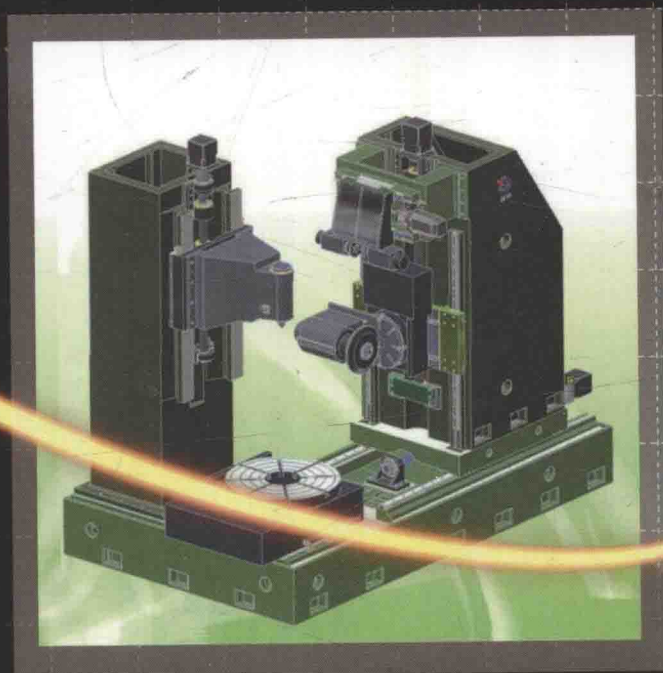




高端科技专著丛书

渐开线齿面拓扑修形 磨削技术

◆ 王会良 邓效忠 魏冰阳 著



中国工信出版集团



电子工业出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
<http://www.phei.com.cn>

高端科技专著丛书

渐开线齿面拓扑修形 磨削技术

王会良 邓效忠 魏冰阳 著



电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

内 容 简 介

本书提出了斜齿轮拓扑修形及高精度磨削加工方法,为提高斜齿轮的齿面精度及齿轮副的传动特性优化提供了理论指导。

全书共9章,分别介绍了共轭曲面的基本原理和常见的磨齿方法;研究了在不同安装误差存在的情况下,传动误差与啮合印痕随安装误差的变化规律和齿面拓扑修形方法及其参数优化设计;对齿面误差进行了分析、动态预报与加工参数的评价;基于成形法磨削提出了齿面拓扑修形的实现方法;最后给出了齿轮副的加载对比实验。

本书可供从事齿面拓扑磨削技术研究及相关工作的工程技术人员、技术装备人员以及高等院校相关专业师生参考使用。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

渐开线齿面拓扑修形磨削技术/王会良,邓效忠,魏冰阳著. —北京:电子工业出版社,2017.11
(高端科技专著丛书)

ISBN 978-7-121-32770-4

I. ①渐… II. ①王… ②邓… ③魏… III. ①渐开线齿轮-齿面-磨削 IV. ①TH132.413

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第235794号

责任编辑:张 剑

文字编辑:钱维扬

印 刷:北京京华虎彩印刷有限公司

装 订:北京京华虎彩印刷有限公司

出版发行:电子工业出版社

北京市海淀区万寿路173信箱 邮编 100036

开 本:787×1092 1/16 印张:13.25 字数:248千字

版 次:2017年11月第1版

印 次:2017年11月第1次印刷

定 价:58.00元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系,联系及邮购电话:(010)88254888,88258888。

质量投诉请发邮件至 zltz@phei.com.cn,盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式:(010)88254459;qianwy@phei.com.cn。

前 言

渐开线齿轮广泛应用于航空、航天、交通、机械和仪表等众多工业领域，在机器机械中起着传递运动与动力的作用。随着机械工业的发展与科学技术的进步，人们对齿轮传动提出了高功率密度、高速度、高可靠性的要求。在设备高速运转过程中，齿轮承受巨大的动载荷，轮齿振动，产生噪声和受载变形难以避免。这就要求轮齿的制造要主动满足设备的功能需求，以达到提高设备整体运行性能与使用寿命的目的。对于渐开线齿轮，齿面修形是降低其对安装误差敏感性，避免边缘接触、偏载，降低振动、噪声的重要手段。但齿面修形也是齿轮设计与制造中极为复杂的问题，修形量、修形方向、拓扑结构的确定与精确控制既困难又十分关键；而近年来轮齿接触分析手段的日臻完善与磨齿技术的高度发展，为这一技术提供了更多的自由度与实现的可能性。

著者长期从事齿轮数字化设计和智能制造方面的研究工作，先后参与国家自然科学基金青年项目“点接触的行星齿轮传动误差理论分析与实验研究（51205108）”、“汽车驱动桥弧齿锥齿轮齿面偏差网络智能控制理论研究（51405135）”，国家自然科学基金面上项目“新型直廓内齿轮行星传动的动态特性及成形磨削方法（50575068）”、“局部共轭内斜齿轮修形机制与成形磨削理论研究（51575160）”，河南省重大科技专项“机器人RV减速器摆线针轮精密制造技术研究及装备开发（161100211200）”，以及河南省科技攻关项目“RV减速器传动特性分析及测试平台（172102210038）”等。渐开线齿面拓扑修形及其磨削技术是著者的多年研究成果，也是这一思想的集中体现。

本书提出了斜齿轮拓扑修形和高精度磨削加工的方法，旨在为提高斜齿轮的齿面精度及齿轮副的传动特性优化提供理论指导。本书对拓扑修形方法进行了分析，在自主开发的成形磨齿机上实现了齿面的三维拓扑修形，并对修形效果进行了相关的实验研究，对工程实践具有一定的指导意义。全书分为9章：第1章论述共轭曲面的基本原理；第2章研究在不同安装误差情况下，传动误差与啮合印痕随安装误差的变化规律；第3章介绍常见的磨齿加工方法；第4章和第5章研究齿面拓扑修形的方法及参数优化设计；第6章介绍齿面误差的统计分析、动态预报与测量实验；第7章基于成形法磨削提出齿面拓扑修形的实现方法；第8章给出齿轮副的加载对比实验；第9章进行总结和展望。

在本书完成之际，特别感谢河南科技大学齿轮方向研究团队的每一位成员，他们这

些年来通力协作，给予了著者无私的帮助与前进的动力；感谢机械装备先进制造河南省协同创新中心、齿轮制造及装备河南省工程实验室、河南省机器人与智能系统重点实验室给予的科研平台；同时感谢所有支持本书出版的单位和个人。本书的出版也得到了河南省科技攻关项目“RV 减速器传动特性分析及测试平台（172102210038）”以及河南科技大学博士科研启动基金等项目的资助。

由于著者水平有限，书中难免存在疏漏之处，敬请广大读者批评指正。

著 者

2017 年 9 月 10 日于河南科技大学

目 录

第1章 共轭曲面的基本原理	1
1.1 矢量旋转与坐标变换	1
1.1.1 矢量旋转	1
1.1.2 坐标变换	2
1.2 曲线族和曲面族的包络	6
1.2.1 平面曲线族的包络	6
1.2.2 单参数曲面族的包络	12
1.3 等距曲线	13
1.3.1 法向等距线	13
1.3.2 向心等距线	15
1.4 等距曲面	16
1.5 圆柱螺旋面	17
1.5.1 等升距螺旋面	17
1.5.2 螺旋面的法线	19
1.6 共轭曲面的啮合方程	20
1.6.1 采用的坐标系及其变换	20
1.6.2 相对运动速度	21
1.6.3 啮合方程	22
1.7 共轭曲面的两类界限函数与特征矢量	24
1.7.1 二界函数 H_i 和矢量 q	24
1.7.2 共轭曲面的一界函数 Φ 和矢量 p	25
1.7.3 接触线在曲面上的移动速度和卷吸速度	26
1.7.4 二包（反包络）中界函数与 p^* 、 q^*	27
1.8 共轭曲面主方向、主曲率的关系	29
1.8.1 主方向、主曲率的诱导	29

1.8.2	主方向与主值的直接求解	30
1.8.3	主方向、主值的数值微分法	32
第2章	含安装误差的齿面接触分析	34
2.1	引言	34
2.2	含安装误差的 TCA	34
2.2.1	啮合方程的建立	34
2.2.2	含安装误差的齿轮副啮合方程求解	36
2.2.3	传动误差方程求解	39
2.2.4	含安装误差的齿轮副 TCA 分析	41
2.3	接触应力分析	46
2.3.1	修形斜齿轮副三维实体造型	47
2.3.2	有限元模型的建立	48
2.3.3	有限元分析	50
2.4	小结	54
第3章	磨齿加工方法	55
3.1	引言	55
3.2	磨齿加工方法的分类	55
3.2.1	成形法磨齿	56
3.2.2	展成法磨齿	57
3.3	成形砂轮型磨齿	58
3.3.1	成形砂轮型磨齿的工作原理	58
3.3.2	成形砂轮型磨齿的主要问题	60
3.4	大平面砂轮型磨齿	60
3.4.1	大平面砂轮型磨齿的工作原理	60
3.4.2	大平面砂轮型磨齿磨削宽度	62
3.4.3	大平面砂轮型磨齿的主要问题	63
3.5	锥面砂轮型磨齿	64
3.6	碟形双砂轮型磨齿	64
3.7	蜗杆砂轮型磨齿	66

3.8 摆线轮磨齿机结构及工作原理	67
3.8.1 摆线轮磨齿机工作原理	67
3.8.2 摆线轮磨齿机结构	67
第4章 齿面拓扑修形方法	72
4.1 引言	72
4.2 齿廓分段修形模型	75
4.2.1 齿廓修形的齿条刀具齿面方程	75
4.2.2 齿条范成加工的齿面方程	78
4.2.3 分段修形齿轮端面廓形求解	79
4.3 齿向分段修形模型	81
4.3.1 标准中心距求解	81
4.3.2 齿向分段修形	82
4.4 修形齿面方程求解与边界划分	85
4.4.1 拓扑修形齿面方程	85
4.4.2 拓扑修形边界划分	87
4.5 小结	88
第5章 齿面拓扑修形参数设计	89
5.1 引言	89
5.2 齿轮啮合冲击与错位量分析	89
5.2.1 齿轮啮合冲击	89
5.2.2 齿轮啮合错位量	92
5.3 面向功能需求的齿面修形设计过程模型	94
5.3.1 齿轮传动的功能需求	94
5.3.2 预置高阶传动误差的齿面修形设计	95
5.3.3 基于小滑动系数的齿面修形设计	100
5.3.4 降低振动与噪声的齿面修形设计	103
5.4 仿真分析	105
5.4.1 基于 Romax 的承载传动误差分析	105
5.4.2 基于赫兹理论的齿面接触原理	111

5.4.3	齿面修形参数优化模型	114
5.4.4	修形参数的遗传算法求解	115
5.4.5	微观几何参数优化分析	116
5.5	小结	119
第6章	齿面偏差统计过程控制	120
6.1	引言	120
6.2	在机测量原理	120
6.2.1	在机测量机构	120
6.2.2	在机测量模型	123
6.2.3	测头球心轨迹求解	124
6.3	齿面网格点坐标计算	126
6.3.1	齿面网格点的产生	126
6.3.2	齿面网格点坐标值计算	127
6.3.3	测头球心运动轨迹计算	129
6.4	齿面偏差统计分析	131
6.4.1	齿面拓扑点数值计算	131
6.4.2	齿面偏差表征	137
6.4.3	齿面偏差控制图分析	140
6.5	齿面偏差动态预报	144
6.5.1	动态预报模型 GBM (1, 1)	144
6.5.2	动态预报结果分析	147
6.6	齿面偏差测量实验	148
6.6.1	在机测量	148
6.6.2	离线测量	151
6.7	小结	154
第7章	拓扑修形齿面的成形磨削方法	155
7.1	引言	155
7.2	拓扑修形齿面磨削原理	155
7.3	金刚轮运动轨迹求解计算	158

7.3.1 砂轮廓形计算	158
7.3.2 金刚轮修整轨迹计算	161
7.4 砂轮运动轨迹计算	162
7.4.1 标准磨削时砂轮运动方程	162
7.4.2 齿向修形时砂轮运动方程	163
7.5 成形磨削加工实验	164
7.5.1 加工工件	164
7.5.2 加工参数	166
7.5.3 加工程序	167
7.6 小结	170
第8章 齿面偏差反馈修正和齿轮副加载实验	171
8.1 引言	171
8.2 数控成形磨齿机	171
8.3 齿面偏差闭环反馈修正	173
8.3.1 成形磨削模型构建	173
8.3.2 运动方程修正系数求解	175
8.3.3 闭环反馈修正	179
8.4 加载实验	185
8.4.1 实验方案	185
8.4.2 齿面接触实验结果分析	188
8.4.3 传动误差实验结果分析	189
8.4.4 振动和噪声实验结果分析	191
8.5 小结	195
第9章 总结与展望	196
9.1 研究工作总结	196
9.2 展望	197
参考文献	198

第 1 章 共轭曲面的基本原理

1.1 矢量旋转与坐标变换

1.1.1 矢量旋转

如图 1-1 所示, 设单位向量 ω , 对于任意向量 a , 其始点在 ω 轴上, a 绕 ω 旋转任意角 ε 得到新的矢量 b , 求矢量 b 。

显然 b 是关于 a 、 ω 、 ε 的函数。 b 作为空间向量, 用 a 、 ω 两个向量不足以表达, 因此引入第三个矢量 $\omega \times a$ 。这样 b 就可以表示为

$$b = \lambda_1 a + \lambda_2 \omega + \lambda_3 (\omega \times a) \quad (1-1)$$

这里三个未知量 λ_1 、 λ_2 、 λ_3 , 研究回转过程可知, b 大小不变, 即

$$b \cdot b = a \cdot a \quad (1-2)$$

b 与 ω 的夹角不变, 即

$$b \cdot \omega = a \cdot \omega \quad (1-3)$$

因此 $\omega \times a$ 与 $\omega \times b$ 的夹角也为 ε , 即

$$\cos \varepsilon = \frac{\omega \times a}{|\omega \times a|} \cdot \frac{\omega \times b}{|\omega \times b|} \quad (1-4)$$

由式 (1-2) ~ 式 (1-4) 可确定 λ_1 、 λ_2 、 λ_3 。对式 (1-1) 两端做 ω 数量积, 得

$$b \cdot \omega = \lambda_1 (a \cdot \omega) + \lambda_2 \quad (1-5)$$

则利用式 (1-3) 可得

$$\lambda_2 = (1 - \lambda_1)(a \cdot \omega) \quad (1-6)$$

对式 (1-1) 两端做 a 数量积, 得

$$a \cdot b = \lambda_1 a^2 + \lambda_2 (\omega \cdot a) \quad (1-7)$$

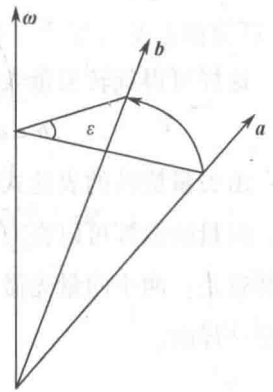


图 1-1 矢量旋转

则利用拉格朗日恒等式可得

$$|\omega \times a| = \sqrt{a^2 - (\omega \cdot a)^2}, \quad |\omega \times b| = \sqrt{b^2 - (\omega \cdot b)^2}$$

$$(\omega \times a) \cdot (\omega \times b) = a \cdot b - (\omega \cdot a)^2$$

又因 $|\omega \times a| = |\omega \times b|$, 利用式 (1-4) 可得

$$a \cdot b = a^2 \cos \varepsilon + (1 - \cos \varepsilon) (\omega \cdot a)^2 \quad (1-8)$$

与 (1-7) 式做对比可知

$$\lambda_1 = \cos \varepsilon, \quad \lambda_2 = (1 - \cos \varepsilon) (\omega \cdot a) \quad (1-9)$$

利用式 (1-1), 注意到 $a^2 = b^2$, 可得

$$a^2 = a^2 \cos^2 \varepsilon + (1 - \cos \varepsilon)^2 (\omega \cdot a)^2 + \lambda_3^2 (\omega \times a)^2 + 2 \cos \varepsilon (1 - \cos \varepsilon) (\omega \cdot a)^2$$

所以

$$[a^2 - (\omega \cdot a)^2] \sin^2 \varepsilon = \lambda_3^2 (\omega \times a)^2 \quad (1-10)$$

经验证,

$$\lambda_3 = \sin \varepsilon$$

这样可得旋转矢量表达式

$$b = a \cos \varepsilon + (1 - \cos \varepsilon) (\omega \cdot a) \omega + (\omega \times a) \sin \varepsilon \quad (1-11)$$

由矢量旋转的表达式 (1-11) 可以看出, 矢量旋转其实是施行了若干矢量运算。因此, 向量的运算可以在向量旋转前或旋转后进行, 其结果是相同的。用向量的向量积来解释就是: 两个向量先做向量积再施行旋转与先施行旋转再做向量积, 其最终得到的结果是一样的。

1.1.2 坐标变换

对于任意一个刚体, 为了完全确定它在空间的位置, 只要在刚体上固定一个坐标系 (S_1), 如果我们能够对某个参考坐标系 (S_2) 描述这个坐标系 (S_1) 的位置, 那么也就说明了此刚体在空间的位置。这就是坐标变换的意义所在。

这里所说的坐标变换是指坐标系的变化, 这种变换广义上可以理解成一个映射或算子, 即矢量在一个坐标系中的描述变换为在另一个坐标系的描述, 或算子作用于一个矢量, 代表一个移动或转动, 或兼而有之。

如图 1-2 所示, 两个坐标系 $S_1 \{O_1-x_1, y_1, z_1\}$ 以及 $S_2 \{O_2-x_2, y_2, z_2\}$, 在坐标系 S_1 中存在径矢 $\overrightarrow{O_1P} = [x_1, y_1, z_1]^T$, 或称点 P 的坐标。如何在坐标系 S_2 中表示 P 点的坐标? 这就是坐标变换问题。

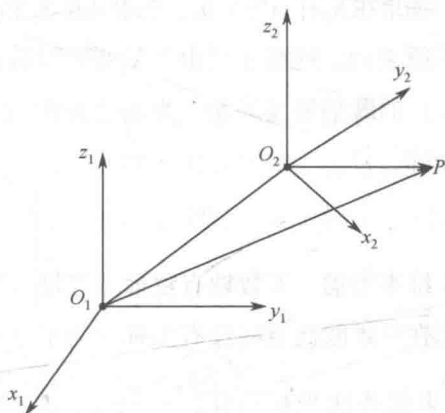


图 1-2 坐标变换

坐标变换存在如下的表达式:

$$\overrightarrow{O_2P} = \mathbf{c}_{21} + \mathbf{R} \cdot \overrightarrow{O_1P} \quad (1-12)$$

即, 坐标系 S_1 经过一个平移 $\mathbf{c}_{21} = \overrightarrow{O_2O_1}$ (在 S_2 坐标系表达), 再做一个旋转 $\mathbf{R}$ 变换到与 S_2 重合。这时, 径矢 $\overrightarrow{O_2P} = [x_2, y_2, z_2]^T$ 即为 $\overrightarrow{O_1P}$ 在坐标系 S_2 中的表达。

1. 旋转坐标变换

下面研究旋转变换矩阵 $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}$ 为 3×3 正交矩阵, 对于右旋标架 $\det \mathbf{R} = 1$ 。

$$\mathbf{R}_{21} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (1-13)$$

将坐标系 S_1 经过一个平移 $\mathbf{c}_{21}$, 使其原点重合; $\mathbf{R}_{21}$ 中每个元素为对应坐标轴夹角的余弦, 即 $a_{11} = \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_2$, $a_{12} = \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{i}_2$, $a_{21} = \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{j}_2$, 其他元素依次类推。假设坐标系 S_1 相对于 S_2 绕 z_2 轴顺时针旋转 θ 角后重叠, 则旋转变换矩阵为

$$\mathbf{R}_{21} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-14)$$

由 $\mathbf{R}$ 的形成可以看出, $\mathbf{R}$ 的每一行或每一列的元素平方和等于 1, 任意两行或任意两列元素乘积之和等于零, $\mathbf{R}$ 的逆矩阵等于它的转置, 即 $[\mathbf{R}]^{-1} = [\mathbf{R}]^T$ 。

从标架的角度看, $\mathbf{R}_{21}$ 就是坐标系 S_1 在 S_2 中的描述, 它的三列就是 S_1 的三个坐标轴单位矢量 $(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1)$ 在 S_2 中的表示。

从映射或算子的观点看,如果在 S_1 有一矢量 $\mathbf{a}_1$,想求其在 S_2 中的表达 $\mathbf{a}_2$,则 $\mathbf{a}_2 = \mathbf{R}_{21} \cdot \mathbf{a}_1$,这时要求坐标系 S_1 、 S_2 是同原点的。这对于自由矢量变换没有问题,但如果变换的矢量为径矢,则必须用式(1-12)的既平移又旋转。为表达方便,将式(1-12)化作映射或算子,引入齐次坐标变换矩阵。

2. 齐次坐标变换

齐次变换把坐标看作4维来考虑。实数轴有限远点与笛卡尔坐标系中点的坐标形成一一对应的关系,无穷原点在三维欧氏空间没有坐标,为了刻画无穷原点,需要引入齐次坐标 (x^*, y^*, z^*, l) 。如果把齐次坐标写作 $\left(\frac{x^*}{l}, \frac{y^*}{l}, \frac{z^*}{l}, 1\right)$,我们就会发现:当 $l \neq 0$ 时,表示有限远点;当 $l = 0$ 时,表示无穷原点的坐标。因此,有限远点的齐次坐标可以写作 $(x, y, z, 1)$ 。把式(1-12)的变换用齐次变换来描述,则 $\overrightarrow{O_2 P} = \mathbf{M}_{21} \cdot \overrightarrow{O_1 P}$,其中

$$\mathbf{M}_{21} = \begin{bmatrix} & & & a_{14} \\ & \mathbf{R}_{21} & & a_{24} \\ - & - & & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-15)$$

式中: $\mathbf{R}_{21}$ 为旋转变换矩阵式(1-13);元素 a_{14}, a_{24}, a_{34} 表示坐标系 S_1 的原点 O_1 在坐标系 S_2 中的坐标,即 $a_{14} = \overrightarrow{O_2 O_1} \cdot \mathbf{i}_2$, $a_{24} = \overrightarrow{O_2 O_1} \cdot \mathbf{j}_2$, $a_{34} = \overrightarrow{O_2 O_1} \cdot \mathbf{k}_2$ 。

如果进行逆变换,即坐标系 S_2 向坐标系 S_1 变换,则有

$$\mathbf{M}_{12} = \begin{bmatrix} & & & b_{14} \\ & \mathbf{R}_{12} & & b_{24} \\ - & - & & b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-16)$$

这时, $b_{14} = -(a_{11}a_{14} + a_{21}a_{24} + a_{31}a_{34})$, $b_{24} = -(a_{12}a_{14} + a_{22}a_{24} + a_{32}a_{34})$, $b_{34} = -(a_{13}a_{14} + a_{23}a_{24} + a_{33}a_{34})$,仔细观察会发现,括号内的项目分别为 $\mathbf{M}_{21}$ 第4列元素同第1、2、3列元素的乘积之和。

为了熟悉上述的矢量变化,下面举一个机械手的运动分析的例子。

例 1-1 图 1-3 所示为一个工业 4 自由度机械手。第 1 个自由度, $|OO_1| = l_1$ 段可绕 $O-z$ 轴旋转任意角度 q_1 ; 第 2、3 个自由度, $|O_1O_2| = l_2$ 段可绕 O_1-x_1 轴旋转任意角度 q_2 , $|O_2O_3| = l_3$ 段绕 O_2-x_2 轴旋转任意角度 q_3 ; 第 4 个自由度, $|O_3P| = s$ 段可绕 O_3-y_3 轴旋转任意角度 q_4 。试确定 P 点的运动轨迹。

坐标系 $S_1 \rightarrow S$ 齐次变换矩阵为

$$M_{01} = \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 & l_1 \\ \sin q_1 & \cos q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

连乘上述矩阵, 即可得到 P 点在坐标系 S 中的轨迹方程

$$p = M_{01} M_{12} M_{23} p_3$$

$$= \begin{bmatrix} x_3 \cos q_1 - y_3 \sin q_1 \cos(q_2 + q_3) - z_3 \sin q_1 \sin(q_2 + q_3) + l_1 - (l_2 + l_3 \cos q_2) \sin q_1 \\ x_3 \sin q_1 + y_3 \cos q_1 \cos(q_2 + q_3) + z_3 \cos q_1 \sin(q_2 + q_3) + (l_2 + l_3 \cos q_2) \cos q_1 \\ -y_3 \sin(q_2 + q_3) + z_3 \sin(q_2 + q_3) \end{bmatrix}$$

如果求解上述问题的逆命题, 已知 P 点的运动轨迹或位置坐标, 求机械手运动的转角 (q_1, q_2, q_3, q_4) , 利用上式也是可以确定的。

最后要说明一下: 对于复合变换一定要注意矩阵的相乘顺序, 左乘右乘结果是不同的; 自由矢量变换使用旋转映射即可, 径矢或点的坐标变换则需使用齐次映射。

1.2 曲线族和曲面族的包络

1.2.1 平面曲线族的包络

用平面数控机床加工一凸轮 A , 如图 1-4 所示, 设指形铣刀的半径为 a , 圆心沿一条曲线 L 移动, 指形铣刀滚动成一圆族 $\{B_k\}$, 铣出凸轮轮廓线 C , 曲线 C 上每一点都与曲线族 $\{B_k\}$ 相切, 则把 C 曲线称为圆族曲线 $\{B_k\}$ 的包络线。

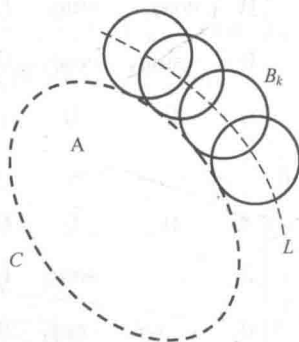


图 1-4 凸轮轮廓的包络

1. 定义

设一平面曲线族 $\{C_\lambda\}$, 若存在另一条平面曲线 C , 对于 C 上的每一点, 在曲线族 $\{C_\lambda\}$ 中都有唯一的一条曲线 C_λ 在该点 P_λ 与曲线 C 相切, 则称曲线 C 为曲线族 $\{C_\lambda\}$ 的包络, 如图 1-5 所示。

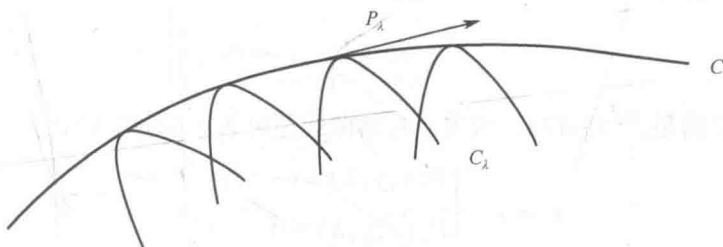


图 1-5 曲线族的包络

例 1-2 圆心在 x 轴上、半径为 1 的圆族 $\{C_\lambda\}$ 的方程是 $(x - \lambda)^2 + y^2 = 1$, 求其包络线方程。

解 因圆心沿 x 轴做直线运动, 其包络线就是平行于 x 轴的两直线: $y = \pm 1$ (图 1-6)。

这种简单的包络曲线, 可以直观地观察出来。对于较复杂的曲线, 则需要应用下述的方法求解。

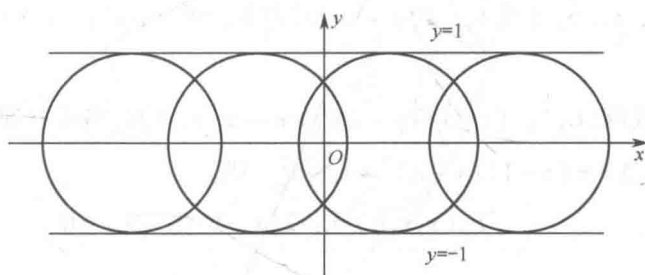


图 1-6 曲线族的包络

2. 包络线求法

记曲线族 $\{C_\lambda\}$ 的方程为

$$\mathbf{r} = \{x(t, \lambda), y(t, \lambda)\}$$

若其包络曲线 C 存在, 则必满足

$$\begin{cases} \mathbf{r} = \{x(\lambda), y(\lambda)\} = \{x(t, \lambda), y(t, \lambda)\} \\ x_t y_\lambda - x_\lambda y_t = 0 \end{cases} \quad (1-17)$$