

高等数学 教育研究

刘菊芬 著

非外借



九州出版社
JIUZHOU PRESS

高等数学教育研究

刘菊芬 著



九州出版社
JIUZHOU PRESS

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学教育研究 / 刘菊芬著. -- 北京 : 九州出版社, 2017. 10

ISBN 978-7-5108-6329-5

I. ①高… II. ①刘… III. ①高等数学—教学研究
IV. ①O13-42

中国版本图书馆CIP数据核字 (2017) 第261317号

高等数学教育研究

作 者	刘菊芬 著
出版发行	九州出版社
地 址	北京市西城区阜外大街甲 35 号 (100037)
发行电话	(010)68992190/3/5/6
网 址	www.jiuzhoupress.com
电子信箱	jiuzhou@jiuzhoupress.com
印 刷	北京朗翔印刷有限公司
开 本	710 毫米 × 1000 毫米 16 开
印 张	15.5
字 数	200 千字
版 次	2018 年 6 月第 1 版
印 次	2018 年 6 月第 1 次印刷
书 号	ISBN 978-7-5108-6329-5
定 价	59.00 元

★版权所有 侵权必究★

前 言

教育是科教兴国的事业。21世纪的竞争，是经济实力的竞争，是科学技术的竞争，归根结底是人才的竞争，而人才的培养取决于教育。众所周知，知识经济时代，高新技术是保持一个国家或民族综合实力和竞争力的关键因素，而高新技术本质上是一种数学技术，知识经济以成功运用数学为标志。因此，加强数学教育，是我国实施科教兴国战略的重要组成部分。21世纪的中国，教育所处的地位是举足轻重的。邓小平同志早在1977年就深刻揭示了经济、科技和教育之间的内在联系：经济是中心，科技是关键，教育是基础。“教育要面向现代化，面向世界，面向未来”是邓小平同志教育思想的核心和精髓。21世纪的高等教育在整个教育事业中处于龙头地位，高等教育的发展质量和发展程度，不仅影响整个教育事业，而且关系到社会主义现代化的未来。进入21世纪，发达国家将普及高等教育。20世纪美国社会迅速完成了高等教育大众化；据测，21世纪的日本，成人人口几乎将全部被大学毕业生所占据。我国在20世纪90年代普及义务教育的基础上，21世纪也将逐渐向高学历化过渡。处于跨世纪历史阶段的高等学校，要为增强国家在全球性经济和文化竞争中的综合实力培养更多的高层次、高素质的人才而奋斗，这就提出了加强高等学校教学改革并探索新的思路的任务。为培养面向21世纪的人才进行全局性的探究发现这个任务的核心是培养具有高才能的人才。未来人才才能概念内涵凸现在如下几个方面：才能不仅包含人类自身固有智力，而且还包括非自身智力（科技信息再造智力及人为智力的输入）；其次才能必须是立体的、综合性的，及具有沟通、转换的能力。而对于才能的培养，高等数学

教育起着不可替代的作用。因此，在教学中怎样以现代教育手段开发学生的潜能、培养创造性是高等数学教育改革中值得深究的方面。高等数学教学具有自身的个性而有别于其他学科的教学，是因为数学有其独特的学科特点：这门学科是人类认识自然的中介，是人的发展中不可缺少的内容，是人类文化的重要组成部分；这门学科是人类最早发展起来的自然科学之一，它长期起着带头学科的作用。早在100多年前，马克思就断言：“一种科学只有在成功地运用数学时，才能达到完善的地步。目前，数学除了自身仍然在不断完善和继续发展之外，还向其他领域渗透，与其他学科相结合而形成了众多的边缘学科，使得当今世界上的许多新发现、新发明、新创造都直接或间接与数学有关。因而，数学不仅在科学技术中发挥巨大的作用，而且在经济科学、环境科学、社会科学甚至人文科学中具有不可替代的作用。数学不仅对推动社会生产力的发展、促进人类的物质文明建设起着重大的作用，而且对人才的智能培养和发展亦有着特殊的作用。

目 录

CONTENTS

第一章 高等数学的认识	1
第一节 高等数学	1
第二节 高等代数	6
第三节 概率与统计	13
第四节 课程与教学论	15
第二章 高等数学教育的认识	19
第一节 高等数学教育博弈	19
第二节 高等数学的美学	28
第三节 高等数学教学中的人文教育	35
第四节 高等数学教育方式	49
第三章 高等数学教育及教学改革研究	57
第一节 高等数学教育教学方法创新研究	57
第二节 高等数学应用数学改革研究	68
第四章 高等数学教育教学的对比认识	75
第一节 《高等数学》书籍与中外书籍建设对比研究	75
第二节 中美高等数学教学比较研究	79
第三节 高等数学与初等数学有关内容的对比	85

第五章 各种教学方式在高等数学中的应用	93
第一节 对称美在高等数学中的应用	93
第二节 实验教学在高等数学教学中的应用	118
第三节 过程化教学在高等数学教学中的运用	126
第六章 高等数学教育教学问题	129
第一节 高等数学课堂问题的设计	130
第二节 “高等数学”课程教学与后续课程衔接问题	139
第三节 高等数学课程改革刍议	142
第七章 高等数学教学的思考	151
第一节 怎样帮助学生学好“高等数学”	151
第二节 “高等数学”教学中的策略	156
第三节 高等数学求极限的教学方法	159
第八章 高等数学教育教学建设	163
第一节 “高等数学”课程建设	163
第二节 高等数学教学中情景创设	176
第三节 在高校中实施“高等数学”课程教学创新	181
第四节 建构主义理论下高等数学课的教学	184
第五节 高等数学教学引入数学建模	190
第九章 高等数学课程教育改革	197
第一节 高等数学教学改革	197
第二节 高等数学的教学内容与模式改革	203
第三节 初等数学与高等数学课程及教学一体化的教育教学模式	211

第十章 高等数学教育在本科教学教育中的重要作用 217

 第一节 在“高等数学”教学中培养学生的数学素养 217

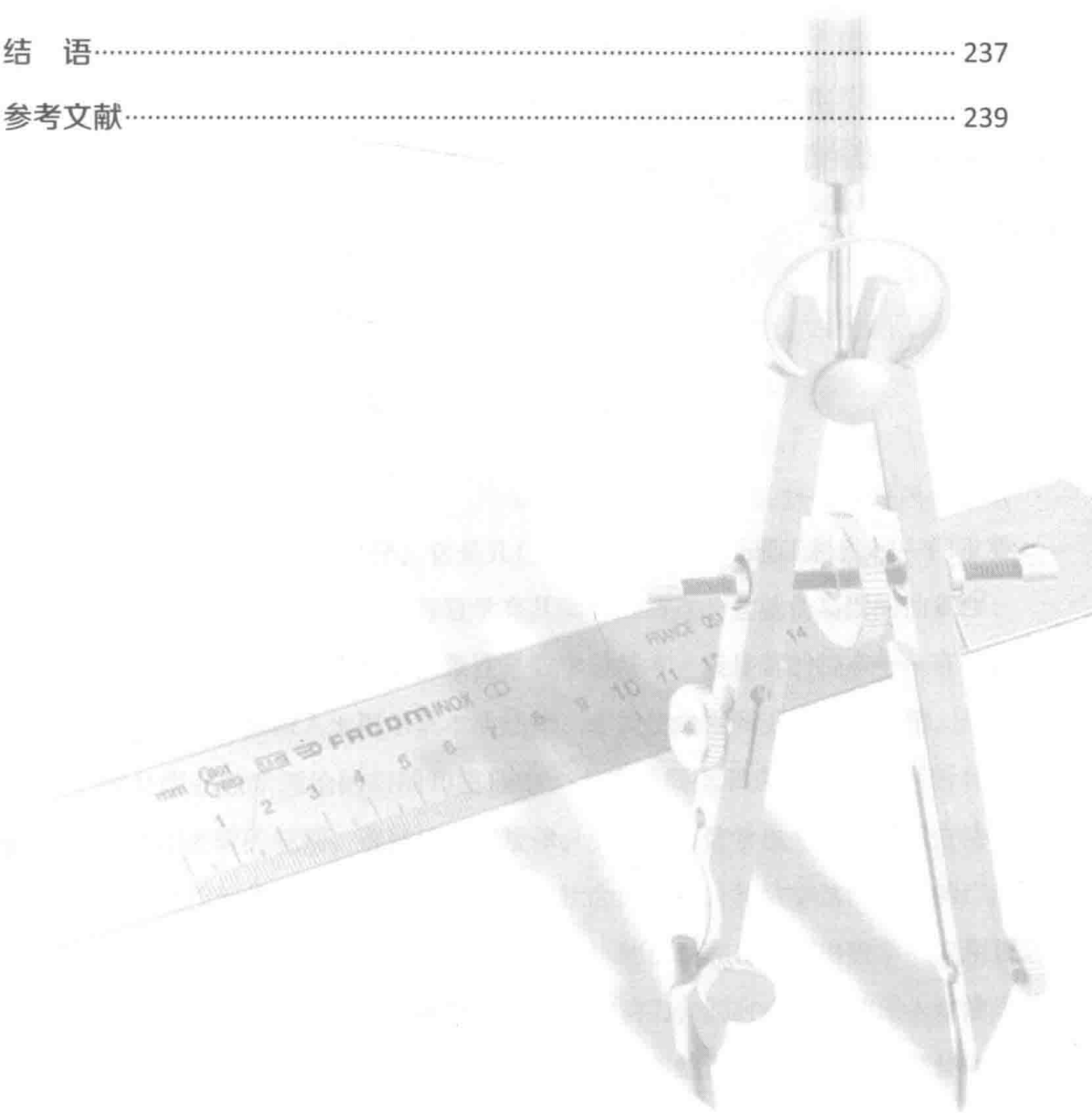
 第二节 在“高等数学”教学中培养学生能力 221

 第三节 提高高等数学教学效果的实践与认识 227

 第四节 培养“高等数学”教学中数学思维与创新能力 233

结 语 237

参考文献 239



第一章 高等数学的认识

20世纪80年代初期,世界开始进入“数学技术”的新时代。国家教育部高教司组织了一次重要会议,研讨“数学教育在大学教育中的作用”,建议开设“大学数学”课程。医学院校面对新的挑战、新的要求,当有新的认识、新的行动。

第一节 高等数学

高等数学(也称为微积分,它是几门课程的总称)是理工科院校一门重要的基础学科。作为一门科学,高等数学有其固有的特点,这就是高度的抽象性、严密的逻辑性和广泛的应用性。抽象性是数学最基本、最显著的特点——有了高度抽象和统一,才能深入地揭示其本质规律,才能使之得到更广泛的应用。严密的逻辑性是指在数学理论的归纳和整理中,无论是概念和表述,还是判断和推理,都要运用逻辑的规则,遵循思维的规律。所以说,数学也是一种思想方法,学习数学的过程就是思维训练的过程。人类社会的进步,与数学这门科学的广泛应用是分不开的。尤其是到了现代,电子计算机的出现和普及使得数学的应用领域进一步拓宽,现代数学正成为科技发展的强大动力,同时也广泛和深入地渗透到了社会科学领域。因此,学好高等数学相当重要。然而,很多学生对怎样才能

学好这门课程感到困惑。要想学好高等数学,至少要做到以下四点。

首先,理解概念。数学中有很多概念。概念反映的是事物的本质,弄清楚了它是如何定义的、有什么性质,才能真正地理解一个概念。

其次,掌握定理。定理是一个正确的命题,分为条件和结论两部分。对于定理除了要掌握它的条件和结论以外,还要搞清它的适用范围,做到有的放矢。

再次,在弄懂例题的基础上做适量的习题。要特别提醒学习者的是,课本上的例题都是很典型的,有助于理解概念和掌握定理,要注意不同例题的特点和解法,在理解例题的基础上做适量的习题,做题时要善于总结——不仅总结方法,也要总结错误。这样,做完之后才会有所收获,才能举一反三。

最后,理清脉络。要对所学的知识有个整体的把握,及时总结知识体系,这样不仅可以加深对知识的理解,还会对进一步的学习有所帮助。

高等数学中包括微积分和立体解析几何,级数和常微分方程。其中尤以微积分的内容最为系统且在其他课程中有广泛的应用。微积分的理论是由牛顿和莱布尼茨完成的。(当然在他们之前就已有微积分的应用,但不够系统)无穷小和极限的概念、微积分的基本概念的理解有很大难度。

一、“新书籍”的新挑战

在理念、体系、形式和内容等方面,新书籍都有了巨大的转变,体现了时代发展的要求和素质教育的宗旨。但正如所有改革的初始,新与旧之间总会产生摩擦与碰撞,新书籍在带来新理念、新思维的同时,给课堂也带来了强烈的震撼,广大教师也面临着更大的机遇和挑战。如何领会新书籍、把握新书籍,使教法改革与书籍改革达到完美统一,在蓬勃发展的教育改革中充分展示新书籍的魅力呢?经过一段时间的学习和实践,我认为,在新书籍教学中应在教育观念、教学方法以及激发学生的学习兴趣、培养学生的数学思维等方面进行深入细致的探讨和研究。

（一）深刻领会新书籍的基本理念，切实转变教育观念

实验版新书籍的基本出发点是促进学生全面、持续、和谐的发展，其基本理念是突出体现普及性、基础性和发展性，关注学生的情感、态度、价值观和一般能力的培养，通过教授数学知识，使学生获得作为一个公民所必需的基本数学知识和技能，为学生的终身可持续发展打下良好的基础。新书籍首先对教师的教育观念提出了挑战，要求教师不再作为知识的权威，将预先组织好的知识体系传授给学生，而是充当指导者、合作者和助手的角色，与学生共同经历知识探究的过程。对此，要有深刻的认识，要立足学生终身发展以及参与未来竞争的需要，切实转变教育思想，树立以育人为本的观念，适应时代发展和科技进步的要求，着力培养学生的创新精神和实践能力，促进学生的全面发展。教师教学思想的转变是用好书籍、搞好书籍实验、提高教学质量的重要前提。只有教学观念与新书籍基本理念相吻合，熟悉进而研究新书籍和新的教学方法，从而逐渐过渡到熟练地驾驭新书籍，才能变挑战为机遇，更好地使用新书籍，使新书籍充分发挥其作用。

（二）充分利用新书籍良好的可接受性，努力激发学生的学习兴趣

学习兴趣是学生对学习活动或学习对象的一种力求认识和探索的倾向。学生对学习产生兴趣时，就会产生强烈的求知欲望，就会全神贯注、积极主动、富有创造性地对所学知识加以关注和研究，因此，人们常说兴趣是最好的老师。新书籍编排上版式活泼、图文并茂，内容上顺理成章、深入浅出，将枯燥的数学知识演变得生动、有趣，有较强的可接受性、直观性和启发性，对培养学生的学习兴趣有极大的帮助。要善于运用幽默的语言、生动的比喻、有趣的例子、别开生面的课堂情境，激发学生的学习兴趣；以数学的广泛应用，激发学生的求知欲望；以我国在数学领域的卓越成就，激发学生的学习动机；还要挖掘绚丽多姿而又深邃含蓄的数学美，给学生以美好的精神享受，培养学生对数学的热爱。总之，应通过多种手段、多种方式、多种途径不断激发学生学习数学的兴趣，让

大家感受到数学中充满了美,数学也是一门生动活泼的科目,以取得更好的教学效果。

(三) 围过程与方法,加强学生创造性思维的形成和创新能力的培养

数学学习是再创造、再发现的过程,必须要有主体的积极参与才能实现。改革后的新书籍将数学知识形成的基本过程和基本方法贯穿始终,这是培养数学思想和创造性思维的重要方式。在新书籍的教学中,应紧紧围绕这一点,从学生的实际出发,结合教学内容,设计出有利于学生参与的教学环节,引导学生通过实践、思考、探索和交流,获得数学知识,发展数学思维,提高创新能力。

1. 引导学生积极参与概念的建立过程

传统的教学中,基本概念、基本知识常常是要求学生死记硬背。新书籍开拓了新的思路,应积极引导 students 关注概念的实际背景与形成过程,使学生理解概念的来龙去脉,加深对概念的理解,培养学生数学思维的严谨性。

2. 引导学生积极参与定理、公式的发现与证明过程

在这个过程中,让学生掌握数学证明的思想脉络,体会数学证明的思想和方法,培养学生数学思维的独创性。

3. 利用新书籍中多次出现的“一题多解”的例子,引导学生积极参与问题的不同角度、不同思路的探索过程

通过“一题多解”让学生寻求不同解法的共同本质和思考方式的共性,最终上升到多解归一、多题归一的高度,使学生初步掌握数学方法和思想。可以让学生分成不同的小组,从不同角度对这一问题进行探索和研究,答案虽然一样,却可以得到多种不同的表达方式。这一过程既让学生学会了分析问题的方法,又扩展了学生的思维空间。

4. 鼓励学生积极参与开放性课题研究

在研究过程中,学生可以将数学知识运用到实际生活中,这也是一个极好的实践、思考、探索和交流的过程。由学生自行设计数据表格、提出问题,利用

所学知识解决问题、给出评价,做成一个小型的数学报告或数学论文。通过这种开放性课题的研究,学生既提高了数学语言的运用能力和逻辑思维能力,又加深了对知识的理解,获得了新的知识,增强了合作意识,发展了创造性思维 and 创新能力。

二、“大学数学”的新要求

在数学思想和方法对世界经济和技术发展起着越来越重要作用的形势下,必须明确:数学是培养和造就各类高层次专门人才的共同基础。对非数学类专业的学生,大学数学基础课的作用至少有以下三个方面。

首先,它是学生掌握数学工具的主要课程。目前的主要问题是,对“工具性”的理解过窄,甚至把数学基础课看成只是为专业课程服务的工具。历史的经验告诫我们,这将导致学生基础薄弱、视野狭窄、后劲不足、创新乏力,十分不利于面向21世纪人才的培养。

其次,它是学生培养理性思维的重要载体。从本质上讲,数学研究的是各种抽象的“数”和“形”的模式结构,运用的主要是逻辑、思辨和推理等理性思维方法。这种理性思维的训练,是其他学科难以替代的。这对大学生全面素质的提高、分析能力的加强、创新意识的启迪都是至关重要的。

再次,它是学生接受美感熏陶的一种途径。数学是美学四大中心建构(史诗、音乐、造型和数学)之一。将杂乱整理为有序,使经验升华为规律,寻求各种运动的简洁统一的数学表达等数学努力的目标,都是数学美的表现,也是人类对美感的追求。

大学数学教育改革,要转变教育观念,用正确的教育思想指导改革的实践。要以数学统一性的观点,从全面素质教育的高度,来设计数学基础课程的体系。把微积分、代数、几何以及随机数学作为大学非数学专业的四门必修基础课程,并把这一系列课程统称为“大学数学”。

根据数学教学自身的特点以及长期实践的经验,大学数学的课堂教学学时

应保持基本稳定。对一般理工和财经管理类专业,学时不应少于300学时,其中少数对数学要求较低的学校和专业,也不应少于240学时;对农林类各专业,不应少于200学时;医科类力争不低于140学时;文科类争取达到140学时。数学教学的安排不能过于集中,最好不少于两个学期。

要充分认识数学教育文革的艰巨性。大力加强教学方法改革的研究和实验,努力加强数学教学中的实践环节。指导思想应求基本一致,具体做法则要因材施教、百花齐放、突出特色。

第二节 高等代数

初等代数从最简单的一元一次方程开始,初等代数课本一方面进而讨论二元及三元的一次方程组,另一方面研究二次以上及可以转化为二次的方程组。沿着这两个方向继续发展,代数在讨论任意多个未知数的一次方程组,也叫线性方程组的同时还研究次数更高的一元方程组。发展到这个阶段,就叫作高等代数。高等代数是代数学发展到高级阶段的总称,它包括许多分支。现在大学里开设的高等代数,一般包括两部分:线性代数初步和多项式代数。

一、发展史

高等代数是数学学科的一门传统课程。在数学内部学科趋于统一和数学在其他学科的广泛应用的今天,高等代数以其追求内容结构的清晰刻画和作为数学应用的基础,是大学数学各个专业的主干基础课程。它是数学在其他学科应用的必需基础课程,又是数学修养的核心课程。

（一）发展内容

在高等代数中，一次方程组（即线性方程组）发展成为线性代数理论；而二次以上方程发展成为多项式理论。前者是向量空间、线性变换、型论、不变量论和张量代数等内容的一门近世代数分支学科，而后者是研究只含有一个未知量的任意次方程的一门近世代数分支学科。作为大学课程的线性代数，只研究它们的基础。高次方程组（即非线性方程组）发展成为一门比较现代的数学理论——代数几何。

线性代数是高等代数的一大分支。一次方程叫作线性方程，讨论线性方程及线性运算的代数就叫作线性代数。在线性代数中最重要的内容就是行列式和矩阵。行列式和矩阵在19世纪受到很大的关注，而且出现了数千篇关于这两个课题的文章。向量的概念，从数学的观点来看，不过是有序三元数组的一个集合，然而它以力或速度作为直接的物理意义，并且数学上用它能立刻写出物理上所说的事情。向量用于梯度、散度、旋度就更有说服力。同样，行列式和矩阵如导数一样（虽然“ dy/dx ”在数学上不过是一个符号，表示包括“ $\Delta y/\Delta x$ ”的极限的长式子，但导数本身是一个强有力的概念，直接而创造性地想象物理上发生的事情）。因此，虽然表面上看，行列式和矩阵不过是一种语言或速记，但它的大多数生动的概念能对新的思想领域提供钥匙，已经证明这两个概念是数学物理上高度有用的工具。线性代数学科和矩阵理论是伴随着线性系统方程系数研究而引入和发展的。

（二）发展初期

17世纪，日本数学家关孝和提出了行列式（determinant）的概念，他在1683年写了一部叫作《解伏题之法》的著作，意思是“解行列式问题的方法”，书里对行列式的概念和它的展开已经有了清楚的叙述。而在欧洲，第一个提出行列式概念的是德国的数学家、微积分学奠基人之一莱布尼兹（Leibnitz，1693年）。

1750年克莱姆（Cramer）在他的《线性代数分析导言》中发表了求解线性系

统方程的重要基本公式（即人们熟悉的Cramer克莱姆法则）。

1764年，Bezout把确定行列式每一项的符号的手续系统化了。对给定了含 n 个未知量的 n 个齐次线性方程，Bezout证明了系数行列式等于零是方程组有非零解的条件。Vandermonde是第一个对行列式理论进行系统的阐述（即把行列式理论与线性方程组求解相分离）的人，并且给出了一条法则，用二阶子式和它们的余子式来展开行列式。就对行列式本身进行研究这一点而言，他是这门理论的奠基人。

参照克莱姆和Bezout的工作，1772年，Laplace在《对积分和世界体系的探讨》中，证明了Vandermonde的一些规则，并推广了他的展开行列式的方法，用 r 行中所含的子式和它们的余子式的集合来展开行列式，这个方法如今仍然以他的名字命名。1841年，德国数学家雅可比（Jacobi）总结并提出了行列式的最系统的理论。另一个研究行列式的是法国最伟大的数学家柯西（Cauchy），他大大发展了行列式的理论，在行列式的记号中他把元素排成方阵并首次采用了双重足标的新记法，与此同时发现两行列式相乘的公式及改进并证明了Laplace的展开定理。相对而言，最早利用矩阵概念的是拉格朗日（Lagrange）在1700年后的双线性型工作中体现的。拉格朗日期望了解多元函数的最大、最小值问题，其方法就是人们知道的拉格朗日迭代法。为了完成这些，他首先需要一阶偏导数为0，另外还要有二阶偏导数矩阵的条件。这个条件就是今天所谓的正、负的定义。尽管拉格朗日没有明确地提出利用矩阵。

大约在1800年，高斯（Gauss）提出了高斯消元法并用它解决了天体计算和后来的地球表面测量计算中的最小二乘法问题。（这种涉及测量、求取地球形状或当地精确位置的应用数学分支称为测地学。）虽然高斯由于这个技术成功地消去了线性方程的变量而出名，但早在几世纪中国人的手稿中就出现了解释如何运用“高斯”消去的方法求解带有三个未知量的三方程系统。在当时的几年里，高斯消去法一直被认为是测地学发展的一部分，而不是数学。而“高斯—约当消去

法”则最初是出现在由Wilhelm Jordan撰写的测地学手册中。许多人把著名的数学家Camille Jordan误认为是“高斯—约当消去法”中的约当。

矩阵代数的丰富发展，人们需要有合适的符号和合适的矩阵乘法定义。二者要在大约同一时间和同一地点相遇。

1848年，英格兰的J.J. Sylvester首先提出了矩阵这个词，它来源于拉丁语，代表一排数。1855年，矩阵代数得到了Arthur Cayley的进一步发展。Cayley研究了线性变换的组成并提出了矩阵乘法的定义，使得复合变换ST的系数矩阵变为矩阵S和矩阵T的乘积。他还进一步研究了那些包括矩阵的逆在内的代数问题。1858年，Cayley在他的矩阵理论集中提出著名的Cayley-Hamilton理论，即断言一个矩阵的平方就是它的特征多项式的根。利用单一的字母A来表示矩阵是对矩阵代数发展至关重要的。在发展的早期公式 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ 为矩阵代数和行列式间提供了一种联系。数学家Cauchy首先给出了特征方程的术语，并证明了阶数超过3的矩阵有特征值及任意阶实对称行列式都有实特征值；给出了相似矩阵的概念，并证明了相似矩阵有相同的特征值；研究了代换理论。

数学家试图研究向量代数，但在任意维数中并没有两个向量乘积的自然定义。第一个涉及一个不可交换向量积（即 $V \times W$ 不等于 $W \times V$ ）的向量代数是Hermann Grassmann在他的《线性扩张论》一书中提出的（1844年）。他的观点还被引入一个列矩阵和一个行矩阵的乘积中，结果就是现在称为秩数为1的矩阵，或简单矩阵。在19世纪末美国数学物理学家吉布斯（Willard Gibbs）发表了关于《向量分析基础》（Elements of Vector Analysis）的著名论述。其后物理学家狄拉克（P.A.M. Dirac）提出了行向量和列向量的乘积为标量。我们习惯的列矩阵和向量都是在20世纪由物理学家给出的。

矩阵的发展与线性变换是密切相连的。到19世纪它还仅占线性变换理论形成中有限的空间。现代向量空间的定义是由Peano于1888年提出的。