新版

万学教育 海文考研

考研数学

线性代数高分解码

（题型篇）

主　编：丁勇

副主编：邬丽丽　李兰巧　全忠

科学分解备考时间，合理规划复习进程
基础阶段重理论，夯实基础知识
强化阶段练题型，培养解题能力
循序渐进，轻松探求高分密码

中国政法大学出版社

新版

万学教育 海文考研

考研数学
线性代数高分解码
（题型篇）

主　编：丁勇
副主编：邬丽丽　李兰巧　全忠

中国政法大学出版社
2018·北京

图书在版编目（CIP）数据

考研数学线性代数高分解码/丁勇主编. —北京：中国政法大学出版社，2018.9
ISBN 978-7-5620-8568-3

Ⅰ.①考… Ⅱ.①丁… Ⅲ.①线性代数—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 219372 号

出版者　中国政法大学出版社
地　址　北京市海淀区西土城路 25 号
邮寄地址　北京 100088 信箱 8034 分箱　邮编 100088
网　址　http://www.cuplpress.com（网络实名：中国政法大学出版社）
电　话　010-58908285(总编室)　58908433（编辑部）58908334(邮购部)
承　印　三河市德利印刷有限公司
开　本　787mm×1092mm　1/16
印　张　21
字　数　310 千字
版　次　2018 年 9 月第 1 版
印　次　2018 年 9 月第 1 次印刷
定　价　49.80 元

前言

硕士研究生招生考试是具有选拔性质的较高水平考试，采用的是优胜劣汰的录取方式。为此，考试真题既要有难度又要有区分度，而考研数学试题这种特征尤为明显。本书作者辅导考研数学数十载，同样的辅导，既有大量学员达到140以上，也有少数低于70分，天壤之别缘由何在？是运气不好？是方法不对？为此我们需要探讨考研数学的得分之道，以下内容将为考生揭开考研数学高分的“神秘面纱”。

一、系统复习、夯实基础

研究生招生考试数学试题中，有80%左右的试题是直接考查“基本概念、基本理论和基本方法”，基本概念比如“导数、积分、间断点、渐近线的概念”等，基本理论比如“极限的保号性、”“等价无穷小替换定理”等，基本运算比如“求极限、求导、行列式的运算、求概率”等。有些年份甚至直接考查课本上的公式、定理的证明，比如2015年考研考查$(uv)'=u'v+uv'$的证明。

考生只要了解相应的概念，具备基本运算能力，就可以把相应试题做出来。但现实是很多考生不屑于复习这些基础知识，认为考研试题应该难度很大，所以常常找一些偏题、怪题进行训练，还自我感觉良好，如果万一考了，自己会做，别人不会做，就可以得高分。最后结果往往适得其反。所以在复习的基础阶段，一定要狠抓基础，全面复习。

当然重视基础，不是只是背诵课本上的基本概念、基本理论和基本方法，要做到不仅要知其然，还要知其所以然，同时还要掌握在考研试题中如何考查，命题方式有哪些，等等。

考研数学考查非常全面，所以只要是考试大纲要求的内容都要复习到，特别是在基础阶段，不能有所取舍，数学一试卷中每年有大量的低频考点，比如梯度、散度、曲面切平面、法线、傅里叶级数，等等，这些内容经常是五年或十年甚至更多更久才考一次，虽然试题难度不大，但是每年有大量考生在这些考点上失分，主要源于犯了机会主义错误，认为自己运气不会那么差刚好考到，最后悔之晚矣。

二、归纳题型、总结方法

如果把历年考研数学试题进行比较，并作深入细致的分析研究，再对照教育部制定的历年(考研)考试大纲，就会发现，虽说数学试题表述形式千变万化，但万变不离其宗。这个宗就是学科的核心内容，说得具体一点就是诸如高等数学求函数、数列极限、求极值、积分上限函数求导、证明不等式、计算二重积分、幂级数求和等；线性代数的解含参数的线性方程组、向量的线性相关性、矩阵的相似对角化；概率统计的求随机变量函数的分布、数值特征、矩估计、极大似然估计等典型题型。如果你不被试题五光十色的包装所迷惑，而能洞察其实质——题型，就有可能知道该用哪把钥匙去开门。

所以考生在复习的强化阶段，一定要系统总结每个章节有哪些常考的题型，这些题型有哪些解法，比如要证明数列极限存在，要想到用单调有界准则，出现常数不等式，要想到常数变易法，最后做到看到什么题型马上就有固定的解法。就像拍电视剧，男主角掉到山崖，一般都会挂到树上，一定会有一个世外高人救了他。

同时考研试题中有一些条件，有固定的结论，比如一般出现$f(b)-f(a)$要用拉格朗日中值定理；出现了高阶导数要用泰勒定理；出现$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$要用；出现了$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=1$要想到特征值的结论；等等。这些都是一些固定套路，虽然生活中要少一些套路，多一些诚意，但是考研试题中还是会有很多固定的解题思路，本书正文会给考生进行系统总结。

三、科学规划、戒骄戒躁

考研数学的复习是一个漫长、系统、宏伟的工程，年轻的考生不缺乏激情、不缺乏信心、不缺乏为了未来而奋斗的勇气，但是缺乏约束力，往往复习内容的多少和心情指数成正比，心情好多复习一点，心情

不好干脆就不复习了。这种三天打鱼，两天晒网的复习节奏，是不会修成正果的，要想拿下考研数学这座山头，需要考生制定一个合理的复习规划。要做一个科学的、可执行的学习计划，计划不能太过详细，有同学甚至规定早上 7 点起床，五分钟刷牙，一分钟洗脸，两分钟上厕所，这种计划不具有可操作性。

本书正是基于以上的考虑，分为认知篇和题型篇。

认知篇注重呈现考研数学的基本概念，基本理论和基本方法。

题型篇重在将考研数学中常见的题型进行归纳、总结，旨在认知篇的基础上帮助考生掌握常考题型，提高解题能力。

下面我根据多年参与考研辅导的经验，给考生制定一个学习计划的框架，具体的可以根据自身的特点自我调整。

一、基础阶段

1. 时间：Now—6 月

2. 目标：系统复习、夯实基础

通过基础阶段的复习，一方面打好基础，拿到考研数学的基础分，同时为后期强化阶段题型的复习打好基础

3. 用书：

(1)《考研数学高分解码》(认知篇)；(2)《考研数学基础必做 660 题》；

(3)《考研数学真题大解析》(珍藏版)。

二、强化阶段

1. 时间：7—9 月

2. 目标：归纳题型、总结方法

在这三个月里，要归纳考研数学常考题型，同时总结解题方法和解题技巧，最后要做到看到题就知道方法是什么。

3. 用书：

(1)《考研数学高分解码》(题型篇)；(2)《考研数学强化必做 660 题》。

三、冲刺阶段

1. 时间：10 月—考前

2. 目标：查漏补缺、实战演练

通过上一阶段的复习，考生对重要知识、常见题型的做题方法进行了归纳，接下来要通过真题和模拟题将这些知识和做题方法进行融会贯通的使用，同时通过做模拟题，一方面查漏补缺，看自己还有哪些地方不会，另一方面，要养成良好的做题习惯：限定时间和做题顺序等以培养应试技巧。

3. 用书：

(1)《考研数学真题大解析》(标准版)；(2)《考研数学最后成功 8 套题》。

特别提示 本书适合数学一、数学二、数学三及数农考生使用，对于仅针对数学一至三个别卷种适用的章节，书中分别以上标“①”、“②”、“③”表示，数农考生可参考数学三的适用范围。书中收入了部分考研真题，对真题，在题号后以“年份[卷种]”的形式表示，如选自 2011 年数学一的真题表示为“2011[1]”。本书中涉及的符号力求与教育部考试中心发布的最新大纲及使用最广泛的高校教材保持一致，便于读者识别。

数学知识要积累，对数学的理解更要有一个循序渐进的过程，对立志考研的读者要说：凡事预则立，不预则废。

限于水平，撰写中难免出现差错，殷切希望读者不吝赐教，多多指正。

编者

于北京

目　录

第一章　行列式

名师解码

重点题型详解

题型一　数字型行列式的计算

题型 1.1　计算“两线一星”行列式

解题策略

形如 

 的行列式称为“两线一星”行列式，其特点是非零元素主要在两条平行线上．可采用降阶法进行计算，利用行列式按行(列）展开定理直接展开即可．

【例 1】 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}=$ ________.

【思路】 “两线一星”行列式，可采用降阶法进行计算，利用行列式展开定理按第一列直接展开即可．

【解】 按第一列展开：

$$D_n=a_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}+b_n(-1)^{1+n}\begin{vmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=a_1a_2\cdots a_n+(-1)^{1+n}b_1b_2\cdots b_n.$$

【例 2】 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & b \\ b & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b & a \end{vmatrix}=$ ________.

【解】 此 n 阶行列式第一行的 n 个元素中只有两个非零元素,所以将所给行列式按第一行展开,得

$$D=a\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b & a \end{vmatrix}+(-1)^{n+1}b\begin{vmatrix} b & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b & a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b \end{vmatrix}$$

$$=a\cdot a^{n-1}+(-1)^{n+1}b\cdot b^{n-1}=a^n+(-1)^{n+1}b^n.$$

评注 本题考查用行列式的展开定理计算行列式的方法.所求行列式的第一行只有 2 个非零元系:$a_{11}=a$,$a_{1n}=b$,且 a_{11} 的余子式是下三角形行列式,a_{1n} 的余子式是上三角形行列式,所以此行列式按照第一行展开即可.

★ 题型 1.2 计算范德蒙行列式

解题策略

n 阶范德蒙行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$ 的特点是:其每列元素 $1,x_i,x_i^2,\cdots,x_i^{n-1}$ 按 x_i 的升幂排列,构成一个等比数列,并且第二行的元素 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 分别为每列元素的公比,且第一行元素为1.范德蒙行列式的值为 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)=(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)\cdots(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})$.

【例 3】 计算四阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \\ 9 & 8 & 7 & 6 \end{vmatrix}$.

【思路】 利用行列式性质转化为范德蒙行列式.

【解】 将第一行加到第四行,并提出公因子 10,得

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \\ 9 & 8 & 7 & 6 \end{vmatrix}=10\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-10\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \end{vmatrix}=-120.$$

【例 4】 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & 2^3 & \cdots & 2^n \\ 3 & 3^2 & 3^3 & \cdots & 3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n^2 & n^3 & \cdots & n^n \end{vmatrix}$.

【解】 D_n 中各行元素分别是一个数的不同方幂,方幂次数从左到右按递升次序排列,但不是从 0

变到 $n-1$,而是由 1 递升至 n,因此不能直接应用范德蒙行列式的结果.

从第一行至第 n 行依次提取各行的公因子 $1,2,\cdots,n$,化为范德蒙行列式,得

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\2&2^2&2^3&\cdots&2^n\\3&3^2&3^3&\cdots&3^n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\n&n^2&n^3&\cdots&n^n\end{vmatrix}=1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot n\cdot\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&2&2^2&\cdots&2^{n-1}\\1&3&3^2&\cdots&3^{n-1}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&n&n^2&\cdots&n^{n-1}\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{转置}}n!\cdot\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&2&3&\cdots&n\\1&2^2&3^2&\cdots&n^2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&2^{n-1}&3^{n-1}&\cdots&n^{n-1}\end{vmatrix}$$

$$=n!\cdot(2-1)(3-1)(3-2)(4-1)(4-2)(4-3)\cdots(n-1)(n-2)\cdots(n-(n-1))$$

$$=1!2!\cdots(n-1)!n!.$$

★ 题型 1.3　计算"三对角形"行列式

解题策略

形如 $\begin{vmatrix}\ddots&\ddots&&\\\ddots&\ddots&\ddots&\\&\ddots&\ddots&\ddots\\&&\ddots&\ddots\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}&&\iddots&\iddots\\&\iddots&\iddots&\iddots\\\iddots&\iddots&\iddots&\\\iddots&\iddots&&\end{vmatrix}$ 的行列式称为"三对角形"行列式.三对角形行列式的特点是沿主(或次)对角线方向三列元素大部分不为零,行列式中其余的元素均为零.对于这类三对角形行列式通常可用数学归纳法证明,也可用递推法进行求解.

【例 5】　当 $\alpha\neq\beta$ 时,n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}\alpha+\beta&\alpha\beta&0&\cdots&0&0\\1&\alpha+\beta&\alpha\beta&\cdots&0&0\\0&1&\alpha+\beta&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&\alpha+\beta\end{vmatrix}=\underline{\qquad\qquad}.$$

【思路】　三对角形行列式,按第一行展开得到递推公式,可用递推法进行求解.

【解】　按第一行展开有 $D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}$,

则
$$D_n-\alpha D_{n-1}=\beta(D_{n-1}-\alpha D_{n-2}),D_n-\beta D_{n-1}=\alpha(D_{n-1}-\beta D_{n-2}),$$

可解得
$$D_n-\alpha D_{n-1}=\beta^n,D_n-\beta D_{n-1}=\alpha^n.$$

因为 $\alpha\neq\beta$,所以两式联立消去 D_{n-1},可得 $D_n=\dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$.

【例 6】　(1996[5]) 五阶行列式 $D=\begin{vmatrix}1-a&a&0&0&0\\-1&1-a&a&0&0\\0&-1&1-a&a&0\\0&0&-1&1-a&a\\0&0&0&-1&1-a\end{vmatrix}=\underline{\qquad\qquad}.$

【解】　把第 2 至 5 列均加到第 1 列,得

$$D_5=\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ -a & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}+(-a)(-1)^{5+1}\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1-a & a & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \end{vmatrix}.$$

即
$$D_5=D_4+(-a)(-1)^{5+1}a^4,$$
类似的
$$D_4=D_3+(-a)(-1)^{4+1}a^3, D_3=D_2+(-a)(-1)^{3+1}a^2,$$

三个等式相加,并把 $D_2=1-a+a^2$ 代入,得 $D_5=1-a+a^2-a^3+a^4-a^5$.

★ 题型 1.4　计算"爪形"行列式

解题策略

形如 $\begin{vmatrix} \bullet & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} \ddots & & & \vdots \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \bullet \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \bullet \\ & & \iddots & \vdots \\ & \iddots & & \vdots \\ \iddots & & & \vdots \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} \vdots & & & \iddots \\ \vdots & & \iddots & \\ \vdots & \iddots & & \\ \bullet & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$

的行列式称为"爪形"行列式,其特点是行列式中主(或次)对角线上的元素不为零,同时在行列式的4个边中有一行、有一列其元素不为零,其余元素均为零.对于"爪形"行列式,可用主(或次)对角线上的元素消去非零列(或行)的 $n-1$ 个元素,将其化为上(下)三角形行列式进行计算.

【例 7】　计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & x & \cdots & x \\ 1 & x & 0 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x & x & \cdots & 0 \end{vmatrix}$ $(n>3)$.

【思路】　利用行列式性质化为"爪形"行列式,再用主对角线上的元素消去第1列的 $n-1$ 个元素,将其化为上三角形行列式进行计算.

【解】　当 $x=0$ 时,将行列式 D_n 按第 n 行展开,得

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}=1\cdot A_{n1}=(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}=0.$$

当 $x\neq 0$ 时,将行列式 D_n 第一行乘以 $-x$ 依次加到第二行,第三行,…,第 n 行,再将行列式 D_n 的第2列、第3列直到第 n 列分别乘以 $\frac{1}{x}$ 加到第1列,可得

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & x & \cdots & x \\ 1 & x & 0 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x & x & \cdots & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -x & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -x \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \frac{n-1}{x} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}(n-1)x^{n-2}.$$

【例 8】 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & & & \\ 1 & & 3 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & & & & n \end{vmatrix}$.

【思路】 该行列式为"爪形"行列式，可将其化为上三角形行列式进行计算.

【解】 $D_n=2\cdot3\cdot4\cdot\cdots\cdot n\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & & & & 1 \end{vmatrix}$

$$=n!\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{n} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{vmatrix}=-(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})n!.$$

★ 题型 1.5　利用加边法计算行列式

解题策略

利用加边法计算行列式，就是在行列式中添加一行一列，将原来的 n 阶行列式加边成 $(n+1)$ 阶行列式再进行计算. 加边法必须保证所得的新行列式与原行列式在数值上是相等的，即通过对加边后的行列式按照新加的行(列)展开的展开式仍然等于原行列式.

【例 9】 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1+x_2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x_3 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+x_{n-1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+x_n \end{vmatrix}$，其中 $x_1x_2\cdots x_n\neq0$.

【解】 利用加边法计算. 该行列式的每一项都含有元素 1，可将行列式添加一行(元素全为 1)，再适当添加一列，变为 $(n+1)$ 阶行列式，利用行列式的性质化简为爪形行列式和上三角形行列式，得

$$D_n=D_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1+x_1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1+x_2 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1+x_{n-1} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+x_n \end{vmatrix}_{(n+1)}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n+1]{r_i - r_1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & x_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & x_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_n \end{vmatrix}_{(n+1)}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n+1]{c_1 + \frac{c_i}{x_{i-1}}}\begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i} & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & x_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_n \end{vmatrix}_{(n+1)} = (1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i})x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n.$$

【例 10】 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$,$(b_1b_2\cdots b_n \neq 0)$.

【思路】 因为该行列式除对角元之外,各行的元素均为$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,所以考虑用加边法计算.

【解】

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{\vdots \\ r_{n+1}-r_1}]{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1}}\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{\vdots \\ c_1+\frac{1}{b_n}c_{n+1}}]{\substack{c_1+\frac{1}{b_1}c_2 \\ c_1+\frac{1}{b_2}c_3}}\begin{vmatrix} 1+\frac{a_1}{b_1}+\cdots+\frac{a_n}{b_n} & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

$$= b_1b_2\cdots b_n\left(1+\frac{a_1}{b_1}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}\right).$$

★ 题型 1.6 含参数行列式

解题策略

若行列式中含有变量 x,则该行列式展开后成为关于 x 的多项式,可考查该多项式的次数、零点等问题.

【例 11】 设行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & x^2-5 & -2 & 6 \\ -3 & 2 & -1 & x^2+1 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$,求 x.

【解】 **方法一** 注意到左边的行列式是关于 x 的四阶多项式,所以该方程至多有四个解. 利用观

察法可得，若 $x^2-5=4$，则第二行是第一行的两倍，必然使行列式为零，因此有 $x=\pm3$ 是它的解. 同理，若 $x^2+1=2$，也会使行列式为零，于是 $x=\pm1$ 也是它的解.

方法二 计算行列式，得

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & x^2-5 & -2 & 6 \\ -3 & 2 & -1 & x^2+1 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2+2c_3} \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 4 & x^2-9 & -2 & 6 \\ -3 & 0 & -1 & x^2+1 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1-3c_3} \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 & 3 \\ 10 & x^2-9 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & x^2+1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 10 & x^2-9 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & x^2+1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5(x^2-9)(x^2-1)=0,$$

则 $x=\pm3$ 或 $x=\pm1$.

【例 12】 设 $f(x)=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & x \\ 2 & 2 & 3 & x \\ -7 & 10 & 4 & 3 \\ 1 & -7 & 1 & x \end{vmatrix}$，则 $f(x)$ 中 x^2 的系数为________.

【解】 **方法一** 按照 n 阶行列式的定义，$f(x)$ 的各项均为取自不同行不同列的四个元素的乘积，即 $f(x)=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & x \\ 2 & 2 & 3 & x \\ -7 & 10 & 4 & 3 \\ 1 & -7 & 1 & x \end{vmatrix} = \sum\limits_{j_1j_2j_3j_4}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$.

因此，行列式 $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & x \\ 2 & 2 & 3 & x \\ -7 & 10 & 4 & 3 \\ 1 & -7 & 1 & x \end{vmatrix}$ 的展开式中含 x^2 的项由四项构成：

$$(-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}+(-1)^{\tau(1324)}a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}+(-1)^{\tau(1432)}a_{11}a_{24}a_{33}a_{42}+(-1)^{\tau(1423)}a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}$$
$$=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}-a_{11}a_{24}a_{33}a_{42}+a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}$$
$$=8x^2-30x^2-(-28)x^2+10x^2=16x^2,$$

于是，$f(x)$ 中 x^2 的系数为 16.

方法二 先将行列式利用"倍加不变"的性质化简，把行列式的第四行乘以(-1)分别加到第一行和第二行，则行列式中只有主对角线上的元素包含字母 x，然后再按照 n 阶行列式的定义，$f(x)$ 的各项均为取自不同行不同列的四个元素的乘积，即

$$f(x)=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & x \\ 2 & 2 & 3 & x \\ -7 & 10 & 4 & 3 \\ 1 & -7 & 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & 6 & -1 & 0 \\ 1 & 9 & 2 & 0 \\ -7 & 10 & 4 & 3 \\ 1 & -7 & 1 & x \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3j_4}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}.$$

因此，行列式 $\begin{vmatrix} x-1 & 6 & -1 & 0 \\ 1 & 9 & 2 & 0 \\ -7 & 10 & 4 & 3 \\ 1 & -7 & 1 & x \end{vmatrix}$ 的展开式中含 x^2 的项由两项构成：

$$(-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}+(-1)^{\tau(1324)}a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$$
$$=36x(x-1)-20x(x-1)=16x^2-16x,$$

于是 $f(x)$ 中 x^2 的系数为 16.

题型二　抽象型行列式的计算

★ 题型 2.1　计算分块矩阵的行列式

解题策略

计算含子块的四分块分块矩阵的行列式:掌握简化行列式运算的两个重要公式:设 $\boldsymbol{A}$ 是 m 阶方阵,$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵,则

(1) $\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$;(2) $\begin{vmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{vmatrix}=(-1)^{mn}|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|$.

【例 13】　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为 n 维行向量,a,b,c 为常数,已知 $|\boldsymbol{A}|=a$,$\begin{vmatrix}b & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}\end{vmatrix}=0$,则 $\begin{vmatrix}c & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}\end{vmatrix}=$ ________.

【解】　$\begin{vmatrix}c & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}c-b+b & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}c-b & \boldsymbol{\alpha}\\ 0 & \boldsymbol{A}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}\end{vmatrix}=(c-b)a.$

【例 14】　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均是 n 阶可逆矩阵,$|\boldsymbol{A}|=a$,$|\boldsymbol{B}|=b$,$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^2 & 4\boldsymbol{B}\\ (\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B})^{-1} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$,则 $|\boldsymbol{C}|=$ ________.

【解】　$|\boldsymbol{C}|=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}^2 & 4\boldsymbol{B}\\ (\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B})^{-1} & \boldsymbol{O}\end{vmatrix}=(-1)^{n^2}|4\boldsymbol{B}|\cdot|(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B})^{-1}|$

$$=(-1)^{n^2}\cdot 4^n|\boldsymbol{B}|\frac{1}{|\boldsymbol{A}^*||\boldsymbol{B}|}=(-1)^{n^2}\cdot 4^n\frac{1}{|\boldsymbol{A}^*|}=(-1)^{n^2}\cdot 4^n\cdot\frac{1}{a^{n-1}}.$$

★ 题型 2.2　计算方阵行列式

解题策略

利用方阵行列式的性质进行计算.

【例 15】　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 0\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,则 $\left|(\frac{1}{4}\boldsymbol{A})^{-1}-15\boldsymbol{A}^*\right|=$ ________.

【解】　因为 $|\boldsymbol{A}|=10$,所以

$$\left|(\frac{1}{4}\boldsymbol{A})^{-1}-15\boldsymbol{A}^*\right|=|4\boldsymbol{A}^{-1}-15|\boldsymbol{A}|\cdot\boldsymbol{A}^{-1}|=(-146)^3\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}=-311213.6.$$

【例 16】　设 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相似,如果 $\boldsymbol{B}^*$ 的特征值是 $1,-1,2,4$,则 $|\boldsymbol{A}^*|=$ ________.

【解】　因为 $|\boldsymbol{B}^*|=1\times(-1)\times2\times4=-8$,又因为 $|\boldsymbol{B}^*|=||\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1}|=|\boldsymbol{B}|^4|\boldsymbol{B}^{-1}|=|\boldsymbol{B}|^3=-8$,所以 $|\boldsymbol{B}|=-2$.

根据 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相似知,$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|=-2$,于是 $|\boldsymbol{A}^*|=||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^4|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^3=-8$.

【例 17】　已知三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|=3$,且对角线元素全为 -1,又 $\lambda=-1$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值,则 $|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{E}|=$ ________.

【解】　设 $\boldsymbol{A}$ 的另外两个特征值分别为 λ_1,λ_2,依题意有 $\begin{cases}-1+\lambda_1+\lambda_2=-3,\\ -1\times\lambda_1\cdot\lambda_2=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\lambda_1=1,\\ \lambda_2=-3.\end{cases}$ 故 $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{E}$

的特征值分别为 $0,2,\frac{2}{3}$. 故 $|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{E}|=0\times 2\times\frac{2}{3}=0$.

★ 题型 2.3　计算按列分块的行列式

> **解题策略**
> 利用按列分块行列式的性质进行计算.

【例 18】 设 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}\\2\boldsymbol{\gamma}_2\\3\boldsymbol{\gamma}_3\\4\boldsymbol{\gamma}_4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}\\\boldsymbol{\gamma}_2\\\boldsymbol{\gamma}_3\\\boldsymbol{\gamma}_4\end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4$ 均为 4 维行向量, 且已知 $|\boldsymbol{A}|=8$, $|\boldsymbol{B}|=1$, 则 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=$ ________.

【解】

$$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\\\boldsymbol{\gamma}_2\\2\boldsymbol{\gamma}_3\\3\boldsymbol{\gamma}_4\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\\\boldsymbol{\gamma}_2\\\boldsymbol{\gamma}_3\\\boldsymbol{\gamma}_4\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha}\\\boldsymbol{\gamma}_2\\\boldsymbol{\gamma}_3\\\boldsymbol{\gamma}_4\end{vmatrix}-6\begin{vmatrix}\boldsymbol{\beta}\\\boldsymbol{\gamma}_2\\\boldsymbol{\gamma}_3\\\boldsymbol{\gamma}_4\end{vmatrix}=6\cdot\frac{1}{24}\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha}\\2\boldsymbol{\gamma}_2\\3\boldsymbol{\gamma}_3\\4\boldsymbol{\gamma}_4\end{vmatrix}-6\begin{vmatrix}\boldsymbol{\beta}\\\boldsymbol{\gamma}_2\\\boldsymbol{\gamma}_3\\\boldsymbol{\gamma}_4\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}|\boldsymbol{A}|-6|\boldsymbol{B}|=-4.$$

【例 19】 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$, $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\alpha}_1)$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 n 维列向量. 已知行列式 $|\boldsymbol{A}|=a(a\neq 0)$, 求行列式 $|\boldsymbol{B}|$ 的值.

【解】 根据行列式的性质, 得

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{B}|&=|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\alpha}_1|\\&=|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\alpha}_1|+|\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\alpha}_1|\\&=|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n|+|\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\alpha}_1|\\&=\cdots=|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n|+|\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_1|\\&=|\boldsymbol{A}|+(-1)^{n-1}|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n|=|\boldsymbol{A}|+(-1)^{n-1}|\boldsymbol{A}|\\&=\left[1+(-1)^{n-1}\right]a=\begin{cases}2a, & \text{若 } n \text{ 为奇数},\\0, & \text{若 } n \text{ 为偶数}.\end{cases}\end{aligned}$$

题型三　计算代数余子式的线性组合

★ 题型 3.1　计算代数余子式的线性组合的值

> **解题策略**
> 利用行列式按行按列展开公式计算代数余子式的代数和 $b_1\boldsymbol{A}_{i1}+b_2\boldsymbol{A}_{i2}+\cdots+b_n\boldsymbol{A}_{in}$ 的方法通常称为替换法. 所谓替换法实质上就是将行列式按行按列展开公式反过来使用, 我们去掉代数余子式 $\boldsymbol{A}_{i1},\boldsymbol{A}_{i2},\cdots,\boldsymbol{A}_{in}$ 所在的第 i 行的所有元素, 换成代数余子式 $\boldsymbol{A}_{i1},\boldsymbol{A}_{i2},\cdots,\boldsymbol{A}_{in}$ 前面的系数 $b_1,b_2,\cdots,b_n$, 其余元素不变, 按其原来的位置关系组装成一个新的 n 阶行列式,
> 即 $b_1\boldsymbol{A}_{i1}+b_2\boldsymbol{A}_{i2}+\cdots+b_n\boldsymbol{A}_{in}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1j}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots&&\vdots\\b_1&b_2&\cdots&b_j&\cdots&b_n\\\vdots&\vdots&&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nj}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$.

【例 20】 设 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}=a$，计算 $\sum\limits_{i=1}^{4}\sum\limits_{j=1}^{4}A_{ij}$.

【解】
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}A_{ij} &= A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}+A_{21}+A_{22}+A_{23}+A_{24}+ \\ &\quad A_{31}+A_{32}+A_{33}+A_{34}+A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44} \\ &= \frac{1}{2}(2A_{11}+2A_{12}+2A_{13}+2A_{14})+\frac{1}{2}(2A_{21}+2A_{22}+2A_{23}+2A_{24})+ \\ &\quad \frac{1}{2}(2A_{31}+2A_{32}+2A_{33}+2A_{34})+\frac{1}{2}(2A_{41}+2A_{42}+2A_{43}+2A_{44}) \\ &= \frac{a}{2}+0+0+0=\frac{a}{2}.\end{aligned}$$

【例 21】 设 4 阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$，求 $A_{13}+A_{23}+A_{43}$.

【解】 $A_{13}+A_{23}+A_{43}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-4$.

【例 22】 设四阶行列式 D_4 的第 2 行元素分别为 $1,-5,0,8$.

(1) 当 $D_4=4$，并且第 2 行的元素所对应的代数余子式分别为 $4,a,-3,2$ 时，求 a 的值；

(2) 当第 4 行元素对应的余子式依次为 $4,a,-3,2$ 时，求 a 的值.

【解】 (1) 依题意可设 D_4 为 $D_4=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 1 & -5 & 0 & 8 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=4$.

则 $a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}+a_{24}A_{24}=D_4$，

即 $1\times4+(-5)a+0\times(-3)+8\times2=4$. 所以 $4-5a+16=4$，得 $a=\dfrac{16}{5}$.

(2) 根据余子式的定义及性质知，

$a_{41}\times(-1)^{4+1}M_{41}+a_{42}\times(-1)^{4+2}M_{42}+a_{43}\times(-1)^{4+3}M_{43}+a_{44}\times(-1)^{4+4}M_{44}=|\boldsymbol{A}|$.

因为 $a_{41},a_{42},a_{43},a_{44}$ 具体数字未知，所以我们作行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 为 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 1 & -5 & 0 & 8 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 1 & -5 & 0 & 8 \end{vmatrix}=0$.

显然 $|\boldsymbol{A}|$ 的第 4 行的余子式与 D_4 的第 4 行元素的余子式相同，因此有

$$1\cdot(-1)^{4+1}\cdot4+(-5)\cdot(-1)^{4+2}\cdot a+0\cdot(-1)^{4+3}\cdot(-3)+8\cdot(-1)^{4+4}\cdot2=0,$$

即 $-4-5a+16=0$，得 $a=\dfrac{12}{5}$.

疑难问题点拨

计算行列式的主要方法(见重点题型详解)

行列式的计算是本章的重点和难点，根据行列式的特点选择正确的方法是计算行列式的关键. 计