



新世纪高等学校教材



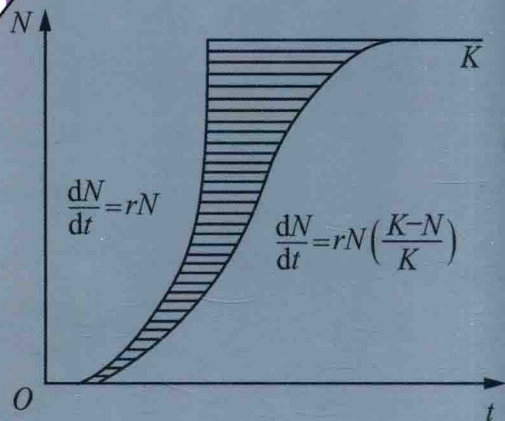
“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

大学公共课系列教材

李仲来 王存喜 宣体佐 编著
北京师范大学数学科学学院 主编

高等数学C (下册) (第3版)

GAODENG SHUXUE C



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社



新世纪高等学校教材



“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

大学公共课系列教材

北京师范大学数学科学学院 主编

高等数学C

(下册)
(第3版)

GAODENG SHUXUE C

李仲来 王存喜 宣体佐 编著



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP

北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 C. 下册/李仲来, 王存喜, 宣体佐编著. —3 版. —北京: 北京师范大学出版社, 2015. 7

(新世纪高等学校教材 数学公共课系列教材)

ISBN 978-7-303-18717-1

I. ①高… II. ①李…②王…③宣… III. ①高等数学-高等学校-教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 047065 号

营销中心电话 010-58802181 58805532

北师大出版社高等教育分社网 <http://gaojiao.bnup.com>

电子信箱 gaojiao@bnupg.com

出版发行: 北京师范大学出版社 www.bnup.com

北京新街口外大街 19 号

邮政编码: 100875

印 刷: 大厂回族自治县正兴印务有限公司

经 销: 全国新华书店

开 本: 170 mm×230 mm

印 张: 19

字 数: 340 千字

版 次: 2015 年 7 月第 3 版

印 次: 2015 年 7 月第 6 次印刷

定 价: 30.00 元

策划编辑: 岳昌庆

责任编辑: 岳昌庆

美术编辑: 焦 丽

装帧设计: 焦 丽

责任校对: 陈 民

责任印制: 陈 涛

版权所有 侵权必究

反盗版、侵权举报电话: 010-58800697

北京读者服务部电话: 010-58808104

外埠邮购电话: 010-58808083

本书如有印装质量问题, 请与印制管理部联系调换。

印制管理部电话: 010-58800825

第3版作者的话

高等数学是最有用、最实用的数学。一个人从小学到中学要学习12年的数学，到大学还要学习3~4学期的高等数学(含生物统计或概率统计)。以后你们会发现，在从事科学研究或工作中碰到的最多问题可能还是数学。大学数学里的概念，比中学里不知多多少倍，大学数学的计算量，一般也比中学里大很多。希望你们在大学期间，掌握自学数学的能力，掌握较为完备的基础知识，比较深刻地认识到数学与其他学科的不同点。要刻苦学习高等数学，努力掌握它的基本概念、基本定理和基本方法。

根据第2版的使用情况，第3版除了对上一版发现的不足进行修改外，还作了如下增删：删去单元小结和综合例题；删去第1章(函数)中常量、变量、区间、实数的绝对值、函数记号与求函数值；删去第11章中对弧长的曲线积分、对坐标的曲线积分、格林公式及其应用、曲线积分与路径无关的条件。增加函数的最大值和最小值的定义；增加用定义求指数函数的导数；删去用定义求两函数之商的导数，改为利用两函数之积的导数公式来求；考虑到高中新课程将极坐标仅作为选修4-4的内容，增加§6.6极坐标；增加无穷限广义积分的审敛法和无界函数的广义积分的审敛法；增加索引。

本书第1版(1990)上册由宣体佐编写，下册由王存喜编写。第2版(2007)和第3版由李仲来修订。

李仲来
2014-09-08

第2版作者的话

根据连续对8届生命科学学院本科生讲授“高等数学”的教学实践和从事生物数学科学研究的体会,本教材在下册的修改中,在第7章(级数)中,增加调和数列的定义、比较判别法的极限形式,在§7.6中,把Taylor公式(Taylor中值定理)与Taylor级数综合编写,以便强化Taylor级数的应用;考虑到小波分析是图像处理的重要工具之一,是在Fourier级数的基础上进行研究,本章补充了Fourier级数.删去函数项级数的一致收敛性一节.在第8章(常微分方程)中,增加Logistic模型的介绍和求解,鸭子过河运动轨迹的微分方程,和§8.7的例4.在第9章(空间解析几何与向量代数)中,增加点到平面的距离公式,双曲抛物面、单叶双曲面和双叶双曲面.在第10章(多元函数的微分法及其应用)中,增加§10.10最小二乘法.在第11章(多元函数的积分法及其应用)中,对§11.2中例3和综合例题(一)中的例1的第(2)小题,分别给出了用分部积分法求解的另一种方法.在第12章(行列式与矩阵简介)中,增加莱斯利矩阵,即具年龄结构的种群增长模型,删去线性方程组的消元解法和迭代解法两节.并对书中若干内容,包括练习题,进行了调整、修改和补充.

本书第2版由李仲来修订.

我从1986年开始从事预防医学课题研究,1989年开始在医学杂志上发表论文,1990年2月开始讲授“生物统计”至今(1993年未讲),1991年从生态学角度进行研究,1993年开始在生物学杂志上发表论文.已在医学杂志上发表论文66篇(独立和第1作者46篇),生物学杂志39篇(独立和第1作者30篇).已培养生物数学研究生29人.对数学在生物学中

的应用有一定深度的了解和理解,我试图将其贯彻落实在课堂教学和教材的写作中,并将“高等数学”和“生物统计”的教学内容和体系统一考虑,为此作了很大的努力.但是,如何结合生命科学学院/生物系的专业特点和知识需要,做到既能够联系生物专业知识,在数学上,又要不牺牲数学知识的系统性,并且表达清楚其基本概念,是需要认真解决的一个重要问题.做得好了,就是在发展和宣传应用数学.在外院系教学则是一个完全可以充分利用的一个优越条件.在 8 年中,我连续不断地坚持讲授“高等数学”,下决心写出 3 本教材:《高等数学》(上、下册)和《生物统计》.同时,我认为:数学科学学院在安排教学时,应考虑同一教师在 3~5 年里能够稳定地上同一门课,并参与到教材的编写或修订工作中去.若能够和所讲课的院系专业知识相结合,则更好.尽可能做到:不要一位教师今年在一个院系教高等数学,明年在另一个院系教.这是说起来容易做起来难的事.

本书的出版得到了北京师范大学出版社的大力支持和热情帮助,在此表示衷心的感谢.

本书的错误和不足之处在所难免,恳请使用本教材的老师和同学们以及其他读者提出批评和修改意见.

本教材可供高等院校生命科学学院/生物系本科生、教育学院生物系、函授(生物专业)和在职中学教师等使用和参考.

李仲来

2007-08-08

目 录

第7章 级数 /1

§ 7.1 级数的概念及性质	1
7.1.1 级数的概念	1
7.1.2 级数的基本性质	3
习题 7.1	8
§ 7.2 正项级数的判敛法	9
习题 7.2	15
§ 7.3 任意项级数的判敛法	16
7.3.1 交错级数的判敛法	16
7.3.2 任意项级数的判敛法	17
习题 7.3	20
§ 7.4 幂级数的概念及其收敛区间	21
7.4.1 函数项级数的一般概念	21
7.4.2 幂级数的概念及其收敛区间的求法 ...	22
习题 7.4	26
§ 7.5 幂级数的性质	27
7.5.1 幂级数的运算性质	27
7.5.2 幂级数的分析性质	28
习题 7.5	30
§ 7.6 泰勒级数与函数的幂级数	31
7.6.1 泰勒公式与泰勒级数	31
7.6.2 函数的幂级数展开的方法	37
习题 7.6	42
§ 7.7 幂级数的应用	43
7.7.1 函数值的近似计算	43
7.7.2 定积分的近似计算	45

7.7.3 欧拉公式	46
习题 7.7	47
§ 7.8* 傅里叶级数	48
7.8.1 三角函数系的正交性	49
7.8.2 周期函数的傅里叶级数	49
7.8.3 正弦级数和余弦级数	54
7.8.4 周期为 $2l$ 的周期函数的傅里叶级数	55
习题 7.8	57

第8章 常微分方程 /58

§ 8.1 微分方程的概念	58
8.1.1 微分方程的概念	58
8.1.2 微分方程的解	59
习题 8.1	61
§ 8.2 一阶微分方程的解法(一)	62
8.2.1 可分离变量的一阶微分方程	62
8.2.2 齐次微分方程	66
8.2.3* 可化为齐次的一阶微分方程	69
习题 8.2	71
§ 8.3 一阶微分方程的解法(二)	72
8.3.1 一阶线性微分方程	72
8.3.2 伯努利方程	74
习题 8.3	76
§ 8.4 特殊高阶微分方程的解法	77
习题 8.4	80
§ 8.5 线性微分方程的通解结构	81
8.5.1 二阶齐次线性微分方程的通解	81
8.5.2 二阶非齐次线性微分方程的通解	82
习题 8.5	83
§ 8.6 二阶常系数齐次线性微分方程的解法	84
习题 8.6	87
§ 8.7 二阶常系数非齐次线性微分方程的解法	88
8.7.1 $f(x)=e^{\alpha x} p_m(x)$ 型	88
8.7.2 $f(x)=e^{\alpha x} (p_l(x) \cos \beta x + p_n(x) \sin \beta x)$ 型	90
习题 8.7	93

§ 8.8* 欧拉方程的解法	94
习题 8.8	95
§ 8.9 微分方程的幂级数解法	96
习题 8.9	97

第9章 空间解析几何与向量代数 /98

§ 9.1 空间直角坐标系与向量概念	98
9.1.1 空间直角坐标系的建立	98
9.1.2 向量概念	100
习题 9.1	104
§ 9.2 向量的坐标表示	105
9.2.1 向量在轴上的投影	105
9.2.2 向量的分解与向量的坐标	106
9.2.3 向量的模与方向余弦	107
习题 9.2	108
§ 9.3 向量的数量积与向量积	109
9.3.1 两个向量的数量积	109
9.3.2 两个向量的向量积	112
习题 9.3	116
§ 9.4 空间平面及其方程	117
9.4.1 平面方程的三种形式	117
9.4.2 平面与平面的位置关系	121
习题 9.4	123
§ 9.5 空间直线及其方程	124
9.5.1 空间直线方程的3种形式	124
9.5.2 两条空间直线间的位置关系	127
9.5.3 空间直线与平面间的位置关系	127
习题 9.5	129
§ 9.6 空间曲面及其方程	130
9.6.1 空间曲面方程的概念	130
9.6.2 几种简单曲面的方程	131
9.6.3 几种简单二次曲面的标准方程	134
习题 9.6	137
§ 9.7 空间曲线及其方程	138
9.7.1 空间曲线作为两个曲面的交线	138

9.7.2 空间曲线的参数方程	138
9.7.3 空间曲线在坐标面上的投影	139
习题 9.7	141

第10章 多元函数的微分法及其应用 /142

§ 10.1 多元函数的基本概念	142
10.1.1 多元函数的概念	142
10.1.2 二元函数的定义域	143
10.1.3 二元函数的对应法则	145
10.1.4 二元函数的几何表示	146
习题 10.1	147
§ 10.2 二元函数的极限及连续性	148
10.2.1 二元函数的极限	148
10.2.2 二元函数的连续性	150
习题 10.2	151
§ 10.3 多元函数的偏导数	152
10.3.1 偏导数概念	152
10.3.2 高阶偏导数	154
习题 10.3	157
§ 10.4 多元函数的全微分	158
10.4.1 全微分概念	158
10.4.2 全微分在近似计算中的应用	161
习题 10.4	162
§ 10.5 多元复合函数的微分法	163
10.5.1 全导数	163
10.5.2 复合函数的偏导数	164
10.5.3 复合函数的高阶偏导数	168
习题 10.5	169
§ 10.6 隐函数的微分法	170
10.6.1 一元隐函数的微分法	170
10.6.2 二元隐函数的微分法	171
习题 10.6	173
§ 10.7* 偏导数的几何应用	174
10.7.1 空间曲线的切线与法平面	174
10.7.2 曲面的切平面与法线	176

习题 10.7	178
§ 10.8 多元函数的普通极值	179
习题 10.8	183
§ 10.9 多元函数的条件极值	184
习题 10.9	187
§ 10.10 最小二乘法	188
习题 10.10	192

第 11 章 多元函数的积分法及其应用 /193

§ 11.1 二重积分的概念及性质	193
11.1.1 二重积分的概念	193
11.1.2 二重积分的性质	195
习题 11.1	198
§ 11.2 直角坐标系下的二重积分算法	199
习题 11.2	205
§ 11.3 极坐标系下的二重积分算法	206
习题 11.3	210
§ 11.4 二重积分的应用	211
11.4.1 平面的面积	211
11.4.2 立体的体积	212
11.4.3 曲面的面积	213
11.4.4 平面薄片的质量	214
11.4.5 平面薄片的重心	215
11.4.6 平面薄片的转动惯量	216
习题 11.4	217
§ 11.5* 三重积分的概念及其算法	218
11.5.1 三重积分的概念	218
11.5.2 三重积分的计算	219
习题 11.5	221
§ 11.6* 利用柱面坐标和球面坐标计算三重积分	222
11.6.1 利用柱面坐标计算三重积分	222
11.6.2 利用球面坐标计算三重积分	224
习题 11.6	226

§ 11.7* 三重积分的应用	227
11.7.1 曲面围成的立体体积	227
11.7.2 物体的质量	227
11.7.3 物体的重心	228
11.7.4 物体的转动惯量	229
习题 11.7	229

第12章 行列式与矩阵简介 /230

§ 12.1 行列式的概念	230
习题 12.1	235
§ 12.2 行列式的基本性质	236
习题 12.2	240
§ 12.3 行列式的展开及克莱姆法则	241
12.3.1 行列式按行(列)展开	241
12.3.2 克莱姆法则	244
习题 12.3	247
§ 12.4 矩阵及其基本运算	248
12.4.1 矩阵的概念	249
12.4.2 矩阵的基本运算	250
习题 12.4	256
§ 12.5 莱斯利矩阵	257
12.5.1 简例	257
12.5.2 莱斯利矩阵	259
12.5.3 其他具年龄结构的种群增长模型	260
§ 12.6 矩阵的初等变换及矩阵的秩	261
12.6.1 矩阵的初等变换	261
12.6.2 矩阵的秩	261
习题 12.6	264
§ 12.7 逆矩阵及其求法	265
习题 12.7	269
§ 12.8 线性方程组解的讨论	270
习题 12.8	275

部分习题答案与简单提示 /276

索引 /288

第7章 级数

级数是高等数学课程的一个重要组成部分,它是表示函数、研究函数的性质以及进行数值近似计算的一种有力工具.

本章首先介绍常数项级数,然后介绍一类最重要的函数项级数:幂级数.

§ 7.1 级数的概念及性质

7.1.1 级数的概念

人们在认识客观事物的数量特征时,常常会遇到由有限到无限多个数量相加的问题.例如,人们最初在计算圆的面积时并不知道圆的面积公式 πR^2 ,而只是用圆内接正多边形的面积去近似它.

在半径为 R 的圆内作一个正三角形,其面积为 u_1 (如图 7.1 中的阴影部分),我们可用 u_1 作为圆面积的第 1 个近似值.又以所得正三角形各边为底,作顶点在圆周上的等腰三角形,其面积为 u_2 (如图 7.2 中的阴影部分),我们可用 $u_1 + u_2$ 作为圆面积的第 2 个近似值.再以所得正六边形各边为底,作顶点在圆周上的等腰三角形,其面积为 u_3 (如图 7.3 中的阴影部分),我们可用 $u_1 + u_2 + u_3$ 作为圆面积的第 3 个近似值.这样继续下去,我们可以得到圆面积的第 n 个近似值

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

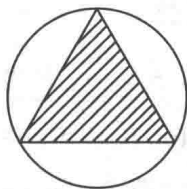


图 7.1

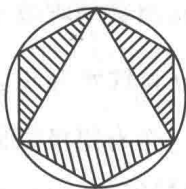


图 7.2

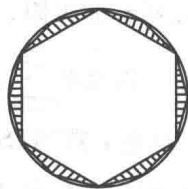


图 7.3

用 S_n 表示圆面积的第 n 个近似值,于是圆面积的近似值就表示为有限个数相加的和式

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

不难看出,当 n 无限增大 ($n \rightarrow +\infty$) 时, S_n 就无限逼近于圆的面积,故圆的面积 πR^2 就是当 $n \rightarrow +\infty$ 时,数列

$$S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$$

的极限.

有了上述直观认识,我们可以得到级数的概念及其敛散性的定义.

定义 1 设已知数列为

$$u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$$

则数列各项依次相加的和式

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

称为(常数项)级数(series of constant term),记为 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$,即

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

其中第 n 项 u_n 称为级数的一般项(general term).

从这个定义可以看出级数与数列的区别与联系:级数不是数列,而是数列各项依次相加的和式,这个和式不是有限项相加,而是无限项相加,故级数又称无穷级数(infinite series).

怎样理解级数中无穷多项的相加?它们相加的和是什么?如果一项一项加下去是加不完的,而我们只知道有限个数的相加方法.如何解决这个问题?我们想到了微积分的基本概念:极限,通过极限过程就可以实现从有限项相加到无限项相加的转化.

作级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 的前 n 项和 $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$,称 S_n 为级数的部分和(partial sums).当 n 依次取 $1, 2, \dots, n, \dots$ 时,就构成一个部分和的数列

$$S_1 = u_1, S_2 = u_1 + u_2, \dots, S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n, \dots$$

根据这个数列有无极限,就可引进级数的收敛与发散概念.

定义 2 设级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 的部分和数列为 $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$,若当 n 无限增大($n \rightarrow +\infty$)时,数列 $\{S_n\}$ 趋于一个有限极限值 S ,即 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$,则称级数收敛(convergent).极限值 S 称为级数的和(sum of series),即 $S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$.这时 S 与 S_n 的差 $S - S_n = r_n$ 称为级数的余项(remainder term).若当 n 无限增大($n \rightarrow +\infty$)时,数列 $\{S_n\}$ 不存在有限极限,则称级数发散(divergent).

这个定义说明,级数存在着收敛与发散两种可能.只有在收敛前提下,级数才有和的概念,即收敛级数中无穷多项才能相加.这时,级数的部分和才可当作级数和的近似值,即当 n 充分大时, S_n 与 S 相差可任意小,其误差就是余项的绝对值 $|r_n|$.

例1 证明算术级数(arithmetical series) $\sum_{n=1}^{+\infty} n$ 发散.

证 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} n = 1 + 2 + \cdots$, 其部分和 $S_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$,

由 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n+1)}{2} = +\infty$, 可知这个级数发散.

例2 级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots$ 称为几何级数(geometric series)(或等比级数(geometric series)), 其中 $a \neq 0$, q 为公比. 试讨论这个级数的敛散性.

解 对 $|q| \neq 1$, 有 $S_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1} = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$.

当 $|q| > 1$ 时, 由于 $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \infty$, 从而 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \infty$, 这时级数发散.

当 $|q| < 1$ 时, 由于 $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$, 从而 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$, 这时级数收敛, 其和

$$S = \frac{a}{1-q}.$$

当 $q = 1$ 时, $S_n = na \rightarrow \infty$, 这时级数发散.

当 $q = -1$ 时, 级数为 $a - a + a - a + \cdots$, S_n 随着 n 的奇偶性分别等于 a 或 0 , 从而 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ 不存在, 故级数发散.

总之, 几何级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} aq^n$ 的敛散性是: 当 $|q| < 1$ 时收敛, 当 $|q| \geq 1$ 时发散.

几何级数是一个重要且常用的数项级数, 利用它的敛散性可以判断许多其他级数的敛散性, 因此要牢记它的敛散性结论.

马尔萨斯(Malthus, 1766—1834, 英国经济学家)认为, 人口按几何级数增长, 生活资料只能按算术级数增长. 传染病学认为, 病毒通过飞沫在空气中传播, 被传染的病例在最初阶段按几何级数增长. 在生物学中, 种群在一个新环境中按几何级数增长, 等等.

7.1.2 级数的基本性质

根据级数的收敛与发散概念, 可以得出级数的以下基本性质.

性质1 若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ 分别收敛于 S 与 T , 则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n \pm v_n)$ 收敛于 $S \pm T$.

证 因为 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = T$, 所以 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n \pm T_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \pm \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = S \pm T$. 即 $\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n \pm v_n)$ 收敛于 $S \pm T$.

性质 1 表明, 收敛级数可以逐项相加或逐项相减. 应该注意的是, 这个性质仅就收敛级数而言, 如果忽略收敛这个条件, 那么结论就不正确. 例如一个收敛级数与一个发散级数的和肯定是发散级数; 两个发散级数的和可能收敛也可能发散.

性质 2 若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛于 S , k 为任一常数, 则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} ku_n$ 收敛于 kS .

证 设级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{+\infty} ku_n$ 的部分和分别是 S_n 和 T_n , 则 $T_n = ku_1 + ku_2 + \cdots + ku_n = k(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = kS_n$, 于是, $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} kS_n = k \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = kS$, 表明级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} ku_n$ 收敛于 kS .

易见, 若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 发散, 且 $k \neq 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} ku_n$ 仍发散. 这是因为, 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} ku_n$ 收敛, 据性质 2, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} \cdot ku_n\right)$ 收敛, 这与已知 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 发散相矛盾. 由此可知, 级数各项乘以任一常数后, 其敛散性不变.

性质 3 改变级数的有限项, 不影响级数的敛散性.

证 首先证明去掉级数有限项的情况. 设去掉级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 的前 m 项后, 级数变为

$$u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{m+n} + \cdots$$

它的部分和为

$T_n = u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{m+n} = (u_1 + u_2 + \cdots + u_{m+n}) - (u_1 + u_2 + \cdots + u_m)$, 由于前 m 项的和 $u_1 + u_2 + \cdots + u_m$ 必然是常数, 记作 C , 所以有 $T_n = S_{m+n} - C$. 这表明 T_n 与 S_{m+n} 相差一个常数 C . 当 $n \rightarrow +\infty$ 时, 它们或者同时存在极限, 或者同时不存在极限, 从而对应的两个级数具有共同的敛散性. 这就证明了去掉级数的有限项不改变级数的敛散性.

类似地可以证明, 在级数前边加上有限项也不会改变级数的敛散性. 概括说来, 改变级数的有限项, 不会改变级数的敛散性. 不过应该注意的是, 改变收敛级数的有限项后, 其和通常是要改变的.

性质 4 若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛, 则对其项任意加括号后所成的级数仍收敛, 且其和不变.

证 设 $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$, 对其项任意加括号后的级数的部分和为 T_n , 且有

$$T_1 = u_1 + u_2 + \cdots + u_{i_1} = S_{i_1},$$

$$T_2 = (u_1 + u_2 + \cdots + u_{i_1}) + (u_{i_1+1} + u_{i_1+2} + \cdots + u_{i_2}) = S_{i_2},$$

.....

$$T_n = (u_1 + u_2 + \cdots + u_{i_1}) + (u_{i_1+1} + u_{i_1+2} + \cdots + u_{i_2}) + \cdots + (u_{i_{n-1}+1} + u_{i_{n-1}+2} + \cdots + u_{i_n}) = S_{i_n},$$

可见 $\{T_n\}$ 实际上就是 $\{S_n\}$ 的一个子数列, 故由部分和数列 $\{S_n\}$ 的收敛性可知部分和数列 $\{T_n\}$ 也收敛, 且极限不变. 这就是性质 4 的结论.

应该注意的是, 性质 4 的逆命题不成立. 若加括号后的级数收敛, 原级数不一定收敛. 例如级数 $(1-1) + (1-1) + \cdots$ 收敛于 0, 但是原级数 $1-1+1-1+\cdots$ 却是发散的. 概括说来, 收敛级数可以任意加括号, 但是不能任意去括号.

性质 5 (级数收敛的必要条件) 若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

证 因为 $S_n = S_{n-1} + u_n$, 即 $u_n = S_n - S_{n-1}$, 所以有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

性质 5 的逆否命题: 若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 的一般项的极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0$, 则级数必发散.

人们常常利用性质 5 的逆否命题形式判断某些级数的发散性. 这时只需观察级数的一般项 u_n 是否不趋于零, 只要 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0$, 就可断言级数是发散的.

值得注意的是, 性质 5 只是级数收敛的必要条件, 而不是收敛的充分条件. 也就是说, 即使 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, 也不能断定级数收敛. 例如级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, 易见 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, 但是这个级数发散. 为什么是发散呢? 下面的例子给以说明.

定义 3 对数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$, 其中 $a_n > 0$. 若 $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}} \right)$, $n = 2, 3, \cdots$, 则称 $\{a_n\}$ 为调和数列 (harmonic progression).

例如, $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$ 是调和数列.

定义 4 若 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots$ 为等差级数, 则 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ 称为调和级