高等代数

主　编　刘　丽　韩本三
副主编　吴　曦　赵建容　高雪梅

科学出版社

高等代数

主 编 刘 丽 韩本三
副主编 吴 曦 赵建容 高雪梅

科学出版社
北 京

内 容 简 介

本书是大学本科非理科专业必修课“高等代数”课程教材. 全书共九章: 行列式、矩阵、线性方程组与 n 维向量空间、矩阵的特征值与特征向量、二次型、多项式、线性空间、线性变换、欧氏空间. 本书将特征值与特征向量分为矩阵的特征值与特征向量(第四章)和线性变换的特征值与特征向量(8.4 节)两部分, 力求使得只修高等代数Ⅰ(第一章至第五章)的学生学完非数学类专业考研数学二、三的全部代数内容. 本书按节配置了习题, 每章还配置了(A)与(B)两组习题, (A)组题是填空题与单项选择题, (B)组题是综合练习题. 带*的习题是有一定难度的, 读者可根据自己的情况选做.

本书可作为非数学类专业学生考研复习代数的参考书, 也可作为学习线性代数的学生进一步学习高等代数的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等代数/刘丽, 韩本三主编. —北京: 科学出版社, 2018.8

ISBN 978-7-03-057814-3

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①刘… ②韩… Ⅲ. ①高等代数-教材 Ⅳ. ①O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 126978 号

责任编辑: 李 萍 李淑丽 / 责任校对: 王瑞
责任印制: 霍 兵 / 封面设计: 华路天然工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com
三河市宏图印务有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2018 年 8 月第 一 版 开本: 787×1092 1/16
2018 年 8 月第一次印刷 印张: 19 1/2
字数: 463 000

定价: 54.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　言

本书是应西南财经大学代数课程改革的需求而编写的，西南财经大学本科非理科专业代数课程现由高等代数Ⅰ与高等代数Ⅱ组成，分两学期完成，但是部分专业学生只修高等代数Ⅰ(第一章至第五章)，高等代数Ⅱ(第六章至第九章)是为数理基础要求高的专业以及希望进一步学习代数知识的学生开设的. 传统的高等代数教材是在线性变换一章中讲特征值与特征向量，而线性变换是在高等代数Ⅱ部分. 矩阵的特征值与特征向量和二次型是非数学类专业学生考研的必考内容，传统的高等代数教材使得只修高等代数Ⅰ的学生将缺失这部分内容. 为了使这部分学生能学完研究生考试数学二、三的代数内容，本书的编写做了新的尝试，将特征值与特征向量的内容分为两部分：矩阵的特征值与特征向量、线性变换的特征值与特征向量. 矩阵的特征值与特征向量和二次型作为第四章、第五章放在高等代数Ⅰ部分，这就使只修高等代数Ⅰ的学生能在一学期的学习中学完考研的全部代数内容. 线性变换的特征值与特征向量放在第八章线性变换中，这样继续学习高等代数Ⅱ的学生就能更完整、深入地学习特征值与特征向量的进一步知识.

本书编写的内容包括行列式、矩阵、线性方程组与 n 维向量空间、矩阵的特征值与特征向量、二次型、多项式、线性空间、线性变换、欧氏空间. 本书教学时间大约需要 140 课时，教师在授课时也可根据实际情况对这些内容做适当的取舍.

高等代数是理工科、经济管理类专业的基础课，我们希望在本课程中加强基础知识、基础理论和基本方法的教学，希望在本课程教学的同时既丰富学生的知识也提高学生的能力，因此本书收集了大量的例题和习题供教师讲解和学生练习. 各节后均配有相应的习题，这是学习各节内容后必须掌握的基本题. 各章后还配有(A)，(B)两组习题，(A)组题是填空题与单项选择题，(B)组题是综合练习题，以供读者学完各章后进行复习.

本书是为我校非数学类专业的高等代数课程而编写的，也可作为其他专业的高等代数课程教材.

本书原有的基础是西南财经大学出版社出版、刘丽编写的《高等代数》，参加本书编写的有：赵建容、吴曦、高雪梅、刘丽、韩本三. 第一、二章由赵建容编写，第三章由吴曦编写，第四、五章由高雪梅编写，第六、八章由刘丽编写，第七、九章由韩本三编写，全书由刘丽和韩本三统稿.

本书在编写过程中得到了西南财经大学经济数学学院领导以及同行们的大力支持，在此对他们表示衷心感谢.

由于编者水平有限，加之时间仓促，书中不当之处在所难免，真诚希望专家、同行和读者赐教与指正.

编　者

2018 年 3 月于西南财经大学

目 录

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2\end{cases}\tag{1.2}$$

可得: 当$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$时, (1.2)式有唯一解

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\tag{1.3}$$

于是可以用公式(1.3)来解方程组(1.2). 但是(1.3)不容易记住. 记

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\tag{1.4}$$

并称(1.4)式为一个 2 阶行列式. 那么可以按此规律, (1.2)的解可表示为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}b_1&a_{12}\\b_2&a_{22}\end{vmatrix}}{D}=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix}a_{11}&b_1\\a_{21}&b_2\end{vmatrix}}{D}=\frac{D_2}{D}$$

这相对于(1.3)就容易记住了. 进一步地, 对于三元一次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}\tag{1.5}$$

引入 3 阶行列式

$$\begin{aligned}D&=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\\&=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}\end{aligned}$$

用消元法可解得: 当$D\neq 0$时, (1.5)式有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&a_{13}\\b_2&a_{22}&a_{23}\\b_3&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1&a_{13}\\a_{21}&b_2&a_{23}\\a_{31}&b_3&a_{33}\end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{21}&a_{22}&b_2\\a_{31}&a_{32}&b_3\end{vmatrix}$$

因此, 推广到解 n 个方程的 n 元线性方程组, 可引进 n 阶行列式的概念. 注意到 3 阶行列式的一般项是$\pm a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$, 当 j_1,j_2,j_3 取遍 1, 2, 3 的所有排列时, 就得到了 3 阶行列式的全部项, 3 项带正号, 3 项带负号, 各项符号与 j_1, j_2, j_3 的顺序有关.

为此, 我们需要先介绍 n 级排列的一些知识.

三、排列

定义 1.2 由自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的全排列称为 n 级排列, 记作 $i_1i_2\cdots i_n$.

显然 n 级排列共有 $n!=1\times 2\times\cdots\times n$ 个.

n 级排列中任意两个数, 如果大数排在小数之前, 那么称这两个数构成一个**逆序**, 否则称

为**顺序**. 一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序总数称为此排列的**逆序数**, 记作 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$. 逆序数为奇数的排列称为**奇排列**; 逆序数为偶数的排列称为**偶排列**. 因为 $\tau(12\cdots n)=0$, 所以排列 $12\cdots n$ 是偶排列. 我们称此排列为自然排列.

在计算排列的逆序数时, 为了不重复和不漏掉, 可从排列的第一个数开始计算它与后面的数构成的逆序数, 然后再将这些逆序数相加即可得排列的逆序数.

例 1 求下列排列的逆序数并确定其奇偶性.

(1) 45213 (2) 35214

(3) $n(n-1)\cdots 321$ (4) $24\cdots(2n)13\cdots(2n-1)$

解 (1) 在排列 45213 中, 数 4 与后面的数构成 3 个逆序, 数 5 与后面的数构成 3 个逆序, 数 2 与后面的数构成 1 个逆序, 数 1 与后面的数没有构成逆序, 数 3 后面没有数. 因此 $\tau(45213)=3+3+1+0+0=7$, 该排列为奇排列.

(2) $\tau(35214)=2+3+1+0+0=6$, 该排列为偶排列.

(3) $\tau(n(n-1)\cdots 321)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

或者根据该排列中任何两个数组成的数对都构成逆序(通常称此排列为完全逆序排列), 计算出该排列所有可能组成的数对的个数, 它就是排列的逆序数, 即

$$\tau(n\cdots 321)=\mathrm{C}_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$$

当 $n=4k$ 或 $n=4k+1(k=0,1,2,\cdots)$时, 此排列为偶排列; 当 $n=4k+2$ 或 $n=4k+3(k=0,1,2,\cdots)$时, 此排列为奇排列.

(4) $\tau(24\cdots(2n)13\cdots(2n-1))=1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$. 其奇偶性讨论同(3)中排列的奇偶性讨论.

n 级排列中互换两数的位置称为一次**对换**. 若互换的是相邻两数, 则称作**相邻对换**.

注意到例 1 中排列(2)是由排列(1)互换 3 和 4 而得到的. 结果(1), (2)两个排列具有不同的奇偶性. 一次对换是否一定改变排列的奇偶性呢? 对此有以下的结论.

定理 1.1 一次对换改变排列的奇偶性.

证 (1) 相邻对换情形. 设 n 级排列

$$\cdots jk\cdots$$

互换 j, k 两数, 经相邻对换后排列变成

$$\cdots kj\cdots$$

其中"…"表示那些在变换中不动的数.

显然, 这一变化只使 j, k 两数间的"序"发生变化: 若它们原来为逆序, 则变换后为顺序; 若原来为顺序, 则变换后为逆序. 而它们与其余任意数间的序都保持不变, 变换前后两个排列的逆序数只是多 1 或少 1, 从而一次相邻对换改变排列的奇偶性. 由此还可得出: 作奇数次相邻对换改变排列的奇偶性; 作偶数次相邻对换不改变排列的奇偶性.

(2) 不相邻对换情形. 设 n 级排列

$$\cdots ji_1i_2\cdots i_sk\cdots$$

直接互换 j, k 两数后排列变成

$$\cdots k i_1 i_2 \cdots i_s j \cdots$$

这一结果可通过相邻对换后得到. 首先将原排列中的数 j 依次与其后的 $i_1 \cdots i_s k$ 作 $s+1$ 次相邻对换变后为

$$\cdots i_1 i_2 \cdots i_s k j \cdots$$

再将数 k 依次与其前面的 $i_s \cdots i_1$ 作 s 次相邻对换后得

$$\cdots k i_1 i_2 \cdots i_s j \cdots$$

这一结果是经过奇数次($2s+1$ 次)相邻对换所得, 因此排列的奇偶性改变.

推论 在全部 $n!$ 个 $n(n \geqslant 2)$ 级排列中, 奇排列、偶排列各占一半.

证 设全部 n 级排列中, 奇排列、偶排列个数分别为 s 和 t. 因为将每个奇排列的前两个数作对换, 即可得到 s 个不同的偶排列, 从而 $s \leqslant t$; 同理可得 $t \leqslant s$. 于是 $s=t$, 即奇偶排列各占一半.

容易证明(证略): 任意 n 级排列都可经有限次对换变成自然排列.

四、n 阶行列式定义

定义 1.3 将 n^2 个数 $a_{ij}(i, j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行 n 列, 记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

它表示所有位于不同行及不同列的 n 个元素乘积的代数和, 当这 n 个元素的行标按自然顺序排列时, 各项以列标排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数的奇偶性按下式冠以符号:

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)}$$

即列标排列为偶排列时带正号, 列标排列为奇排列时带负号, 称 D 为 n 阶行列式, 即 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \cdots a_{n j_n} \tag{1.6}$$

其中符号“$\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$”表示对全部 n 级排列求和. 称行列式从左上角至右下角的对角线为**主对角线**, 从右上角至左下角的对角线为**副对角线或次对角线**.

由于全部 n 级排列共 $n!$ 个, 所以 n 阶行列式的展开式共有 $n!$ 项.

当行列式的元素全是数域 P 中的数时, 行列式的值也是数域 P 中的数.

当 $n=1$ 时, 1 阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$. 为了不与绝对值混淆, 今后直接用数表示.

当 $n=2$ 时, 2 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=(-1)^{\tau(12)} a_{11} a_{22}+(-1)^{\tau(21)} a_{12} a_{21}=a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}$$

2 阶行列式的展开式等于主对角线上两个元素的乘积减去副对角线上两个元素的乘积.

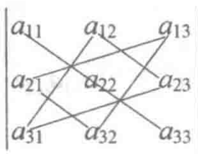
当 $n=3$ 时, 3 阶行列式

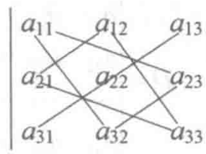
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(123)} a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^{\tau(231)} a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^{\tau(312)} a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$+(-1)^{\tau(321)} a_{13}a_{22}a_{31} + (-1)^{\tau(132)} a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)^{\tau(213)} a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

事实上, 由于 2, 3 阶行列式的展开式分别只有 2 项和 6 项, 其符号规律比较容易掌握, 读者不妨自己总结并牢记. 下图展示了 3 阶行列式中正项与负项的构成规则:

正项: 

负项: 

例 2 4 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中是否有 $a_{12}a_{24}a_{31}a_{41}$ 与 $a_{23}a_{31}a_{12}a_{44}$ 这两项, 如果有, 应带什么符号?

解 $a_{12}a_{24}a_{31}a_{41}$ 的元素的行标构成自然排列, 只需看列标的排列. 因 2411 不是 1, 2, 3, 4 的 4 级排列, 即 $a_{12}a_{24}a_{31}a_{41}$ 不是 D 的位于不同行不同列的 4 个元素的乘积, 所以 4 阶行列式中没有 $a_{12}a_{24}a_{31}a_{41}$ 这一项; $a_{23}a_{31}a_{12}a_{44}$ 的行标 2314 和列标 3124 均是 1, 2, 3, 4 的 4 级排列, 所以 $a_{23}a_{31}a_{12}a_{44}$ 是 D 的位于不同行不同列的 4 个元素的乘积, 因此 4 阶行列式中有 $a_{23}a_{31}a_{12}a_{44}$ 这一项. 当 $a_{23}a_{31}a_{12}a_{44}$ 按照行标自然顺序我们可得 $a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$. 由于 $(-1)^{\tau(2314)}=1$, 所以这一项带正号.

例 3 计算下列行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

分析 因为求和时只需找出非零项, 所以只需找出行列式展开式中的可能非零的项.

解 根据行列式的定义可知, D 可能的非零项在第 n 行中的元素只能取 a_{nn}, 在第 $n-1$ 行中的元素只能取 $a_{n-1,n-1}, \cdots$, 在第 1 行中的元素只能取 a_{11}. 于是行列式 D 可能的非零项只有 1 项: $a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1}a_{nn}$. 从而

$$D = (-1)^{\tau(12\cdots n)} a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

类似于例 3 的解法, 可得

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

称主对角线以上的元全为零元的行列式为**下三角行列式**. 主对角线以下的元全为零元的行列式为**上三角行列式**. 上、下三角行列式统称为**三角行列式**.

例 3 以及上面结果表明: 三角行列式等于其主对角线上元素的乘积.

最后, 我们给出 n 阶行列式的另一定义.

定义 1.4

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{i_1 i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1 i_2\cdots i_n)}a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n} \tag{1.7}$$

有兴趣的读者可以证明(1.6)和(1.7)式右端的展开式完全相同, 从而证明定义 1.3 与定义 1.4 完全等价.

习题 1.1

1. 求以下排列的逆序数, 并指出排列的奇偶性:

(1) 14253　　(2) 528497631

(3) $135\cdots(2n-1)\,246\cdots(2n)$　　(4) $24\cdots(2n)(2n-1)(2n-3)\cdots 31$

2. 确定 i,j, 使下面的 8 级排列为偶排列:

(1) $62i418j3$　　(2) $4i13j765$

3. 证明: $\tau(i_1i_2\cdots i_{n-1}i_n)+\tau(i_ni_{n-1}\cdots i_2i_1)=\dfrac{n(n-1)}{2}=\mathrm{C}_n^2$.

4. 确定 i,j, 使

(1) $a_{13}a_{29}a_{37}a_{42}a_{5i}a_{61}a_{75}a_{8j}a_{94}$ 为 9 阶行列式 $|a_{ij}|$ 带负号的项;

(2) $a_{12}a_{21}a_{3i}a_{43}a_{57}a_{68}a_{7j}a_{84}a_{96}$ 为 9 阶行列式 $|a_{ij}|$ 带正号的项.

5. 计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & x & -1 \\ 3 & 0 & x \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 5 \end{vmatrix}$　　(4) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ (6) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

1.2 行列式的性质

由行列式的定义可知，一个 n 阶行列式的展开式有 $n!$ 项. 不难想到，当 n 较大时，这是一项多么烦琐的计算！因此寻找行列式的计算规律，并利用这些规律来简化行列式的计算，便成为行列式研究的重要课题. 本节将讨论行列式的性质，并利用行列式的性质计算行列式.

一、行列式的性质

设 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，称将 D 中的行、列依次互换后所得到的行列式为 D 的**转置行列式**，记作 D^{T}，即

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 1 n 阶行列式等于它的转置行列式，即 $D^{\mathrm{T}}=D$.

证 设行列式 D^{T} 中位于第 i 行、第 j 列的元素为 b_{ij}，即 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，则

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

由定义 1.3 和定义 1.4 知

$$D^{\mathrm{T}}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}=D$$

性质 1 表明，行列式有关行的性质对列亦成立. 因此下面几个性质中，只需要证明行的性质或者列的性质就足够了.

性质 2 互换行列式中两行(列)的对应位置元素，行列式变号.

证 设 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

我们将 D 的第 s 行与第 t 行($1\leqslant s<t\leqslant n$)互换可得行列式 D_1，并设

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{记作}} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{t1} & b_{t2} & \cdots & b_{tn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

则有 $b_{sj}=a_{tj}, b_{tj}=a_{sj}, b_{ij}=a_{ij}\,(i\neq s,t; j=1,2,\cdots,n)$. 进而由(1.6)可推得

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n)}b_{1j_1}\cdots b_{sj_s}\cdots b_{tj_t}\cdots b_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{tj_s}\cdots a_{sj_t}\cdots a_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{sj_t}\cdots a_{tj_s}\cdots a_{nj_n} \\ &= -\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{sj_t}\cdots a_{tj_s}\cdots a_{nj_n} \\ &= -D \end{aligned}$$

将性质 2 用于有两行对应位置元素完全相同的行列式 D 上：互换 D 中相同的两行，得 $D=-D$，从而 $D=0$. 我们将此结果叙述成如下.

推论　有两行(列)对应位置元素相同的行列式等于零.

证　设行列式 D 中有两行对应位置元素相同，互换 D 中这相同的两行，得 $D=-D$，从而 $D=0$.

性质 3　数 k 乘以行列式中某行(列)等于数 k 乘以行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证　设

$$D_1=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix},\quad D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

由(1.6)可得

$$D_1=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n}=k\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}=kD$$

推论 1 若行列式 D 的某一行(列)的对应位置元素全为零, 则 D 等于零.

推论 2 若行列式 D 的某两行(列)的对应位置元素成比例, 则 D 等于零.

性质 4 若行列式 D 中某行(列)的每个元素均表示为两数之和, 则 D 可拆分成两个行列式:

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

证 由(1.6)可得

$$\begin{aligned}D&=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(b_{ij_i}+c_{ij_i})\cdots a_{nj_n}\\ &=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots b_{ij_i}\cdots a_{nj_n}+\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots c_{ij_i}\cdots a_{nj_n}\\ &=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\end{aligned}$$

读者可根据性质 4 及性质 3 的推论 2, 容易得出行列式计算中应用最多的性质.

性质 5 将行列式中某行(列)元素的 k 倍加到另一行(列)的对应位置元素上, 行列式的值不变, 即

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{s1}+ka_{t1} & a_{s2}+ka_{t2} & \cdots & a_{sn}+ka_{tn}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

二、行列式的计算

行列式的性质如何能简化行列式的计算呢? 回顾上节中的例 3, 上、下三角行列式都等于其

主对角线元素的乘积. 因此应用行列式的性质将行列式化为三角行列式, 就能容易地算出结果.

为了清楚地反映行列式的变化过程, 特规定以下记号:

“$r_i \leftrightarrow r_j$” 表示将行列式的第 i, j 行对调;

“$r_i + kr_j$” 表示将行列式的第 j 行的 k 倍加到第 i 行.

此外约定, 对行列式的列施行的类似变化只需将上述记号中的字母 “r” 换作 “c” .

例如, “$c_1 - 2c_4$” 表示将第 4 列的(−2)倍加到第 1 列; “$r_4 + r_1 + r_2 + r_3$” 表示将第 1, 2, 3 行都加到第 4 行上去.

例 1 计算 $D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

解
$$D \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 - 3r_1]{r_2 - 2r_1,\, r_3 + 3r_1} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 2 & -6 & -7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3 + r_2,\, r_4 + 2r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -14 & -17 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -14 & -17 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4 + 14r_3} 3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -9.$$

例 2 计算 n 阶$(n \geqslant 2)$行列式

$$D = \begin{vmatrix} a-b & a & a & \cdots & a \\ a & a-b & a & \cdots & a \\ a & a & a-b & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

分析 在计算行列式时要注意观察其元素的特点, 如果行列式每行元素之和相等, 则可先将行列式的各列加在一起. 这个行列式每行元素之和都是 $na - b$, 于是可按此法进行.

解 将第 2, 3, $\cdots$, n 列加到第一列, 然后提取公因子, 再化为三角形:

$$D \xlongequal{c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n} \begin{vmatrix} na-b & a & a & \cdots & a \\ na-b & b & a & \cdots & a \\ na-b & a & b & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ na-b & a & a & \cdots & b \end{vmatrix}$$

$$
=(na-b)\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 1 & a-b & a & \cdots & a \\ 1 & a & a-b & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a & a & \cdots & a-b \end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i-r_1}\begin{vmatrix} na-b & a & a & \cdots & a \\ 0 & -b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -b \end{vmatrix}
$$

$$
=(-b)^{n-1}(na-b)
$$

例 3 计算 n 阶 $(n\geqslant 2)$ 行列式

$$
D=\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix} \quad (x_i\neq a_i, i=1,2,\cdots,n)
$$

解

$$
\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_i-r_1}\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1-x_1 & x_2-a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1-x_1 & 0 & x_3-a_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1-x_1 & 0 & 0 & \cdots & x_n-a_n \end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal[i=1,\cdots,n]{\text{第}i\text{列提}x_i-a_i}\prod_{i=1}^{n}(x_i-a_i)\begin{vmatrix} \frac{x_1}{x_1-a_1} & \frac{a_2}{x_2-a_2} & \frac{a_3}{x_3-a_3} & \cdots & \frac{a_n}{x_n-a_n} \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}
$$