

本书由国家自然科学基金 (61601105、61501100) 资助

Electromagnetic Waves in Curved Spacetime

弯曲时空中的电磁波

贾守卿 著



東北大學出版社
Northeastern University Press

本书由国家自然科学基金（61601105、61501100）资助

弯曲时空中的电磁波

Electromagnetic Waves in Curved Spacetime

贾守卿 著

东北大学出版社

· 沈 阳 ·

© 贾守卿 2018

图书在版编目 (CIP) 数据

弯曲时空中的电磁波 / 贾守卿著. — 沈阳 : 东北
大学出版社, 2018. 10

ISBN 978-7-5517-2026-7

I. ①弯… II. ①贾… III. ①电磁波—研究 IV.
①O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 241814 号

出 版 者: 东北大学出版社

地址: 沈阳市和平区文化路三号巷 11 号

邮编: 110819

电话: 024-83683655(总编室) 83687331(营销部)

传真: 024-83687332(总编室) 83680180(营销部)

网址: <http://www.neupress.com>

E-mail: neuph@neupress.com

印 刷 者: 沈阳市第二市政建设工程公司印刷厂

发 行 者: 东北大学出版社

幅面尺寸: 185mm × 260mm

印 张: 17

字 数: 450 千字

出版时间: 2018 年 10 月第 1 版

印刷时间: 2018 年 10 月第 1 次印刷

策划编辑: 汪子珺

责任编辑: 李 佳

责任校对: 汪子珺

封面设计: 潘正一

ISBN 978-7-5517-2026-7

定 价: 75.00 元

目 录

绪 论	1
第 1 章 微分几何基础	5
1.1 曲线	5
1.2 曲面的第一基本形式	8
1.3 保长映射	12
1.4 曲面的第二基本形式	15
1.5 法曲率与 Gauss 曲率	17
1.6 Gauss 绝妙定理	21
1.7 测地曲率	24
1.8 测地线	28
1.9 法坐标系	32
1.10 协变导数 I	34
1.11 Gauss-Bonnet 公式	37
1.12 Lorentz 空间	39
1.13 微分流形与矢量	41
1.14 对偶矢量	44
1.15 张量	46
1.16 度规	50
1.17 协变导数 II	52
1.18 Killing 矢量场	57
1.19 Riemann 曲率张量	60
1.20 微分形式	64
1.21 对偶形式	68
1.22 外微分	70

第2章 相对论基础	76
2.1 测量	76
2.2 物理坐标系条件	80
2.3 时空转动	83
2.4 固有坐标系	86
2.5 平直时空	90
2.6 动力学	94
2.7 加速系	97
2.8 旋转系	101
2.9 广义相对性原理与等效原理	102
2.10 Einstein 方程	105
2.11 真空球对称度规	109
2.12 Schwarzschild 时空	113
2.13 Schwarzschild 时空中的质点运动	116
2.14 Schwarzschild 时空中的光子运动	125
2.15 Schwarzschild 黑洞	131
2.16 RN 时空与 KN 时空	134
第3章 双张量	137
3.1 双张量的定义与运算	137
3.2 Synge 世界函数	140
3.3 Synge 世界函数的重合极限	142
3.4 平行传播子	146
3.5 平行传播子的重合极限	148
3.6 Van Vleck 行列式	150
3.7 Van Vleck 行列式的重合极限	154
3.8 张量的协变展开	155
3.9 双张量的协变展开	157
3.10 Synge 世界函数的协变展开	161
3.11 Synge 世界函数的传输方程	165
3.12 平行传播子的协变展开与传输方程	168
3.13 Van Vleck 行列式的协变展开与传输方程	170

第4章 电磁理论	174
4.1 经典电磁理论	174
4.2 经典电磁理论的张量形式	182
4.3 Maxwell 方程组	186
4.4 Schwarzschild 时空中的光线	189
4.5 波动方程	192
4.6 Dirac 冲激函数	194
4.7 Green 函数	199
4.8 U 的重合极限与协变展开	202
4.9 U 的传输方程	205
4.10 V 的协变展开与传输方程	207
4.11 电磁场的积分表示	210
第5章 电磁场的数值方法	214
5.1 时域有限差分法	214
5.2 FDTD 的电偶极子源	219
5.3 FDTD 的数值稳定性	221
5.4 完全匹配层	223
5.5 FDTD 中的 PML	228
5.6 Schwarzschild 时空中的电磁波——FDTD 法	233
5.7 FDTD 的连接边界	236
5.8 FDTD 的输出边界	241
5.9 Schwarzschild 时空中的电磁散射——FDTD 法	244
5.10 时域有限体积法	247
5.11 FVTD 中的 PML	255
5.12 FVTD 的连接边界与输出边界	258
5.13 Schwarzschild 时空中的电磁散射——FVTD 法	260
参考文献	263

绪 论

目前,对电磁波的研究已经深入各个领域,应用十分广泛。例如,无线电波传播、光纤通信、移动通信、雷达技术、微波技术、天线、电磁成像、电磁兼容和医疗等。可以说,以电磁理论为基础发展起来的大量技术已经成为我们生活的一部分。

从电磁理论发展的过程来看,可分为经典电磁学^[1-4]阶段和计算电磁学^[5-11]阶段。自1864年Maxwell在前人理论与实践的基础上,总结概括出宏观电磁场的基本规律,得出著名的Maxwell方程组,直至20世纪60年代,这一阶段可以称为经典电磁学阶段。随着高性能计算机的出现和计算方法的进步,以矩量法(method of moments, MoM)^[5]和时域有限差分法(finite difference time domain, FDTD)^[6-8]为代表的精确数值计算方法的应用,开创了电磁场计算研究的新时代,标志着计算电磁学阶段的到来。后来,随着有限元法(finite element method, FEM)^[9]、时域有限体积法(finite volume time domain, FVTD)^[10, 11]等计算方法的引入,使得电磁场求解的数值方法更加丰富。

经典电磁理论直接导致了1905年狭义相对论^[12-14]的建立。狭义相对论预言了尺缩、钟慢等违反人们常识的效应。狭义相对论改变了人们的时空观,时间和空间不再是相互无关的,而应该视为一个整体,称为时空(spacetime)。

然而,经典电磁理论及狭义相对论只是平直时空中的理论。1916年,广义相对论^[15-23]建立后,人们认识到,由于有物质的存在,时空会发生弯曲。可以用弯曲时空描述引力场,而物质由于万有引力作用产生的加速运动,可以看成弯曲时空中的测地线运动。光也是一种物质,它在弯曲时空中也沿测地线运动,因此,光在弯曲时空中的传播路径不再是直线,而是曲线(图0.1.1)。光线弯曲会引起引力透镜效应(图0.1.2),即一个光源形成一圈像。广义相对论还预言了引力波的存在,现已被直接观测所证实^[24]。相对论已经成为现代物理理论的基础之一。

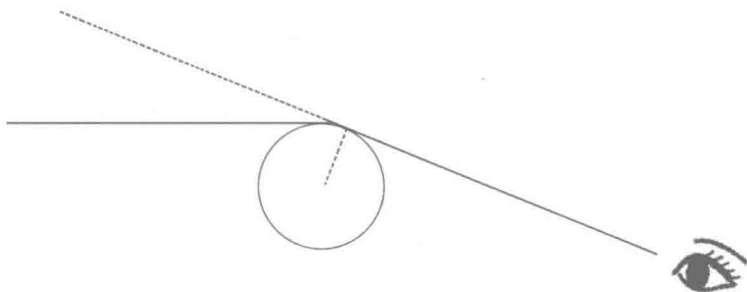


图0.1.1 光线弯曲

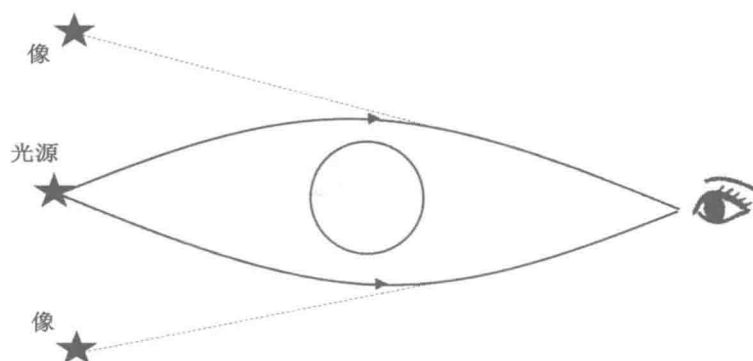


图 0.1.2 引力透镜效应

自从 1957 年苏联发射了第一颗人造地球卫星后，人类就拉开了探测宇宙的序幕。近年来，随着航天事业的进一步发展，深空通信越来越引起人们的关注。目前，我国的载人航天事业正处于蓬勃发展过程中，而通信是维系人类与航天器的纽带，是进行宇宙探索活动必不可少的环节。参照国际电信联盟 (ITU) 于 1971 年在日内瓦召开的关于宇宙通信的世界无线电行政会议的规定，以宇宙飞行体为对象的无线电通信，正式称为宇宙无线电通信，简称为宇宙通信。它有三种形式：① 地球站与宇宙站之间的通信；② 宇宙站之间的通信；③ 通过宇宙站的转发或反射来进行的地球站相互间的通信，即通常所说的卫星通信。

宇宙中大质量星体比比皆是，它们的引力场对于通信电波的影响已经不能忽略。文献[25]讨论了引力对通信的影响。引力场中的电磁特性已引起人们的研究兴趣^[26-34]。文献[26]讨论了弯曲时空中的 Maxwell 方程特性。文献[27-30]研究了引力场中光的传播特性。文献[31]研究了弯曲时空中的多普勒效应，文献[32-34]研究了光线在引力场中的时间延迟。这些都是理论研究，目前进行实验研究的成本较高，因此，采用数值计算的研究方法就成为更好的选择。有关弯曲时空中数值方法的研究报道很少，仅有的如文献[35-37]。

平直时空的计算电磁学已发展到成熟阶段，而弯曲时空的计算电磁学才刚刚开始。这是一个崭新的领域，会有极大的发展空间。仅有平直时空的计算电磁学不能称为完整的计算电磁学，发展一般时空的计算电磁学可以使这一学科成为完整的学科，因此，具有重大的理论意义。而在应用方面，随着太空科技的发展，人类已经进入外太空探索。而外太空强引力场中的电磁波特性与地球上的是不一样的，这势必会影响宇宙通信。强引力场中的电磁波传播、散射等问题都是需要研究的重要课题。另外，天文学中星体的辐射及星光传播也是重要的研究课题，这也离不开广义相对论背景下的电磁理论。由于数值方法是成本最低的研究方法，因此，一般时空中的计算电磁学将大有用武之地。

相对论的数学基础是微分几何^[38-42]。简单地说，微分几何就是研究“弯曲”的学问。“弯曲”分成两种：内蕴的和外蕴的。观察球面和圆柱面(图 0.1.3)，若将圆柱面沿

母线剪开，它可以展开成一张完整的平面；而球面是做不到的。球面的“弯曲”是内蕴的，而圆柱面的“弯曲”是外蕴的。所谓内蕴的意思是，“弯曲”与其嵌入第三维的方式无关。反之，由嵌入第三维的方式产生的“弯曲”就是外蕴的，例如，圆柱面就是把平面卷曲形成的，而球面不是。数学家们将内蕴的概念推广到高维空间，就产生了近代微分几何学。Einstein 将时间与空间视为四维时空，利用近代微分几何学，创立了广义相对论。

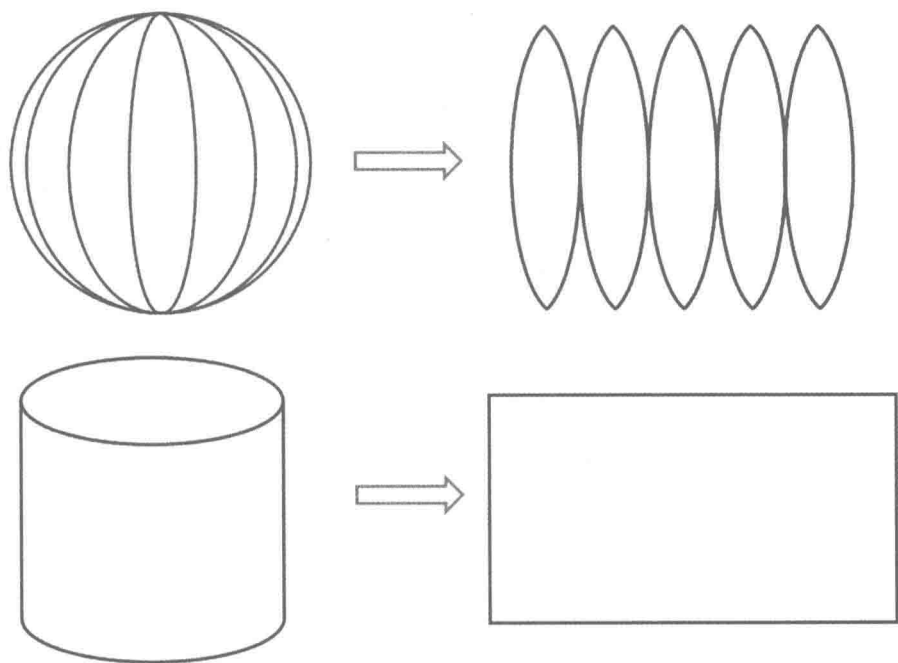


图 0.1.3 球面和圆柱面展开

广义相对论的核心方程是 Einstein 方程。该方程将物质分布的能动张量与时空度规联系起来。给定物质分布，由该方程可解出时空度规，即时空的度量性质。知道了度规，也就知道了该时空的测地线，即物质运动轨迹。Einstein 方程是二阶非线性方程，一般的求解非常困难。Schwarzschild 求出了 Einstein 方程的一个球对称真空解，称为 Schwarzschild 度规。一般的引力源附近的时空都可以看作 Schwarzschild 时空，本书也将重点讨论该时空。

可以通过把 Maxwell 方程组的经典形式中的偏导数换成协变导数，直接写出广义相对论中的 Maxwell 方程组。经过适当的定义，可以发现，弯曲时空中的 Maxwell 方程组相当于填充了某种介质的平直时空^[43-45]。因此，平直时空中电磁场的计算方法可直接用于弯曲时空。平直时空中的 Green 函数具有简单的解析式，而弯曲时空中的 Green 函数^[46-49]没有简单的解析式。弯曲时空中的 Green 函数是双张量，需要专门建立双张量的理论以便对它进行研究。弯曲时空中 Green 函数的计算非常复杂，需求解一系列微分方程。

本书第 1 章介绍微分几何;第 2 章介绍相对论;第 3 章介绍双张量;第 4 章介绍弯曲时空的电磁理论;第 5 章介绍电磁场的数值方法,并将它用于 Schwarzschild 时空。

本书并不涉及黑洞散射与辐射问题。

第1章 微分几何基础

微分几何是相对论的数学基础。古典微分几何以三维欧式空间的曲线与曲面为研究对象。它的出发点很直观：曲线的切线与微分是同一概念。Gauss 绝妙定理表明，曲面的度量性质本身蕴含了弯曲性质。于是，数学家们将曲面的概念推广到高维空间，发展出近代微分几何。多数相对论著作在介绍数学基础时，都是直接讲述近代微分几何。由于其抽象性，初学者往往不知其来源。本章从古典微分几何讲起（第1~12节），而近代微分几何（第13~22节）中的很多概念其实是古典微分几何的自然扩展。

1.1 曲线

令 $\mathbf{a}(t)$ 是处处非零的连续可微的矢量函数，则

$$\|\mathbf{a}(t)\| = \text{const} \Leftrightarrow \mathbf{a}'(t) \cdot \mathbf{a}(t) = 0 \quad (1.1.1)$$

这里 const 表示常数。证明： $\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{a}(t) = \|\mathbf{a}(t)\|^2 = \text{const}$ ，对式(1.1.1)两边求导，得 $2\mathbf{a}'(t) \cdot \mathbf{a}(t) = 0$ 。证毕。

三维欧式空间的曲线 C 可用参数式

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in [a, b] \quad (1.1.2)$$

表示。式(1.1.2)称为曲线 C 的参数方程。参数方程 $\mathbf{r}(t)$ 要满足下面两个条件：

① $\mathbf{r}(t)$ 至少是 t 的三次以上连续可微的矢量函数；

② 处处是正则点，即对于任意的 t 有 $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ 。

这样的参数曲线称为正则参数曲线。参数方程的导数

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = (x'(t), y'(t), z'(t)) \quad (1.1.3)$$

给出了曲线的切矢量。

令

$$s = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt \quad (1.1.4)$$

则 s 是该曲线的一个不变量，也就是说，它与参数 t 的选取无关。若取 u 作为曲线参数，设它与 t 之间关系为

$$t = t(u), u \in [\alpha, \beta]$$

且

$$t'(u) > 0, t(\alpha) = a, t(\beta) = b$$

则有

$$\int_a^b \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\| dt = \int_a^b \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\| \frac{dt}{du} du = \int_a^b \left\| \frac{d\mathbf{r}}{du} \right\| du$$

这说明式(1.1.4)中 s 的定义与参数的选择无关。对于 $[a, b]$ 的任一分割

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

有

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \|\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})\| = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt$$

其中, $\lambda = \max\{t_i - t_{i-1}\}$ 。上式左边表示将分割点 $\mathbf{r}(t_i)$ ($i = 0, 1, \cdots, n$) 连接起来的折线长度的极限, 也就是曲线的线长。所以, 不变量 s 表示曲线 C 的线长。

令

$$s = \int_a^t \|\mathbf{r}'(\lambda)\| d\lambda \quad (1.1.5)$$

它表示曲线从 a 到 t 的线长。可以把 s 作为曲线的参数, 参数方程记为 $\mathbf{r}(s)$, 称 s 为线长参数。对式(1.1.5)求导, 有

$$\frac{ds}{dt} = \|\mathbf{r}'(t)\| \quad (1.1.6)$$

或

$$ds = \|\mathbf{r}'(t)\| dt \quad (1.1.7)$$

把 ds 称为线元。易知: 参数 t 是线长参数(即 $t = s$) 的充分必要条件是

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = 1 \quad (1.1.8)$$

或者说, 曲线以线长为参数的充分必要条件是切矢量的模为 1。

下面以线长为参数讨论。令

$$\boldsymbol{\alpha}(s) = \mathbf{r}'(s) = \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} \quad (1.1.9)$$

它是曲线的单位切矢量。令

$$\boldsymbol{\kappa}(s) = \boldsymbol{\alpha}'(s) = \mathbf{r}''(s) \quad (1.1.10)$$

称 $\boldsymbol{\kappa}$ 为曲率矢量, 它的模

$$\kappa(s) = \|\boldsymbol{\kappa}(s)\| \quad (1.1.11)$$

称为曲率。用 $\Delta\theta$ 表示 $\boldsymbol{\alpha}(s + \Delta s)$ 与 $\boldsymbol{\alpha}(s)$ 之间的夹角, 可以证明(图 1.1.1)

$$\kappa(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \right|$$

由此可见, 曲率是描述曲线弯曲程度的量。可以证明: 曲线 C 是直线当且仅当曲率为零。

由于 $\boldsymbol{\alpha}(s)$ 的模为 1, 由式(1.1.1)可知曲率矢量与切矢量正交

$$\boldsymbol{\kappa}(s) \perp \boldsymbol{\alpha}(s)$$

所以, 曲率矢量是曲线的法矢量。将曲率矢量方向的单位矢量记为 $\boldsymbol{\beta}(s)$, 即

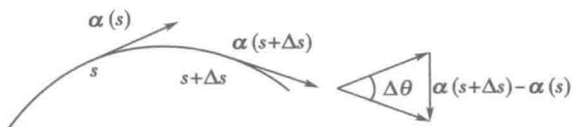


图 1.1.1 曲率

$$\kappa(s) = \kappa(s)\beta(s) \quad (1.1.12)$$

β 称为主法矢量。切矢量与主法矢量确定了曲线的次法矢量 $\gamma(s)$

$$\gamma(s) = \alpha(s) \times \beta(s) \quad (1.1.13)$$

这样, 在曲线上的每一点 $r(s)$, 都有三个相互正交的矢量 $\alpha(s)$, $\beta(s)$, $\gamma(s)$, 可以把这三个矢量作为该点的基矢, 或称标架, 记为 $\{r(s); \alpha(s), \beta(s), \gamma(s)\}$ 。该标架称为曲线的 Frenet 标架, 如图 1.1.2 所示。将 α, β 张成的平面称为密切平面, 即图 1.1.2 中的 P 。

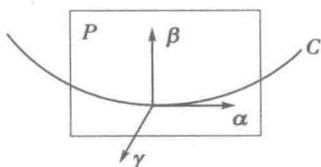


图 1.1.2 Frenet 标架

若曲线 C 在平面 $z = 0$ 上, 则 $\alpha(s) = (x'(s), y'(s), 0)$, 记

$$k(s) = (-y'(s), x'(s), 0) \quad (1.1.14)$$

它是一个单位法矢量, 由 α 绕 z 轴正向旋转 90° 得到 (图 1.1.3), 与主法矢量 $\beta(s)$ 差一个正负号。定义

$$\kappa_r(s) = \alpha'(s) \cdot k(s) \quad (1.1.15)$$

为平面曲线的相对曲率, 它与曲率差一个正负号

$$\kappa_r(s) = \pm \kappa(s) \quad (1.1.16)$$

次法矢量 $\gamma(s)$ 是该平面的法矢量, 是一个常矢量, 所以, $\gamma'(s) = 0$ 。

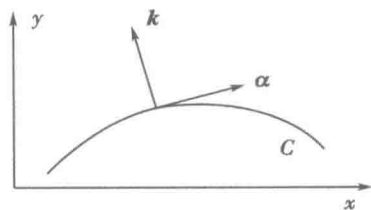


图 1.1.3 平面曲线

对于一般三维曲线, $\gamma'(s)$ 反映了密切平面的转动, 因此, $\|\gamma'(s)\|$ 刻画了曲线偏离平面的程度。对式 (1.1.13) 求导, 得

$$\gamma'(s) = \alpha'(s) \times \beta(s) + \alpha(s) \times \beta'(s)$$

由于 $\alpha'(s) \parallel \beta(s)$, 所以, $\gamma'(s) = \alpha(s) \times \beta'(s)$, 这说明

$$\gamma'(s) \perp \alpha(s)$$

由式(1.1.1)知

$$\gamma'(s) \perp \gamma(s)$$

由以上两式可知 $\gamma'(s) \parallel \beta(s)$ 。可令

$$\gamma'(s) = -\tau(s)\beta(s) \quad (1.1.17)$$

其中

$$\tau(s) = -\gamma'(s) \cdot \beta(s) \quad (1.1.18)$$

称为曲线的挠率,是曲线偏离平面程度的度量。

设

$$\beta'(s) = a\alpha(s) + b\beta(s) + c\gamma(s) \quad (1.1.19)$$

利用正交性可得

$$a = \beta'(s) \cdot \alpha(s) = -\beta(s) \cdot \alpha'(s) = -\kappa(s)$$

$$b = \beta'(s) \cdot \beta(s) = 0$$

$$c = \beta'(s) \cdot \gamma(s) = -\beta(s) \cdot \gamma'(s) = \tau(s)$$

所以,式(1.1.19)为

$$\beta'(s) = -\kappa(s)\alpha(s) + \tau(s)\gamma(s) \quad (1.1.20)$$

将式(1.1.10)、式(1.1.12)、式(1.1.20)、式(1.1.17)合写为 Frenet 公式:

$$\begin{bmatrix} \alpha'(s) \\ \beta'(s) \\ \gamma'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha(s) \\ \beta(s) \\ \gamma(s) \end{bmatrix} \quad (1.1.21)$$

1.2 曲面的第一基本形式

从二维欧氏空间 $\mathbf{R}^2$ 中的一个区域 D 到三维欧氏空间 $\mathbf{R}^3$ 的一个连续可微映射定义了一个参数曲面 S :

$$\mathbf{r}(u^1, u^2) = (x(u^1, u^2), y(u^1, u^2), z(u^1, u^2)), (u^1, u^2) \in D \quad (1.2.1)$$

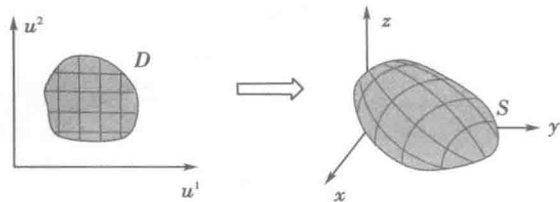


图 1.2.1 参数曲面

这里假定函数 $\mathbf{r}(u^1, u^2)$ 有三次以上的连续偏导数。 (u^1, u^2) 可以作为曲面上点的坐标,称为曲纹坐标(简称坐标)。将曲线

$$u^2 = \text{const} \quad \text{或} \quad \mathbf{r}(u^1, \text{const})$$

称为 u^1 -曲线。曲线

$$u^1 = \text{const} \quad \text{或} \quad \mathbf{r}(\text{const}, u^2)$$

称为 u^2 -曲线。记

$$\mathbf{r}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^\alpha} \quad (\alpha = 1, 2) \quad (1.2.2)$$

$\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ 是曲面的两个切矢量。若

$$\mathbf{r}_1(u_0^1, u_0^2) \times \mathbf{r}_2(u_0^1, u_0^2) \neq \mathbf{0}$$

则称曲面 S 在点 (u_0^1, u_0^2) 处是正则的。正则点 (u_0^1, u_0^2) 的任一邻域 $U \subset D$ 与曲面 $S|_U$ 的点是一一对应的。处处是正则点的参数曲面称为正则参数曲面。

对于用球坐标 (θ, φ) 表示的单位球面

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$$

有

$$\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\varphi = (\sin^2\theta\cos\varphi, \sin^2\theta\sin\varphi, \sin\theta\cos\theta)$$

它在 $\theta = 0, \pi$ 处为零, 所以 $\theta = 0, \pi$ 不是正则点。为了在球面上各点都有正则坐标, 可以把球面分区(不同区之间可以有重叠), 每个区上定义一个正则坐标。比如

$$\begin{cases} \mathbf{r} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta), \theta \in (0, \pi), \varphi \in [0, 2\pi) \\ \mathbf{r} = (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2}), x^2+y^2 < 1 \\ \mathbf{r} = (x, y, -\sqrt{1-x^2-y^2}), x^2+y^2 < 1 \end{cases} \quad (1.2.3)$$

把像式(1.2.3)这样, 由多个正则参数定义的曲面叫作正则曲面, 严格定义如下:

设 $S \subset \mathbf{R}^3$, 对于任意一点 $p \in S$, 存在 p 的邻域 $V \subset \mathbf{R}^3$ 及区域 $U \subset \mathbf{R}^2$, 使得在 U 和 $V \cap S$ 之间能够建立一一对应的、双向都是连续的映射, 并且该映射 $\mathbf{r}: U \rightarrow V \cap S$ 本身是一个正则参数曲面, 则称 S 是 $\mathbf{R}^3$ 中的一个正则曲面, 简称为曲面。

正则曲面上一点的邻域内可以有不止一个坐标系。设曲面 S 在 $U \subset \mathbf{R}^2$ 上有两个正则参数表示: $\mathbf{r}(u^1, u^2)$ 和 $\mathbf{r}(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$, 则两组参数(坐标)之间的变换

$$u^\alpha = u^\alpha(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \quad (\alpha = 1, 2)$$

要满足下面两个条件:

① $u^\alpha(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$ 是 $\tilde{u}^1, \tilde{u}^2$ 的三次以上连续可微函数;

② Jacobian 行列式 $\frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{vmatrix} \neq 0$ 。

这样的变换称为容许参数(坐标)变换。可以证明, 在容许参数变换下, 参数的正则性保持不变。

曲面 S 上的曲线 C 可用参数方程

$$u^\alpha = u^\alpha(t) \quad (\alpha = 1, 2)$$

或

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(u^1(t), u^2(t))$$

表示。曲面 S 上经过一点 p 的曲线在该点的切矢量称为 S 在点 p 的一个切矢量。设 p 是上式对应 $t = 0$ 的点, 则曲线 C 在 p 点的切矢量是

$$\tau_p = \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{t=0} = \left(\mathbf{r}_1 \frac{du^1}{dt} + \mathbf{r}_2 \frac{du^2}{dt} \right)_{t=0} \quad (1.2.4)$$

这说明 S 在点 p 的切矢量是切矢量 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ 的线性组合。反过来, $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ 的任意一个线性组合都是 S 的切矢量。记 $\mathbf{V} = v^1 \mathbf{r}_1 + v^2 \mathbf{r}_2$, 则它是曲线

$$u^\alpha = u_0^\alpha + v^\alpha t \quad (\alpha = 1, 2)$$

在 (u_0^1, u_0^2) 的切矢量。

将式(1.2.4)中切矢量的分量记为 $\tau^\alpha = du^\alpha/dt$, 即

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_{\alpha=1}^2 \mathbf{r}_\alpha \tau^\alpha$$

引入 Einstein 求和约定: 重复的上下标表示求和。在该约定下, 上式可省略求和符号, 写成

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r}_\alpha \tau^\alpha$$

对于另一个坐标系 $(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$, 有

$$\boldsymbol{\tau} = \tilde{\mathbf{r}}_\alpha \tilde{\tau}^\alpha$$

其中, $\tilde{\mathbf{r}}_\alpha = \partial \mathbf{r} / \partial \tilde{u}^\alpha$, $\tau^\alpha = d\tilde{u}^\alpha/dt$ 。由求导法则可得

$$\tilde{\tau}^\alpha = \frac{\partial \tilde{u}^\alpha}{\partial u^\beta} \tau^\beta \quad (1.2.5)$$

这是切矢量在两个坐标系中的分量之间的变换公式。

对于正则参数曲面有 $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 \neq \mathbf{0}$, 故 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ 是线性无关的, 因此, 曲面 S 在点 p 的切矢量全体构成一个以 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ 为基底的二维矢量空间(一般来说, $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ 不是单位正交基底), 称为 S 在点 p 的切空间, 记为 $T_p S$ 。经过点 p , 由 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ 张成的平面叫作 S 在点 p 的切平面。切平面的单位法矢量是

$$\mathbf{n}(u^1, u^2) = \frac{\mathbf{r}_1(u^1, u^2) \times \mathbf{r}_2(u^1, u^2)}{\|\mathbf{r}_1(u^1, u^2) \times \mathbf{r}_2(u^1, u^2)\|} \quad (1.2.6)$$

标架 $\{\mathbf{r}(u^1, u^2); \mathbf{r}_1(u^1, u^2), \mathbf{r}_2(u^1, u^2), \mathbf{n}(u^1, u^2)\}$ 称为曲面的自然标架。

有微分式

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_\alpha du^\alpha \quad (1.2.7)$$

也可以把 du^α 看成数, 则微分 $d\mathbf{r}$ 可以看作切矢量。线元为

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta du^\alpha du^\beta \quad (1.2.8)$$

记

$$g_{\alpha\beta} = \mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta \quad (1.2.9)$$

称为曲面的第一类基本量或者度规(metric), 记 $I = ds^2$, 称为曲面的第一基本形式, 即

$$I = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta \quad (1.2.10)$$

它反映的是曲面的度量性质。根据式(1.2.9), 度规是对称的, 即

$$g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha} \quad (1.2.11)$$

用 g 表示度规矩阵的行列式:

$$g = \det(g_{\alpha\beta}) = g_{11}g_{22} - (g_{12})^2 \quad (1.2.12)$$

由于 $ds^2 > 0$, 所以 $g_{\alpha\beta}$ 是正定矩阵, $g > 0$ 。若 $g_{12} = g_{21} = 0$, 表示 $\mathbf{r}_1$ 与 $\mathbf{r}_2$ 正交, 称 (u^1, u^2) 为正交坐标系。对于平面, 若采用正交归一坐标系, 则有 $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$, 这里

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta \\ 0, & \alpha \neq \beta \end{cases}$$

二次微分式 I 与参数的选取无关。设 $\tilde{u}^\alpha$ 是另一组参数, 它与 u^α 之间差一个容许参数变换。有

$$du^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial \tilde{u}^\beta} d\tilde{u}^\beta \quad (1.2.13)$$

$$\tilde{\mathbf{r}}_\alpha = \mathbf{r}_\beta \frac{\partial u^\beta}{\partial \tilde{u}^\alpha} \quad (1.2.14)$$

记

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = \tilde{\mathbf{r}}_\alpha \cdot \tilde{\mathbf{r}}_\beta \quad (1.2.15)$$

由以上两式可写出

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{\alpha\beta} d\tilde{u}^\alpha d\tilde{u}^\beta &= \tilde{\mathbf{r}}_\alpha \cdot \tilde{\mathbf{r}}_\beta d\tilde{u}^\alpha d\tilde{u}^\beta \\ &= \mathbf{r}_\gamma \frac{\partial u^\gamma}{\partial \tilde{u}^\alpha} \cdot \mathbf{r}_\delta \frac{\partial u^\delta}{\partial \tilde{u}^\beta} d\tilde{u}^\alpha d\tilde{u}^\beta \\ &= g_{\gamma\delta} \frac{\partial u^\gamma}{\partial \tilde{u}^\alpha} d\tilde{u}^\alpha \frac{\partial u^\delta}{\partial \tilde{u}^\beta} d\tilde{u}^\beta \end{aligned} \quad (1.2.16)$$

将式(1.2.13)代入式(1.2.16), 得

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} d\tilde{u}^\alpha d\tilde{u}^\beta = g_{\gamma\delta} du^\gamma du^\delta \quad (1.2.17)$$

这表明在容许参数变换下 I 的形式不变。由式(1.2.16)可看出两个坐标系中度规的关系为

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = \frac{\partial u^\gamma}{\partial \tilde{u}^\alpha} \frac{\partial u^\delta}{\partial \tilde{u}^\beta} g_{\gamma\delta} \quad (1.2.18)$$

两个切矢量 $\mathbf{v} = v^\alpha \mathbf{r}_\alpha$ 与 $\mathbf{w} = w^\alpha \mathbf{r}_\alpha$ 的内积为

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = g_{\alpha\beta} v^\alpha w^\beta \quad (1.2.19)$$

记两矢量夹角为 $\angle(\mathbf{v}, \mathbf{w})$, 则