

数学建模案例丛书 / 主编 李大潜

UMAP

数学建模案例精选 3

蔡志杰 等 编译

The Customer Price Index: What Does It Mean?

How Does the NFL Rate Passers?

The Probability That a Queen Sits Beside a King: Juxtapositions and Placements of Random Elements

Differentials and Geographical Maps

Photovoltaic Systems Off-Grid

Wireless Signal Processing

Climate Change and the Daily Temperature Cycle

Climate Modeling in Differential Equations

Spirograph Patterns of Star Clusters

Predicting Opportunities for Viewing the International Space Station

Compartmental Pharmacokinetic Models

Immunological and Epidemiological HIV/AIDS Modeling

Using Original Sources to Teach the Logistic Equation

Calibration and the Law of Mass Action

高等教育出版社

UMAP

数学建模案例丛书 / 主编 李大潜

UMAP

数学建模案例精选

3

UMAP Shuxue Jianmo Anli Jingxuan

蔡志杰 等 编译

高等教育出版社·北京

图书在版编目(CIP)数据

UMAP 数学建模案例精选. 3 / 蔡志杰等编译. -- 北京: 高等教育出版社, 2018.10

书名原文: UMAP (Undergraduate Mathematics and Its Applications)

ISBN 978-7-04-050240-4

I. ①U… II. ①蔡… III. ①数学模型 IV. ①O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 168548 号

策划编辑 李晓鹏	责任编辑 李晓鹏	特约编辑 边晓娜	封面设计 张雨微
版式设计 张雨微	插图绘制 于 博	责任校对 胡美萍	责任印制 田 甜

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印 刷 北京信彩瑞禾印刷厂
开 本 787 mm×960 mm 1/16
印 张 31.25
字 数 490 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.hepmall.com.cn>
<http://www.hepmall.com>
<http://www.hepmall.cn>
版 次 2018年10月第1版
印 次 2018年10月第1次印刷
定 价 63.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物 料 号 50240-00

内容简介

本书为《数学建模案例丛书》的第四册, 案例选自美国 COMAP 出版的 UMAP 期刊上的教学单元, 包含的案例有居民消费价格指数: 它有什么含义、全美橄榄球联盟如何对传球手评分、Q 与 K 相邻的概率——随机排列中的并置与游程、微分和地图、离网光伏系统、无线信号处理、气候变化与日温度周期、气候问题的微分方程建模、星团的螺旋形图案、观察人造地球卫星的预测、药代动力学的房室模型、免疫学和流行病学的艾滋病模型、使用原始文献讲授 logistic 方程、校准与质量作用定律。应用领域涉及工程、经济、社会、地球物理、生物、生态、医学、体育、天文、化学、测量等, 数学知识基本上不超出微积分、微分方程、线性代数、几何、概率、统计、向量分析等大学基础数学的内容。教学方法讲究循序渐进、步步为营, 数学推导比较详细, 特别是在问题展开的过程中配备了相应的习题, 让学生边阅读边练习。

本书的案例可以作为数学建模课程的辅助教材和自学材料, 也为讲授、学习其他数学课程的教师和学生提供了将数学方法应用于实际问题的丰富的素材和课外读物。

Undergraduate Mathematics and Its Applications

COMAP, 蔡志杰等编译

Copyright © 1996 by the Consortium for Mathematics and Its Applications (COMAP).

All Rights reserved.

本书原版由数学及其应用联合会出版。版权所有, 盗印必究。

Higher Education Press is authorized by the Consortium for Mathematics and Its Applications (COMAP) to publish and distribute exclusively this simplified Chinese edition. This edition is authorized for sale in the People's Republic of China only (excluding Hong Kong, Macao SAR and Taiwan). Unauthorized export of this edition is a violation of the Copyright Act. No part of this publication may be reproduced or distributed by any means, or stored in a database or retrieval system, without the prior written permission of the publisher.

本书中文简体字翻译版由数学及其应用联合会授权高等教育出版社独家出版发行。此版本仅限在中华人民共和国境内(但不允许在中国香港、澳门特别行政区及中国台湾地区)销售。未经授权的本书出口将被视为违反版权法的行为。未经出版者预先书面许可, 不得以任何方式复制或发行本书的任何部分。

COMAP, Inc.

175 Middlesex Turnpike, Suite 3B, Bedford, MA 01730, USA

数学建模案例丛书编委会

主 任 李大潜

副 主 任 陈叔平 谭永基 姜启源 叶其孝 谢金星 李艳馥

委 员 韩中庚 吴孟达 鲁习文 杨启帆 刘来福 边馥萍 蔡志杰 周义仓
薛 毅 黄海洋 陆立强 丁颂康 但 琦 张文博

常务编辑 姜启源 韩中庚 吴孟达 蔡志杰 周义仓

秘 书 李晓鹏

序

数学作为一门研究现实世界中的空间形式与数量关系的科学,它所研究的并非真正的现实世界,而只是现实世界的数学模型,即所研究的那部分现实世界的一种虚构和简化的版本。尽管数学建模这个术语的兴起并被广泛使用不过是近些年来事,但作为联系数学与应用的重要桥梁,作为数学走向应用的必经的最初一步,数学建模与数学学科本身有着同样悠久的历史。从公元前三世纪建立的欧几里得几何,到根据大量天文观测数据总结出来的行星运动三大定律;从牛顿力学和微积分的创立,到出现在流体力学、电动力学、量子力学中的基本微分方程,无一不是揭露了事物本质的数学模型,且已成为相关学科的核心内容和基本构架。

半个多世纪以来,随着数学科学与计算机技术的紧密结合,已形成了一种普遍的、可以实现的关键技术——数学技术,成为当代高新技术的一个重要组成部分和突出标志,“高技术本质上是一种数学技术”的提法,已经得到越来越多人们的认同。作为基础学科的数学籍助于建模与算法向技术领域转化,变成了一种先进的生产力,对加强综合国力具有重大的意义。与此同时,数学迅速进入了经济、金融、人口、生物、医学、环境、信息、地质等领域,一些交叉学科如计量经济学、人口控制论、生物数学、数学地质学等应运而生,为数学建模开拓了广阔的用武之地。

另一方面,将数学建模引入教学,为数学和外部世界的联系提供了一种有效的方式,让学生能亲自参加将数学应用于实际的尝试,参与发现和创造的过程,取得在传统的课堂里和书本上无法获得的宝贵经验和切身感受,必将启迪他们的数学心智,促使他

们更好地应用、品味、理解和热爱数学,在知识、能力及素质三方面迅速成长。

自上世纪 80 年代初数学建模进入我国大学课堂以来,经过 30 多年健康、快速的发展,目前已有上千所高校开设了各种形式的数学建模课程,正式出版的教材和参考书达 200 多本。全国大学生数学建模竞赛自 1992 年创办以来,受到广大师生的热烈欢迎,到 2014 年已有 1 300 多所院校、23 000 多个队的 7 万余名学生参加。可以毫不夸张地说,数学建模的课堂教学实践与课外竞赛活动相互促进、协调发展,是这些年来规模最大、最成功的一项数学教学改革实践。

用数学的语言和工具表述、分析和求解现实世界中的实际问题,并将最终所得的结果回归实际、检验是否有效地回答了原先的问题,这是数学建模展示的一个全过程。在 30 多年数学建模的教学实践中,已冲破了原有的数学教学模式,形成了一种案例式、讨论式的教学方法。通过一些源于生活、生动新颖,又内涵丰富、启示性强的案例,不仅能吸引学生浓厚的学习兴趣,而且对于培养、提高学生数学建模的意识、方法和能力都有切实的成效。

事实充分说明,数学建模能力的培养和训练,各种案例所起的作用是十分重要的。我们不仅要充分利用案例的广度,通过生动、丰富的案例,展示及阐述数学在诸多领域中的应用,更要特别注重案例的深度,着意选择一些随着假设条件不断贴近实际、所建立的模型不断改进、而由模型得到的结果也更加符合实际的案例,体现数学建模逐步深入和发展的过程。正因为如此,这套数学建模案例丛书,将由翻译、改编国外相关机构出版的案例和收集、汇编国内撰写的案例这两部分组成,以期给广大教师和学生提供数学建模方面的教学素材、学习读物和竞赛辅导材料,促进我国数学建模的教学及竞赛不断深入发展。

当然,数学建模要不断深入,就不能认为现有的、包括那些目前可能是有口皆碑的模型,已经到了十全十美的境地,可以画上句号了。对本丛书中所精心收集的案例,自然也应抱着这样的态度。这是数学建模一个显著的特点,是数学建模永远生气蓬勃的标志,也是广大的数学建模工作者永不止步的鞭策和动力。诚挚地希望广大读者能提出宝贵的建议,并积极提供可以收入本丛书的有关数学建模的案例或者素材,帮助编委会将这套丛书愈办愈好。

李大潜

2014 年 10 月

前 言

经过数学建模案例丛书编委会成员的共同努力,在全国大学生数学建模竞赛组委会和高等教育出版社的支持、配合下,《UMAP 数学建模案例精选(3)》顺利问世了。

本书的案例全部选自美国 COMAP (Consortium for Mathematics and Its Applications) 出版的 *UMAP (Undergraduate Mathematics and Its Applications)* 期刊上的教学单元。该刊物的对象是大学生、研究生和教师,主要发表数学建模及数学在各个领域中应用的研究论文、教学单元等,在每年举办的美国大学生数学建模竞赛和交叉学科竞赛中获得 Outstanding 奖的论文也在该刊物上刊载。

本书选编的数学建模案例有以下几个特点:

应用领域涉及工程、经济、社会、地球物理、生物、生态、医学、体育、天文、化学、测量等,每篇都对案例的应用背景作了简明、生动的介绍,让不太熟悉这些领域的读者也能基本上了解这个案例所要讨论的问题,有些还对材料的历史由来给出较详细的说明。

数学知识主要涉及微积分、微分方程、线性代数、几何、概率、统计、向量分析等大学数学基础课程的内容,学习过这些课程的读者在阅读这些案例时,不会遇到很大的困难。个别案例用到了数值分析、Fourier 变换的知识。

教学方法遵循循序渐进、步步为营的原则,数学推导比较详细,特别是在问题展开的过程中配备了相应的习题,让读者边阅读边练习。如果能在学习时按照要求把全部习题都做一遍,相信不仅有利于对问题的深入理解,而且对相关的数学方法也是一次很好的复习和提高。

本书的案例可以作为数学建模课程的辅助教材和自学材料,也为讲授、学习其他数学课程的教师、学生提供了将数学方法应用于实际问题的丰富的素材和课外读物。

编译者对原文中某些专业知识的理解不可避免地存在可以商榷之处,对一些次要的、过时的部分也作了适当的删节。为了给读者提供方便,特将本书的全部原文放到与本书配套的“数字课程”网站上。

蔡志杰

2017年8月

目 录

1 居民消费价格指数:它有什么含义? / <i>The Customer Price Index: What Does It Mean?</i>	1
2 全美橄榄球联盟如何对传球手评分? / <i>How Does the NFL Rate Passers?</i>	37
3 Q 与 K 相邻的概率——随机排列中的并置与游程 / <i>The Probability That a Queen Sits Beside a King: Juxtapositions and Runs in a Random Permutation</i>	59
4 微分和地图 / <i>Differentials and Geographical Maps</i>	81
5 离网光伏系统 / <i>Photovoltaic Systems Off- Grid</i>	125
6 无线信号处理 / <i>Wireless Signal Processing</i>	157
7 气候变化与日温度周期 / <i>Climate Change and the Daily Temperature Cycle</i>	229
8 气候问题的微分方程建模 / <i>Climates Modeling in Differential Equations</i>	281
9 星团的螺旋形图案 / <i>Spirograph Patterns of Star Clusters</i>	319
10 观察人造地球卫星的预测 / <i>Predicting Opportunities for Viewing the International Space Station</i>	355
11 药代动力学的房室模型 / <i>Compartmental Pharmacokinetic Models</i>	377
12 免疫学和流行病学的艾滋病模型 / <i>Immunological and Epidemiological HIV/AIDS</i>	

	<i>Modeling</i>	395
13	使用原始文献讲授 logistic 方程 / <i>Using Original Sources to Teach the Logistic Equation</i>	431
14	校准与质量作用定律 / <i>Calibration and the Law of Mass Action</i>	457

1 居民消费价格指数：它有什么含义？

The Customer Price Index: What Does It Mean?

边馥萍 编译 姜启源 审校

摘要：

首先定义指数概念，并介绍居民消费价格指数 (CPI) 的构成；然后介绍怎样利用 CPI 来衡量通货膨胀和美元价值，以及怎样在其他经济序列的分析中，利用 CPI 去除通货膨胀的影响；最后还介绍了 CPI 的其他重要应用。

原作者：

David C. Flaspholer
Formerly of Xavier University
Frank V. Mastrianna
Formerly of Slippery Rock University
Richard J. Pulskamp
Mathematics and Computer Science
Department, Xavier University
Cincinnati, OH
pulskamp@xavier.edu

发表期刊：

The UMAP Journal, 2012, 33 (4): 351—386.

数学分支：

算术、金融数学

应用领域：

经济学、商业、日常生活

授课对象：

学习中级代数、大学代数、有限数学、初等统计学以及微积分前导课程的学生

预备知识：

复利计算公式

学习目标：

1. 理解指数的含义；
2. 理解 CPI 的构成；
3. 理解通货膨胀的度量方法；
4. 理解美元价值的度量方法；
5. 给定一个经济序列，能够构造出对应的指数；
6. 在经济序列分析中，能够利用 CPI 去除通货膨胀的影响。

1. 引言

新闻媒体经常报道居民消费价格指数(CPI),通常用CPI来衡量国民经济状况或通货膨胀程度.人民生活也受到CPI影响,因为工资福利都会随CPI变化.尽管CPI已经是一个人们在日常生活中常见的字眼,大多数人对其真正含义并不完全了解.正因如此,大多数人都没有理解用CPI来衡量经济时,其具备的优点和局限性.

本文的目的是说明CPI的计算方法.CPI是一个“指数”(index);指数是经济学和其他领域里常用的数学概念,用来衡量某一个量随时间变化的程度.理解了CPI的含义,也能帮助我们理解其他领域中用到的指数概念.

2. 度量变化的方法

在很多情形下,我们都需要度量一个量的变化程度.下面将介绍几种常用的度量变化的方法,每种方法都有各自的优点和缺点.

以某个家庭3个成员的体重变化为例说明这些度量方法,表1给出了他们在2个时间点上的体重.

表1 3个家庭成员在2个不同时间点上的体重

	2010 年体重/lb ^①	2012 年体重/lb
父亲	250	275
母亲	125	150
孩子	25	50

最简单也最常用的度量变化的方法为直接求出“变化量”,即直接求出两个数值的

^① 1 lb=0.453 592 4 kg.

差.在表 1 中,每个家庭成员的体重都增加了 25 lb.但是,这 25 lb 的增加量对这 3 个成员个体的影响却很不相同,也就是说,使用“变化量”不能完全体现变化程度.

第二种度量方法使用的是“百分比变化量”:将上面求出的“变化量”除以前一个数值(或者选定一个基准值),然后转换成百分比.利用表 1 中父亲的体重数据,其百分比变化量为

$$\frac{275-250}{250}=0.10=10\%$$

表 2 给出了用上述两种度量方法的结果:

表 2 家庭成员体重的变化

	2010 年体重/lb	2012 年体重/lb	变化量/lb	百分比变化量
父亲	250	275	25	10%
母亲	125	150	25	20%
孩子	25	50	25	100%

利用百分比变化量度量变化程度是一种易于理解并且常用的方法.一个明显的优点是它能更准确地描述变化的显著程度.本文考虑“指数”概念:这是另一个简单有用的度量变化的方法.与百分比变化量一样,指数也能度量变化的影响程度.

为了计算百分比变化量,将变化量除以基准值.为了计算指数,将真实数值除以基准值,然后换算成事先规定的刻度(通常以 100 为基准值).如果将父亲 2010 年体重换算成 100 的基准值,就能求解出如下简单的分式方程:

$$\frac{\text{2012 年体重}}{\text{2010 年体重}}=\frac{\text{2012 年指数}}{\text{2010 年指数}}$$

$$\frac{275}{250}=\frac{x}{100}$$

$$x=\frac{275}{250}\times100$$

$$x=\text{2012 年指数}=110$$

与百分比变化量类似,指数也是无量纲的.也就是说,例子中的体重不管以磅为单位还是以千克为单位,计算得到的指数值都会相同.事实上,百分比变化量与指数之间

有如下简单的换算关系^①:

$$\text{指数} = \left(1 + \frac{\text{百分比变化量}}{100} \right) \cdot (\text{基准指数})$$

如果将基准值设置为 100(本文都是这样设置),指数就能按如下简单公式求得:

$$\text{指数} = \text{百分比变化量} + 100$$

从上面的例子中可以看出,父亲体重百分比变化量为 10%,基准值设置为 100,因此有

$$\text{指数} = 10 + 100 = 110$$

这与之前得到的计算结果吻合.表 3 列出了各家庭成员体重变化的指数.

表 3 家庭成员体重变化的指数值

	2010 年体重/lb	2012 年体重/lb	变化量/lb	百分比变化量	指数
父亲	250	275	25	10%	110
母亲	125	150	25	20%	120
孩子	25	50	25	100%	200

指数评价方法经常需要在需要将若干数值与一个固定的基准值进行比较的情形下使用.这种方法使用了百分比,但是还要根据一个“基准”数值进行比较.有了一定了解之后,指数值是很容易掌握和理解的.下面来看另一个实例.

例 1 根据 1971—2000 年共 30 年的数据统计,美国 Oklahoma 城 Will Rogers 国际机场 7 月的平均降水量为 2.94 in^②.2011 年 7 月的降水量为 3.04 in.将基准指数设置为 100,2011 年 7 月的降水量的指数为

$$\frac{\text{2011 年指数}}{\text{基准指数}} = \frac{\text{2011 年降水量}}{\text{平均降水量}}$$

$$\text{2011 年指数} = \frac{\text{2011 年降水量}}{\text{平均降水量}} \times \text{基准指数}$$

$$\text{2011 年指数} = \frac{3.04}{2.94} \times 100 \approx 103$$

^① 公式中的“百分比变化量”是除去百分比符号“%”以外的数值,即百分比乘了 100,与百分比变化量的原始定义有所不同,请读者留意——译者注.

^② 1 in = 2.54 cm.