5，97.4 分.

定义 1.4 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$ 阵，矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$，规定 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的**乘积**(matrix multiplication)是一个 $m\times n$ 矩阵，记为 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$，其中

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}$$
$$(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$$

记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$.

由定义 1.4 知，**只有左边矩阵的列数等于右边矩阵的行数时，两个矩阵才能相乘**. 乘积矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的第 i 行第 j 列元素 c_{ij} 等于左边矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行元素与右边矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列元素对应乘积之和，即

$$\boldsymbol{AB}=i\text{行}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{is}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms}\end{bmatrix}\begin{array}{c} j\text{列}\\ \begin{bmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ b_{s1} & \cdots & b_{sj} & \cdots & s_{sn}\end{bmatrix}\end{array}$$

$$=\begin{array}{c} j\text{列}\\ \begin{bmatrix}c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ c_{i1} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{in}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ c_{m1} & \cdots & c_{mj} & \vdots & c_{mn}\end{bmatrix}\end{array} i\text{行}=\boldsymbol{C}$$

例 3 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 4 & 0\\ -2 & 5 & 6\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}10 & 20\\ -10 & 30\\ -5 & 8\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$ 及 $\boldsymbol{BA}$.

解 根据矩阵乘法定义：

$$AB=\begin{bmatrix}1&2&-1\\3&4&0\\-2&5&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10&20\\-10&30\\-5&8\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1\times10+2\times(-10)+(-1)\times(-5)&1\times20+2\times30+(-1)\times8\\3\times10+4\times(-10)+0\times(-5)&3\times20+4\times30+0\times8\\(-2)\times10+5\times(-10)+6\times(-5)&(-2)\times20+5\times30+6\times8\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-5&72\\-10&180\\-100&158\end{bmatrix}$$

由于矩阵 $\boldsymbol{B}$ 有 2 列，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 3 行，所以 $\boldsymbol{BA}$ 无意义.

例 4 已知 $\boldsymbol{A}=[1,2,3]$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$ 及 $\boldsymbol{BA}$.

解

$$AB=[1,2,3]\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}=1\times4+2\times5+3\times6=32$$

当矩阵只有一行一列时，我们往往省去括号，即可以理解为一个数.

$$BA=\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}[1,2,3]=\begin{bmatrix}4&8&12\\5&10&15\\6&12&18\end{bmatrix}$$

由例 3、例 4 可知，$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$. 在一般情况下，下式也不成立。

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2\neq\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$$

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\neq\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$$

根据矩阵乘法定义，可以定义方阵的方幂：$\boldsymbol{A}^k=\underbrace{\boldsymbol{AA}\cdots\boldsymbol{A}}_{k\text{个}}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 为方阵.

可以验证，矩阵乘法满足下列运算规律：

(1) $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$；

(2) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$ ；

(3) $\lambda(\boldsymbol{AB})=(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$，$\lambda$ 为数；

(4) $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n}$；

(5) $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{k+l}$，$(\boldsymbol{A}^k)^l=\boldsymbol{A}^{kl}$，其中 k，l 为正整数.

注意，由于矩阵乘法不满足交换律，故一般情况下，$(\boldsymbol{AB})^k\neq\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$.

定义 1.5 对于变量 y_1，y_2，…，y_m，若它们均能由变量 x_1，x_2，…，x_n 线性表示，即有：