普通高等教育“十三五”规划教材

大学数学

（第2版）

高胜哲　张丽梅　主编

清华大学出版社

大学数学

（第2版）

高胜哲　张丽梅　主编
高　辉　齐丽岩　张　慧　副主编
冯　驰　张　明　参编

清华大学出版社
北京

内容简介

本书是为适应涉海类专业和文科类专业对数学知识的基本要求，结合编者在长期从事相关课程教学过程中积累的经验而编写的教材，主要内容包括微积分、线性代数、概率论基础、数学实验及球面三角学5个部分，共14章。全书知识面宽，通俗易懂，各部分内容相对独立，使教学有相当的灵活性，又有一定的余地。书中各章大都配有适量的习题供读者学习巩固，并在书末对大部分题目给出了答案或提示.

本书既可作为海洋类高等院校涉海类专业的“航海数学”课程和文科类专业的“大学数学”课程的教材，也可作为各类成人高等学历教育相应课程的教材.

图书在版编目(CIP)数据

大学数学/高胜哲，张丽梅主编．—2版．—北京：清华大学出版社，2017
ISBN 978-7-302-48139-3

Ⅰ．①大…　Ⅱ．①高…　②张…　Ⅲ．①高等数学—高等学校—教材　Ⅳ．①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第205871号

责任编辑：陈　明
封面设计：傅瑞学
责任校对：王淑云
责任印制：宋　林

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京鑫海金澳胶印有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　　张**：16　　**字　　数**：387千字
版　　次：2013年8月第1版　2017年8月第2版　　**印　　次**：2017年8月第1次印刷
印　　数：1～2500
定　　价：34.00元

产品编号：075939-01

前　言

大学数学作为海洋类高等院校各专业重要的学科基础课，为学生后续专业课程的学习提供必备的理论基础. 本书是为适应涉海类专业和文科类专业对数学知识的基本要求，结合编者在长期从事相关课程教学过程中积累的经验而编写的教材. 我们希望本书能够在海洋类高等院校的涉海类专业和文科类专业人才培养和教学改革中发挥作用，为培养学生的数学素质及其应用能力做出贡献.

本书在编写过程中，以面向涉海类专业和文科类专业人才培养的需要为原则，在内容安排上着重体现大学数学的基本概念、基本方法和基本定理，舍弃了难度较大的内容和繁琐复杂的推导证明；同时，为了配合涉海类专业后续专业课程的需要，补充了球面三角学部分内容，凸显专业特色. 本书各章大都配有适量的习题供读者学习巩固，并在书末对大部分题目给出了答案或提示.

参加本书编写的有：高胜哲、张丽梅、高辉、齐丽岩、张慧、冯驰和张明. 最后全书由高胜哲和张丽梅定稿.

由于编者水平有限，书中难免存在不妥之处，敬请读者和同行批评指正.

编　者

2017 年 1 月

目 录

第1章　函数与极限

微积分学是以函数为研究对象的一门科学.所谓函数关系就是变量之间的依赖关系,而极限方法是研究函数的一种基本方法,它是学习微分学、积分学的基础.本章将介绍函数、函数极限和函数连续等基本概念以及它们的一些性质.

1.1　函　数

1.1.1　函数的定义

我们在研究一些生产、生活的实际问题或自然现象的过程中,经常发现这些过程所涉及的变量并不是独立变化的,而是需要考虑两个彼此相互依赖、有关联的变量.我们考察如下两个例子.

例 1.1.1　等腰直角三角形的面积 s 与其直角边的边长 x 的关系为

$$s=\frac{1}{2}x^2,\quad x\in(0,+\infty).$$

可见等腰直角三角形的面积随着边长的变化而变化.

例 1.1.2　据统计,20 世纪 60 年代世界人口增长情况如表 1-1 所示.

表　1-1

年份 t	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968
人口 n/百万	2972	3061	3151	3213	3234	3285	3356	3420	3483

显然,随着年份 t 的推移,世界人口数 n 在不断增长.

从以上的例子我们看到,它们所描述的问题虽各不相同,但却有共同的特征:

(1) 每个问题中都有两个变量,它们之间不是彼此孤立的,而是相互联系、相互制约的;

(2) 当一个变量在它的变化范围中任意取定一个数值时,另一个变量按一定的法则存在一定值与之相对应.

具有这两个特征的变量之间的依存关系,我们称为函数关系.下面给出函数的定义.

定义 1.1.1　*设两个变量 x 和 y,当变量 x 在一给定的数集 D 中任意取一个值时,变量 y 按照一定的法则 f 总有确定的数值与之对应,则称 y 是 x 的函数,记作 $y=f(x)$.其中 x 叫作自变量,y 叫作因变量或函数.数集 D 叫作这个函数的定义域,记作 D_f,即 $D_f=D$.*

例 1.1.1、例 1.1.2 的定义域分别为:$D_f=(0,+\infty)$,$D_f=\{t\mid 1960\leqslant t\leqslant 1968,t\in\mathbf{N}\}$.

函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数的值域,记作 R_f 或 $f(D)$,即

$$R_f=f(D)=\{y\mid y=f(x),x\in D\}.$$

除了常用 f 表示函数的记号外,还可以用 g,F 等英文字母或 φ,Ψ 等希腊字母表示.

由函数的定义可知,构成函数的两个基本要素为定义域 D 和对应法则 f.如果两个函

数的定义域和对应法则都相同,则为同一函数,否则就是不同的. 例如,$f(x)=1$ 与 $g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$ 是同一函数,而 $f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$ 就不是同一函数了.

函数的定义域通常按以下两种情形来确定: 一种是在实际问题中,根据实际意义确定. 例如,在圆的面积 s 与半径 r 的函数关系中,$s=\pi r^2$,定义域为 $r>0$,因为 $r\leqslant 0$ 时不再有实际意义;另一种是对抽象地用算式表达的函数,通常约定这种函数的定义域是使得算式有意义的一切实数组成的集合. 例如,函数 $y=\sqrt{9-x^2}$ 的定义域为 $[-3,3]$,函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ 的定义域为 $(-2,2)$,这种定义域称为函数的自然定义域.

函数的表示方法主要有 3 种: 解析法(如例 1.1.1)、表格法(如例 1.1.2)、图像法.

点集 $P=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的图形,如图 1-1 所示.

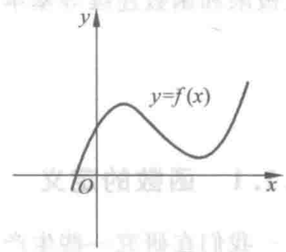

图 1-1

函数的 3 种表示法各有其特点,表格法和图像法直观明了,解析法易于运算. 在处理实际问题时这几种表示方法可以结合使用.

在用解析法表示函数时,有些函数在其定义域的不同部分,其表达式不同,即用多个解析式表示一个函数,这类函数称为分段函数.

例 1.1.3 函数

$$y=f(x)=\begin{cases}3\sqrt{x}, & 0\leqslant x<1\\ 1+x, & 1\leqslant x<2\\ x^2+6x-5, & 2\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$$

是一个分段函数. 它的定义域 $D=[0,4]$. 当 $x\in[0,1)$ 时,对应的函数式 $f(x)=3\sqrt{x}$;当 $x\in[1,2)$ 时,对应的函数式 $f(x)=1+x$;当 $x\in[2,4]$ 时,对应的函数式 $f(x)=x^2+6x-5$. $x=\dfrac{1}{4}\in[0,1)$,则 $f\left(\dfrac{1}{4}\right)=3\sqrt{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{3}{2}$.

例 1.1.4 符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0.\\ -1, & x<0\end{cases}$$

显然函数的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=\{-1,0,1\}$,如图 1-2 所示.

例 1.1.5 取整函数 $y=[x]$,其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数,x 为任一实数,$y=[x]=n,n\leqslant x<n+1,n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$,如图 1-3 所示.

1.1.2 函数的几种特性

1. 单调性

设 I 为函数 $f(x)$ 的定义域内的一个区间. 如果对于 I 上任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

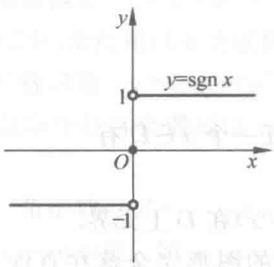

图　1-2

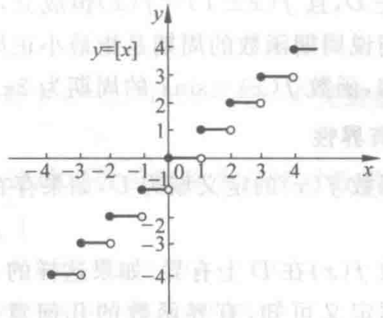

图　1-3

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的，如图 1-4 所示；反之，如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

那么就称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的，如图 1-5 所示. 单调增加和单调减少的函数统称为单调函数，区间 I 称为单调区间.

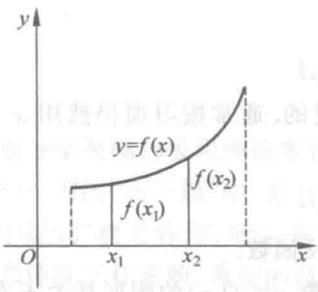

图　1-4

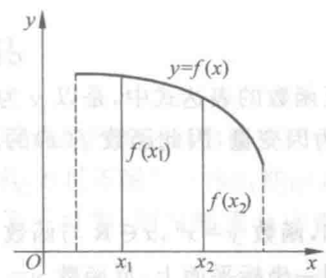

图　1-5

例如，函数 $y=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上是单调增加的；函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是单调减少的，在区间 $(-\infty,0)$ 上是单调减少的，而在其整个定义域上却不是单调的.

2. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 如果对于任一个 $x\in D$，有

$$f(-x)=f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为偶函数. 如果对于任一 $x\in D$，有

$$f(-x)=-f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称.

例如，函数 $f(x)=\cos x$ 是偶函数，函数 $f(x)=x$ 是奇函数，而 $f(x)=x+\cos x$ 既非奇函数，也非偶函数.

3. 周期性

设函数的定义域为 D，如果存在一个不为零的正数 T，使得对于任一个 $x\in D$，有

$(x\pm T)\in D$,且 $f(x\pm T)=f(x)$恒成立,则称函数 $f(x)$为周期函数,T 称为 $f(x)$的周期,通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

例如,函数 $f(x)=\sin x$ 的周期为 2π.

4. 有界性

设函数 $f(x)$的定义域为 D,如果存在正数 M,使得对任一个 $x\in D$ 有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$在 D 上有界. 如果这样的 M 不存在,则称 $f(x)$在 D 上无界.

根据定义可知,有界函数的几何意义是:函数 $f(x)$的图形完全落在直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间. 例如,在区间$(-\infty,+\infty)$上,$f(x)=\sin x$ 是有界函数.

1.1.3 反函数与复合函数

函数 $y=f(x)$的自变量 x 与因变量 y 的关系往往是相对的. 有时我们不仅要研究 y 随 x 变化而变化的状况,也要研究 x 随 y 变化而变化的状况. 因此,我们引入反函数的概念.

设函数 $y=f(x)$,$x\in D$ 满足:对于值域 R_f 中的每一个值 y,有且仅有一个 $x\in D$ 满足 $y=f(x)$,则 x 是一个定义在 R_f 上以 y 为自变量的函数,称这个函数为 $f(x)$的反函数,记作

$$x=f^{-1}(y),\quad y\in R_f.$$

在反函数的表达式中,是以 y 为自变量,x 为因变量的. 通常按习惯仍然用 x 作为自变量,y 作为因变量,因此函数 $f(x)$的反函数也可以记作

$$y=f^{-1}(x),\quad x\in R_f.$$

例如,函数 $y=x^3$,$x\in\mathbf{R}$ 与函数 $x=y^{\frac{1}{3}}$,$y\in\mathbf{R}$ 互为反函数.

在同一坐标平面上,反函数 $y=f^{-1}(x)$与它的原函数 $y=f(x)$的图形是关于直线 $y=x$ 对称的. 而且,若原函数 $y=f(x)$在定义域 D 上是单调的,则反函数 $y=f^{-1}(x)$在定义域 R_f 上也是单调的.

设函数 $y=f(u)$,$u\in D_f$,函数 $u=g(x)$,$x\in D_g$,如果 $D_f\cap R_g\neq\varnothing$,则由下式确定的函数

$$y=f[g(x)],\quad x\in\{x\mid g(x)\in D_f\}$$

称为由函数 $u=g(x)$和函数 $y=f(u)$构成的复合函数,变量 u 称为中间变量.

不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的. 例如,函数 $y=\arcsin u$ 与 $u=2+x^2$ 复合成 $y=\arcsin(2+x^2)$,但无意义. 另外,复合函数可以由两个以上的函数经过复合构成. 如函数 $y=\sqrt[3]{\sin^2\dfrac{x}{2}}$是由 $y=\sqrt[3]{u}$,$u=v^2$,$v=\sin w$,$w=\dfrac{x}{2}$复合而成.

1.1.4 初等函数

初等函数是我们研究的各类问题中最常见的函数,是高等数学最主要的研究对象.

我们把常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数这 6 类函数统称为基本初等函数.

(1) 常值函数:$y=C$,C 为常数;

(2) 幂函数：$y=x^{\mu}$(其中 μ 为任意实常数)；

(3) 指数函数：$y=a^{x}(a>0$ 且 $a\neq1)$；

在实际中,常使用以 e 为底的指数函数 $y=\mathrm{e}^{x}$,其中 $\mathrm{e}=2.71828\cdots$是一个无理数；

(4) 对数函数：$y=\log_{a}x(a>0$ 且 $a\neq1)$；

高等数学中经常会遇到以 e 为底的对数函数,这种对数函数称为自然对数函数,记作 $y=\ln x$；

(5) 三角函数：如 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$；

(6) 反三角函数：如 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\mathrm{arccot}\,x$.

定义 1.1.2　*由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合所得到的并可用一个解析式表示的函数,称为初等函数.*

例如,函数

$$y=\sin^{2}(3x+1),\quad y=\sqrt{x^{2}+1},\quad y=\frac{\ln x+\sqrt[3]{x}+2\tan x}{10^{x}-x+9}$$

等都是初等函数.

特别地,我们称形如 $u(x)^{v(x)}$ 的函数为幂指函数.

1.2　数列的极限

作为微分学基础的极限理论来说,早在古代已有比较清楚的论述. 中国古代的庄周所著的《庄子》一书的“天下篇”中,记有“一尺之棰,日取其半,万世不竭”. 三国时期的刘徽在他的割圆术中提到“割之弥细,所失弥小,割之又割,以至于不可割,则与圆周合体而无所失矣.”这些都体现了朴素的、典型的极限思想.

极限的概念和运算是高等数学的基础,微积分学的许多重要概念和推理过程就是通过极限来表达或实现的. 本节主要介绍了数列极限的概念以及简单的数列极限的计算.

1.2.1　数列极限的定义

如果按照某一法则,对每个 $n\in\mathbf{N}_{+}$,对应着一个确定的实数 x_n,这无穷多个实数 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$按下标从小到大的次序排列下去,就构成了一个数列,记作$\{x_n\}$,第 n 项 x_n 称为数列的一般项或通项,如：

(1) $1,1,\cdots,1,\cdots$；

(2) $1,-1,1,-1,\cdots,1,-1,\cdots$；

(3) $2,4,6,8,\cdots,2n,\cdots$；

(4) $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$；

(5) $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots$.

事实上,数列$\{x_n\}$就是一个定义在正整数集 $\mathbf{N}_{+}$ 上的函数,即 $x_n=f(n)$. 另外,数列对应着数轴上一个点列,可看作一动点依次在数轴上取定 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$,如图 1-6 所示.

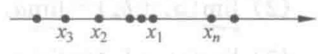

图　1-6

为了说明极限的概念，我们先考虑数列

$$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots.$$

显然，当 n 无限增大，即 n 趋于无穷大的过程中，一般项$\frac{n}{n+1}$无限接近于常数 1. 我们考察数列$\{x_n\}$，当 n 在正整数集 $\mathbf{N}_+$ 中变化时其通项 x_n 的变化规律可以得到如下数列极限的定义.

定义 1.2.1　如果 n 在正整数集 $\mathbf{N}_+$ 中变化，且无限增大时，数列$\{x_n\}$的通项 x_n 无限趋于一个确定的数 a，则称数列$\{x_n\}$收敛于 a，或称 a 为数列$\{x_n\}$的极限，记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n = a \quad 或 \quad x_n \to a(n\to\infty).$$

否则，称数列$\{x_n\}$发散，或$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在.

精确地说，数列极限的严格数学定义如下：

设有数列$\{x_n\}$，如果存在常数 a，对于任意给定的正数 ε(无论它多么小)，总存在正整数 N，使得对于 $n>N$ 的一切 x_n，不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 都成立，则称常数 a 为数列$\{x_n\}$的极限，或者称数列$\{x_n\}$收敛，且收敛于 a，记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n = a, \quad 或 \quad x_n \to a(n\to\infty).$$

如果不存在这样的常数 a，则称数列$\{x_n\}$发散，或称$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists$正整数 N，当 $n>N$ 时，有$|x_n-a|<\varepsilon$. 这就是所谓的"ε-N"定义.

该定义的几何解释是当 $n>N$ 时，数列$\{x_n\}$的第 N 项以后所有的点都落在开区间$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$内，而只有有限个(至多只有 N 个)在这区间以外，如图 1-7 所示.

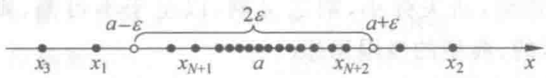

图　1-7

观察数列数值的变化趋势易知以下结果：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}C=C$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$，其中$|q|<1$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}=0$，其中 $k>0$.

今后我们求数列$\{x_n\}$的极限，一般是将$\{x_n\}$进行整理变形，直到我们能观察出其变化趋势或结合一些简单的数列极限的结果，同时在求解过程中利用数列极限的四则运算法则会更方便.

定理 1.2.1(数列极限的四则运算法则)　设数列$\{a_n\}$和数列$\{b_n\}$都收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，那么

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(Ca_n)=C\lim\limits_{n\to\infty}a_n=Ca$，其中 C 是常数；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a\pm b$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n=ab$；