新世纪高等学校教材

"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材

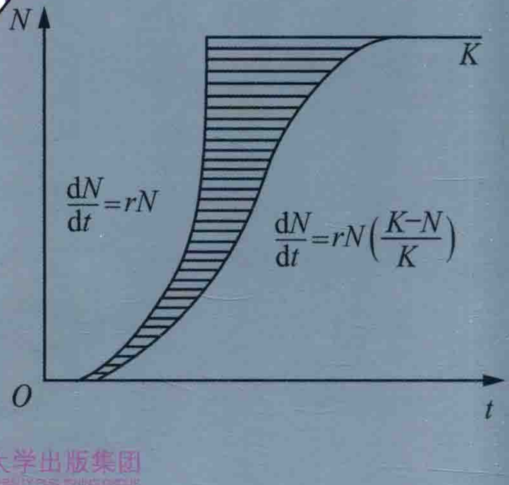
大学公共课系列教材

GAODENG SHUXUE C

李仲来　王存喜　宣体佐　编著

北京师范大学数学科学学院　主编

高等数学C（下册）（第3版）



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

新世纪高等学校教材

"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材

大学公共课系列教材

北京师范大学数学科学学院 主编

高等数学C（下册）（第3版）

GAODENG SHUXUE C

李仲来 王存喜 宣体佐 编著

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学C. 下册/李仲来，王存喜，宣体佐编著．—3版．—北京：北京师范大学出版社，2015.7

（新世纪高等学校教材　数学公共课系列教材）

ISBN 978-7-303-18717-1

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①李…②王…③宣…　Ⅲ．①高等数学-高等学校-教材　Ⅳ．①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第047065号

营销中心电话　010-58802181　58805532
北师大出版社高等教育分社网　http://gaojiao.bnup.com
电子信箱　gaojiao@bnupg.com

出版发行：北京师范大学出版社　www.bnup.com
北京新街口外大街19号
邮政编码：100875

印　刷：大厂回族自治县正兴印务有限公司
经　销：全国新华书店
开　本：170 mm×230 mm
印　张：19
字　数：340千字
版　次：2015年7月第3版
印　次：2015年7月第6次印刷
定　价：30.00元

策划编辑：岳昌庆　　责任编辑：岳昌庆
美术编辑：焦　丽　　装帧设计：焦　丽
责任校对：陈　民　　责任印制：陈　涛

第 3 版作者的话

高等数学是最有用、最实用的数学．一个人从小学到中学要学习 12 年的数学，到大学还要学习 3～4 学期的高等数学(含生物统计或概率统计)．以后你们会发现，在从事科学研究或工作中碰到的最多问题可能还是数学．大学数学里的概念，比中学里不知多多少倍，大学数学的计算量，一般也比中学里大很多．希望你们在大学期间，掌握自学数学的能力，掌握较为完备的基础知识，比较深刻地认识到数学与其他学科的不同点．要刻苦学习高等数学，努力掌握它的基本概念、基本定理和基本方法．

根据第 2 版的使用情况，第 3 版除了对上一版发现的不足进行修改外，还作了如下增删：删去单元小结和综合例题；删去第 1 章(函数)中常量、变量、区间、实数的绝对值、函数记号与求函数值；删去第 11 章中对弧长的曲线积分、对坐标的曲线积分、格林公式及其应用、曲线积分与路径无关的条件．增加函数的最大值和最小值的定义；增加用定义求指数函数的导数；删去用定义求两函数之商的导数，改为利用两函数之积的导数公式来求；考虑到高中新课程将极坐标仅作为选修 4-4 的内容，增加 §6.6 极坐标；增加无穷限广义积分的审敛法和无界函数的广义积分的审敛法；增加索引．

本书第 1 版(1990)上册由宣体佐编写，下册由王存喜编写．第 2 版(2007)和第 3 版由李仲来修订．

李仲来

2014-09-08

第 2 版作者的话

根据连续对 8 届生命科学学院本科生讲授“高等数学”的教学实践和从事生物数学科学研究的体会，本教材在下册的修改中，在第 7 章(级数)中，增加调和数列的定义、比较判敛法的极限形式，在 §7.6 中，把 Taylor 公式(Taylor 中值定理)与 Taylor 级数综合编写，以便强化 Taylor 级数的应用；考虑到小波分析是图像处理的重要工具之一，是在 Fourier级数的基础上进行研究，本章补充了 Fourier 级数. 删去函数项级数的一致收敛性一节. 在第 8 章(常微分方程)中，增加 Logistic 模型的介绍和求解，鸭子过河运动轨迹的微分方程，和 §8.7 的例 4. 在第 9 章(空间解析几何与向量代数)中，增加点到平面的距离公式，双曲抛物面、单叶双曲面和双叶双曲面. 在第 10 章(多元函数的微分法及其应用)中，增加 §10.10 最小二乘法. 在第 11 章(多元函数的积分法及其应用)中，对 §11.2 中例 3 和综合例题(一)中的例 1 的第(2)小题，分别给出了用分部积分法求解的另一种方法. 在第 12 章(行列式与矩阵简介)中，增加莱斯利矩阵，即具年龄结构的种群增长模型，删去线性方程组的消元解法和迭代解法两节. 并对书中若干内容，包括练习题，进行了调整、修改和补充.

本书第 2 版由李仲来修订.

我从 1986 年开始从事预防医学课题研究，1989 年开始在医学杂志上发表论文，1990 年 2 月开始讲授“生物统计”至今(1993 年未讲)，1991 年从生态学角度进行研究，1993 年开始在生物学杂志上发表论文. 已在医学杂志上发表论文 66 篇(独立和第 1 作者 46 篇)，生物学杂志 39 篇(独立和第 1 作者 30 篇). 已培养生物数学研究生 29 人. 对数学在生物学中

的应用有一定深度的了解和理解，我试图将其贯彻落实在课堂教学和教材的写作中，并将“高等数学”和“生物统计”的教学内容和体系统一考虑，为此作了很大的努力. 但是，如何结合生命科学学院/生物系的专业特点和知识需要，做到既能够联系生物学专业知识，在数学上，又要不牺牲数学知识的系统性，并且表达清楚其基本概念，是需要认真解决的一个重要问题. 做得好了，就是在发展和宣传应用数学. 在外院系教学则是一个完全可以充分利用的一个优越条件. 在 8 年中，我连续不断地坚持讲授“高等数学”，下决心写出 3 本教材：《高等数学》(上、下册)和《生物统计》. 同时，我认为：数学科学学院在安排教学时，应考虑同一教师在 3～5 年里能够稳定地上同一门课，并参与到教材的编写或修订工作中去. 若能够和所讲课的院系专业知识相结合，则更好. 尽可能做到：不要一位教师今年在一个院系教高等数学，明年在另一个院系教. 这是说起来容易做起来难的事.

本书的出版得到了北京师范大学出版社的大力支持和热情帮助，在此表示衷心的感谢.

本书的错误和不足之处在所难免，恳请使用本教材的老师和同学们以及其他读者提出批评和修改意见.

本教材可供高等院校生命科学学院/生物系本科生、教育学院生物系、函授(生物专业)和在职中学教师等使用和参考.

李仲来

2007-08-08

目 录

第 10 章 多元函数的微分法及其应用 /142

第 7 章　级　数

级数是高等数学课程的一个重要组成部分，它是表示函数、研究函数的性质以及进行数值近似计算的一种有力工具.

本章首先介绍常数项级数，然后介绍一类最重要的函数项级数：幂级数.

§7.1　级数的概念及性质

7.1.1　级数的概念

人们在认识客观事物的数量特征时，常常会遇到由有限到无限多个数量相加的问题. 例如，人们最初在计算圆的面积时并不知道圆的面积公式 πR^2，而只是用圆内接正多边形的面积去近似它.

在半径为 R 的圆内作一个正三角形，其面积为 u_1（如图 7.1 中的阴影部分），我们可用 u_1 作为圆面积的第 1 个近似值. 又以所得正三角形各边为底，作顶点在圆周上的等腰三角形，其面积为 u_2（如图 7.2 中的阴影部分），我们可用 $u_1 + u_2$ 作为圆面积的第 2 个近似值. 再以所得正六边形各边为底，作顶点在圆周上的等腰三角形，其面积为 u_3（如图 7.3 中的阴影部分），我们可用 $u_1 + u_2 + u_3$ 作为圆面积的第 3 个近似值. 这样继续下去，我们可以得到圆面积的第 n 个近似值

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

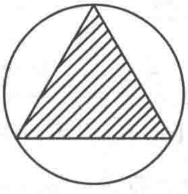


图　7.1

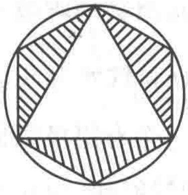


图　7.2

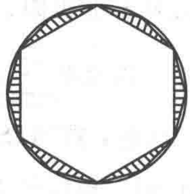


图　7.3

用 S_n 表示圆面积的第 n 个近似值，于是圆面积的近似值就表示为有限个数相加的和式

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

不难看出，当 n 无限增大（$n \to +\infty$）时，S_n 就无限逼近于圆的面积，故圆的面积 πR^2 就是当 $n \to +\infty$ 时，数列

$$S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$$

的极限.

有了上述直观认识，我们可以得到级数的概念及其敛散性的定义.

定义 1 设已知数列为

$$u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$$

则数列各项依次相加的和式

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

称为(常数项) **级数**(series of constant term)，记为$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$，即

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

其中第 n 项 u_n 称为级数的**一般项**(general term).

从这个定义可以看出级数与数列的区别与联系:级数不是数列，而是数列各项依次相加的和式，这个和式不是有限项相加，而是无限项相加，故级数又称**无穷级数**(infinite series).

怎样理解级数中无穷多项的相加?它们相加的和是什么?如果一项一项加下去是加不完的，而我们只知道有限个数的相加方法.如何解决这个问题?我们想到了微积分的基本概念:极限，通过极限过程就可以实现从有限项相加到无限项相加的转化.

作级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 的前 n 项和 $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$，称 S_n 为级数的**部分和**(partial sums).当 n 依次取 $1, 2, \cdots, n, \cdots$ 时，就构成一个部分和的数列

$$S_1 = u_1, S_2 = u_1 + u_2, \cdots, S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \cdots$$

根据这个数列有无极限，就可引进级数的收敛与发散概念.

定义 2 设级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 的部分和数列为 $S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$，若当 n 无限增大($n \to +\infty$)时，数列$\{S_n\}$趋于一个有限极限值 S，即 $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = S$，则称级数**收敛**(convergent).极限值 S 称为**级数的和**(sum of series)，即 $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$. 这时 S 与 S_n 的差 $S - S_n = r_n$ 称为级数的**余项**(remainder term).若当 n 无限增大($n \to +\infty$)时，数列$\{S_n\}$不存在有限极限，则称级数**发散**(divergent).

这个定义说明，级数存在着收敛与发散两种可能.只有在收敛前提下，级数才有和的概念，即收敛级数中无穷多项才能相加.这时，级数的部分和才可当作级数和的近似值，即当 n 充分大时，S_n 与 S 相差可任意小，其误差就是余项的绝对值 $|r_n|$.

例 1 证明**算术级数**(arithmetical series)$\sum_{n=1}^{+\infty} n$ 发散.

证 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} n = 1+2+\cdots$，其部分和 $S_n = 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$，由 $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)}{2} = +\infty$，可知这个级数发散.

例 2 级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots$ 称为**几何级数**(geometric series)(或**等比级数**(geometric series))，其中 $a \neq 0$，q 为公比. 试讨论这个级数的敛散性.

解 对 $|q| \neq 1$，有 $S_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1} = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$.

当 $|q| > 1$ 时，由于 $\lim_{n\to+\infty} q^n = \infty$，从而 $\lim_{n\to+\infty} S_n = \infty$，这时级数发散.

当 $|q| < 1$ 时，由于 $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$，从而 $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$，这时级数收敛，其和 $S = \frac{a}{1-q}$.

当 $q = 1$ 时，$S_n = na \to \infty$，这时级数发散.

当 $q = -1$ 时，级数为 $a - a + a - a + \cdots$，S_n 随着 n 的奇偶性分别等于 a 或 0，从而 $\lim_{n\to+\infty} S_n$ 不存在，故级数发散.

总之，几何级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} aq^n$ 的敛散性是：当 $|q| < 1$ 时收敛，当 $|q| \geqslant 1$ 时发散.

几何级数是一个重要且常用的数项级数，利用它的敛散性可以判断许多其他级数的敛散性，因此要牢记它的敛散性结论.

马尔萨斯(Malthas，1766—1834，英国经济学家)认为，人口按几何级数增长，生活资料只能按算术级数增长. 传染病学认为，病毒通过飞沫在空气中传播，被传染的病例在最初阶段按几何级数增长. 在生物学中，种群在一个新环境中按几何级数增长，等等.

7.1.2 级数的基本性质

根据级数的收敛与发散概念，可以得出级数的以下基本性质.

性质 1 若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ 分别收敛于 S 与 T，则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n \pm v_n)$ 收敛于 $S \pm T$.

证 因为 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$，$\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = T$，所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}(S_n \pm T_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n \pm \lim\limits_{n\to+\infty} T_n = S \pm T$. 即 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(u_n \pm v_n)$ 收敛于 $S \pm T$.

性质 1 表明，收敛级数可以逐项相加或逐项相减. 应该注意的是，这个性质仅就收敛级数而言，如果忽略收敛这个条件，那么结论就不正确. 例如一个收敛级数与一个发散级数的和肯定是发散级数；两个发散级数的和可能收敛也可能发散.

性质 2 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛于 S，k 为任一常数，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} ku_n$ 收敛于 kS.

证 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} ku_n$ 的部分和分别是 S_n 和 T_n，则 $T_n = ku_1 + ku_2 + \cdots + ku_n = k(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = kS_n$，于是，$\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = \lim\limits_{n\to+\infty} kS_n = k\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = kS$，表明级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} ku_n$ 收敛于 kS.

易见，若级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 发散，且 $k \neq 0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} ku_n$ 仍发散. 这是因为，若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} ku_n$ 收敛，据性质 2，级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}\cdot ku_n\right)$ 收敛，这与已知 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 发散相矛盾. 由此可知，级数各项乘以任一常数后，其敛散性不变.

性质 3 改变级数的有限项，不影响级数的敛散性.

证 首先证明去掉级数有限项的情况. 设去掉级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 的前 m 项后，级数变为

$$u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{m+n} + \cdots$$

它的部分和为

$T_n = u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{m+n} = (u_1 + u_2 + \cdots + u_{m+n}) - (u_1 + u_2 + \cdots + u_m)$，由于前 m 项的和 $u_1 + u_2 + \cdots + u_m$ 必然是常数，记作 C，所以有 $T_n = S_{m+n} - C$. 这表明 T_n 与 S_{m+n} 相差一个常数 C. 当 $n \to +\infty$ 时，它们或者同时存在极限，或者同时不存在极限，从而对应的两个级数具有共同的敛散性. 这就证明了去掉级数的有限项不改变级数的敛散性.

类似地可以证明，在级数前边加上有限项也不会改变级数的敛散性. 概括说来，改变级数的有限项，不会改变级数的敛散性. 不过应该注意的是，改变收敛级数的有限项后，其和通常是要改变的.

性质 4 若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛，则对其项任意加括号后所成的级数仍收敛，且其和不变.

证 设 $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$，对其项任意加括号后的级数的部分和为 T_n，且有

$T_1 = u_1 + u_2 + \cdots + u_{i_1} = S_{i_1}$，

$T_2 = (u_1 + u_2 + \cdots + u_{i_1}) + (u_{i_1+1} + u_{i_1+2} + \cdots + u_{i_2}) = S_{i_2}$，

……

$$T_n = (u_1 + u_2 + \cdots + u_{i_1}) + (u_{i_1+1} + u_{i_1+2} + \cdots + u_{i_2}) + \cdots + (u_{i_{n-1}+1} + u_{i_{n-1}+2} + \cdots + u_{i_n}) = S_{i_n},$$

可见 $\{T_n\}$ 实际上就是 $\{S_n\}$ 的一个子数列，故由部分和数列 $\{S_n\}$ 的收敛性可知部分和数列 $\{T_n\}$ 也收敛，且极限不变. 这就是性质 4 的结论.

应该注意的是，性质 4 的逆命题不成立. 若加括号后的级数收敛，原级数不一定收敛. 例如级数 $(1-1)+(1-1)+\cdots$ 收敛于 0，但是原级数 $1-1+1-1+\cdots$ 却是发散的. 概括说来，收敛级数可以任意加括号，但是不能任意去括号.

性质 5(级数收敛的必要条件) 若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

证 因为 $S_n = S_{n-1} + u_n$，即 $u_n = S_n - S_{n-1}$，所以有

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to+\infty} S_n - \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

性质 5 的逆否命题：若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 的一般项的极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$，则级数必发散.

人们常常利用性质 5 的逆否命题形式判断某些级数的发散性. 这时只需观察级数的一般项 u_n 是否不趋于零，只要 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$，就可断言级数是发散的.

值得注意的是，性质 5 只是级数收敛的必要条件，而不是收敛的充分条件. 也就是说，即使 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$，也不能断定级数收敛. 例如级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$，易见 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$，但是这个级数发散. 为什么是发散呢?下面的例子给以说明.

定义 3 对数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$，其中 $a_n > 0$. 若 $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}\right)$，$n = 2,3,\cdots$，则称 $\{a_n\}$ 为**调和数列**(harmonic progression).

例如，$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$ 是调和数列.

定义 4 若 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots$ 为等差级数，则 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ 称为**调和级**