PINMIAN JIHE ZHENGTI ZHIDAO

平面几何证题指导

数 学 小 丛 书

平面几何证题指导

杨圣承 万良评
谌瑞生 陆明仁 编著

江西人民出版社

一九八〇·四·南昌

数学小丛书

平面几何证题指导

杨圣宏 万良平 谌瑞生 陆明仁 编著

江西人民出版社出版
（南昌百花洲3号）
江西省新华书店发行　江西新华印刷厂印刷
开本 787×1092 1/32　印张 7 1/4
1980年11月第1版　1980年11月江西第1次印刷
印数：1—20,000

统一书号：7110·269　定价：0.60元

目　　录

第四章　几何计算

第五章　审题与小结

编 者 的 话

在沐浴着“四化”春风的八十年代初，本书和读者见面了。作为知识海洋的壳贝，科学园地的丛花，我们采集来献给向“四化”进军的战友！

平面几何是重要的基础知识，是培养分析问题、解决问题的能力和训练逻辑思维的有力工具。以“线段”为“投枪”，锻炼思考能力；用“圆”做“圈操”，培养思想精巧。“心有灵犀一点通”，令多少读者向往。但“灵犀”只能来源于科学方法指导下的实践。本书力图通过平面几何教学实践的体会介绍，与读者共同探索几何论证的规律和方法。

几何论证是学习几何的重点与难点，是本书主要着笔之处，作为几何证明的补充与延伸，我们还写了“几何作图”与“几何计算”这两章。

本书由杨圣宏主编，第二、三、四章分别由万良平、陆明仁、谌瑞生执笔，第一、五章由杨圣宏执笔。

人民教育出版社吕学礼、鲍珑、蔡上鹤等同志对本书进行了认真审阅，提出了宝贵的修改意见；黄贤汶副教授也审阅了本书，并提出很好的建议；杨德华老师也对本书提出了修改意见。对此，我们表示衷心的感谢。

本书编写时，参阅了梁绍鸿先生的《初等数学复习与研究》（平面几何），许纯舫先生的《平面几何学习指导》等书目，深表谢忱。

一九八〇年春于南昌

第一章　几何论证过程的分析

平面几何是研究平面图形的形状、位置、大小关系等性质的科学。几何论证是几何学的重要内容。论证几何题时，常根据题中的要求，通过不同的途径和方法，由题中所给的条件逐步导出问题的结论。为了使我们对几何论证的过程更具自觉性，从而能更有效地发挥主观能动作用，促使几何论证过程的完成，我们来对几何论证的过程加以分析。

§1　明确要求——直接证法与间接证法

每做一件事，必须明确这件事的要求，否则，就没有目标，无从下手。为了搞清楚几何论证的目标，我们先研究几何命题及其等效性。

Ⅰ．命题及其等效性

日常生活中，我们把判断一件事情的句子叫做命题。例如：

这个盒子里的粉笔是白色的粉笔；

那张桌上的书是数学课本；

等腰三角形的两个底角相等；

若三角形是直角三角形，则三角形有两个角相等。

命题由题设和结论组成，如上述例子中，“这个盒子里的粉笔”，“那张桌上的书”，“等腰三角形”，“直角三角形”等是命题的题设，而“白色的粉笔”，“数学课本”，“两底角相等”，“有两个角相等”等是命题的结论。

命题有正确的，也有不正确的。上例中

“等腰三角形的两个底角相等”是正确的。

“若三角形是直角三角形，则三角形有两个角相等”是不正确的。

将一个命题的题设和结论加以肯定或否定，并注意到题设和结论的交换，可得到四种形式的命题。如我们把命题“若有A，则有B”叫做原命题；把原命题的题设和结论互相逆转的命题“若有B，则有A”叫原命题的逆命题；把原命题的题设和结论都加以否定的命题“若没有A，则没有B”叫原命题的否命题；把原命题的题设加以否定后作为结论，且把原命题的结论加以否定后作为题设的命题“若没有B，则没有A”叫原命题的逆否命题。

例1.1 ① 若三角形是等腰三角形，则三角形有两个等角（原命题）；

② 若三角形有两个等角，则三角形是等腰三角形（逆命题）；

③ 若三角形不是等腰三角形，则三角形没有两个等角（否命题）；

④ 若三角形没有两个等角，则三角形不是等腰三角形（逆否命题）。

例1.2 ① 若两个角都是直角，则两个角相等（原命题）；

② 若两个角相等，则两个角都是直角（逆命题）；

③ 若两个角不都是直角，则两个角不相等（否命题）；

④ 若两个角不相等，则两个角不都是直角（逆否命题）；

因为对“一个事物”的“肯定”，就是对“否定这个事物”的“否定”，所以，我们可把四种形式的命题中的任意一种看成原命题，而其他三种命题就成了这个原命题的逆命题、

否命题和逆否命题。如

把例1.1 中的命题②看成原命题，则

命题①为命题②的逆命题；

命题③为命题②的逆否命题；

命题④为命题②的否命题。

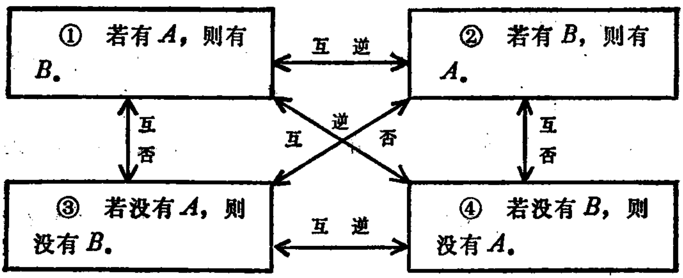
又如，把例 1.2 中的命题③看成原命题，则

命题①为命题③的否命题；

命题②为命题③的逆否命题；

命题④为命题③的逆命题。

一般说来，四种形式的命题间的关系可用下图表示：



我们来分析四种形式的命题的正确性。

例 1.1 中，互为逆否命题的①与④同是正确的；互为逆否命题的②与③同是正确的。

例1.2 中，互为逆否命题的①与④同是正确的；而互为逆否命题的②与③同是不正确的。

一般说来，互为逆否命题的两个命题中，若有一个正确，则另一个也正确；若有一个不正确，则另一个也不正确。互为逆否命题的两个命题同正确或同不正确的事实，说明它们虽然

表述形式不同，但实质是一致的。这表明互为逆否命题的两个命题是等效的。

我们知道了两个互为逆否命题的命题是等效的，但两个互逆的命题是否等效呢？如

例 1.1 中，命题①正确，它的逆命题②也是正确的；

例 1.2 中，命题①正确，它的逆命题②却不正确。

通过上例可看出，互逆的两个命题在有的情况下是等效的，有的情况下是不等效的。值得注意的是在怎样的情况下，互逆的两个命题才是等效的？我们来研究下面的例子：

例1.3 ①若一个角是直角三角形中的直角，则这个角是直角三角形中的最大角（原命题）；

②若一个角是直角三角形中的最大角，则这个角是直角三角形中的直角（逆命题）。

例1.4 ①若一个角是非等腰三角形中的直角，则这个角是这三角形中的最大角（原命题）；

②若一个角是非等腰三角形中的最大角，则这个角是这三角形中的直角。（逆命题）。

显然，例 1.3 中的互逆命题同是正确的，例 1.4 中的原命题①正确，而逆命题②却不正确。

观察例 1.3 中命题的题设和结论所论述的对象，“直角三角形中的直角”与“直角三角形中的最大角”都是“唯一存在”的。当命题的题设和结论所论述的对象同是“唯一存在”时，我们说命题的题设和结论具有“同一性”。此时，原命题和逆命题是等效的。

例 1.4 中，命题的题设和结论所论述的对象，“三角形中的直角”是“唯一存在”的；而“三角形中的最大角”却不一定是直角，在不存在直角的三角形中，最大角可以是钝角或最

大的锐角，因此，它不是“唯一存在”的．命题的题设和结论不具备“同一性”，此时，原命题与逆命题不等效．

注意：命题的题设和结论所论述的对象的“唯一存在”是相对的，随着我们对图形的要求的不同而不同．如例1.4中命题所论述的“直角”是一个有确定度数的“唯一”的角，所以要求“非等腰三角形中的最大角”也是度数“唯一”确定的角与之相适应，但因为三角形的最大角的度数随着三角形的不同而不同，所以，例1.4的命题的题设和结论不具有“同一性”；

又如，例1.5① 若一个角是非等腰三角形中最大边所对的角，则这个角是这三角形的最大角(原命题)；

② 若一个角是非等腰三角形的最大角，则这个角是这三角形中最大边所对的角(逆命题)．

命题所论述的对象是对一个任意的非等腰三角形来说的，“最大边所对的角”与“三角形的最大角”都是“唯一存在”的，并不要求有确定的角度数，所以命题的题设和结论具有“同一性”因而命题①与②是等效的．

上述两例中，“非等腰三角形的最大角”在例1.4中不是“唯一存在”的，但在例1.5中却是“唯一存在”的，这是因为对图形的要求不同，例1.4中，“非等腰三角形的最大角”要求与“直角”相适应，“唯一”性是指角度数的“唯一”，而此例中，不同的非等腰三角形的最大角的度数不是“唯一存在”的；但例1.5中“非等腰三角形的最大角”是指一个非等腰三角形的三个角中的最大角，它是“唯一存在”的．

必须注意，有的命题的题设和结论所论述的对象的“同一性”是显然的，这时，我们可以直接肯定互逆的两个命题是等效的，但有的命题的题设和结论所论述的对象的“同一性”不是显然的，如例1.1中的命题①和②，这时，须要用其他方法

去证明互逆命题的等效性，而不能直接根据未经过证明的“同一性”来下结论。

等效命题在几何论证时有很大的作用，我们可以把要求论证的几何命题换成一个较易证明的等效命题来证明（这在下面要专门论述）；还可以把已知的定理或条件，换成它的等效命题来表述，从而在应用时更方便。

例1.6　求证：一个半径等于1的圆不能被两个半径小于1的圆复盖住。

证明：如图1—1，

设⊙O为半径等于1的圆，又半径小于1的两个圆O_1，O_2的半径分别为r_1，r_2。

设⊙O_1的圆心在任意点O_1，连OO_1，过O作OO_1的直径PQ。（若O与O_1重合，则可任意作⊙O的直径PQ）。则

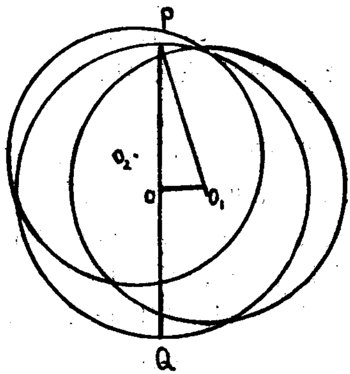


图　1—1

$O_1P \geqslant OP = 1 > r_1$，

∴　点P在⊙O_1的外面，同理，点Q在⊙O_1的外面。

又　∵　$PQ = 2 > 2r_2$，

而圆内两点的最大距离等于圆的直径（A）。即距离大于圆的直径的两点，不可能同在圆内（B）。

故不论⊙O_2置于何处，P，Q两点不可能同时被⊙O_2盖住。

∴　一个半径等于1的圆不能被两个半径小于1的圆盖

住。

注意：证题过程中应用了“圆内两点的最大距离等于直径”（A）的等效命题“距离大于直径的两点不可能同在圆内”（B），从而导出“P，Q两点不可能同在$\odot O_2$内”。

Ⅰ 直接证法与间接证法

我们知道互为逆否命题的两个命题是等效的，又知道具有“同一性”的两个互逆命题是等效的。当要证的几何命题不易直接证得时，我们可以论证它的等效命题。因此，证几何题时，可先确定目标，是证原命题，还是证明它的等效命题？以原命题为目标进行证明叫直接证法，以原命题的等效命题为目标进行证明叫间接证法。直接证法较普遍，这里不再详述，我们着重研究间接证法。

以证明与原命题等效的逆否命题为目标的间接证法叫反证法。如要证明“若有A，则有B”，即“由条件A推出结论B”，可换成证：“若没有B，则没有A”，即“由否定结论B推出否定条件A”。若“否定结论B”只有一种情形，则由这种情形推导出“否定条件A”即可，这种反证法叫归谬法；若“否定结论B”有几种情形，则每种情形都须推导出“否定条件A”，这种反证法叫穷举法。

须要注意的是由“没有B”（否定结论）推出“没有A”（否定条件）的过程，常采用推出：

若 ① “没有B”（否定结论）；

② “有A”（已知条件）；

③ 已知定理

三者同时成立时，则出现矛盾的形式来实现。

例1.7， 若四边形中有一组对边中点的连线等于其他二边的和的一半，则其他二边互相平行。

已知：如图1—2，四边形$ABCD$中，E，F分别为AD，BC的中点，且

$$EF=\frac{1}{2}(AB+CD).$$

求证：$AB /\!/ CD$。

证明：若AB不平行于CD。连BD，取BD的中点G，连EG，FG，则

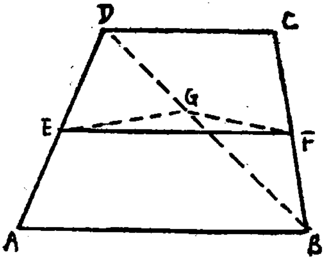


图 1—2

$$EG \underline{\underline{/\!/}} \frac{1}{2}AB, \qquad FG \underline{\underline{/\!/}} \frac{1}{2}CD.$$

故E、F、G三点不在一直线上，

$\therefore$ $EF<EG+FG$，（两点间线段最短），

即 $$EF<\frac{1}{2}(AB+CD).$$

这与已知条件$EF=\frac{1}{2}(AB+CD)$矛盾，

故 $$AB /\!/ CD.$$

注意：①此例否定结论$AB /\!/ CD$只有一种情形，即“AB不平行于CD”。所以，此例的反证法叫归谬法。

② 此例的推证过程是由“没有B”（否定结论）根据已知定理，直接推出“没有A”（否定条件），也可由“没有B”和“有A”推出与已知定理矛盾来证，如：证明过程中，由否定结论推到E、F、G不在一直线上，故构成三角形EFG，

又若 $$EF=\frac{1}{2}(AB+CD),$$

即 $$EF=EG+FG.$$

这与“三角形两边之和大于第三边”的定理矛盾。

$\therefore \quad AB \parallel CD.$

例1.8， 求证：有两条角平分线相等的三角形是等腰三角形。

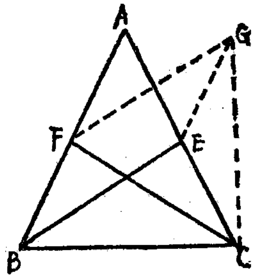


图 1—3

已知：如图1—3，BE，CF 分别为$\triangle ABC$中$\angle B$与$\angle C$的平分线，且$BE=CF$。

求证：$AB=AC$。

证明：若$AB \neq AC$，则$AB>AC$或$AB<AC$。

设 $AB>AC$，则 $\angle ACB>\angle ABC$。

在$\triangle BCE$与$\triangle BCF$中，

$$\because \quad BC\text{公共}，BE=CF，\frac{1}{2}\angle ACB>\frac{1}{2}\angle ABC，$$

$$\therefore \quad BF>CE \qquad ——(A)$$

又作 $\square EBFG$，则$CF=BE=FG$，

$$\therefore \quad \angle FGC=\angle FCG.$$

又 $\angle FCE>\angle FBE=\angle FGE$.

$$\therefore \quad \angle EGC>\angle ECG$$

$$\therefore \quad CE>GE=BF \qquad ——(B)$$

显然(A)，(B)是矛盾的，故$AB>AC$不可能。

同理，$AB<AC$不可能。

故 $AB=AC$.

注意：① 此例中否定结论$AB=AC$有两种情形：$AB>AC$或$AB<AC$，每种情形我们都推到否定结论，已知条件与已知定理同时成立时会出现矛盾，这种反证法叫穷举法，尽管第二种情形同理可证，但在推证过程中是不可缺少的步骤。

② 证明过程中推得(A)与(B)矛盾，也可看成是(A)成立时，$BF>CE$，

即 $$GE>CE$$

与定理“三角形中大角对大边”相矛盾。

以证明与原命题等效的具有明显的“同一性”的逆命题为目标的间接证法叫“同一法”。证明时，可先证明几何命题的题设和结论的“同一性”，再证明它的逆命题成立；也可以先作一个适合结论的图形，然后再证这个图形和已知条件给出的图形是同一个东西。

例1.9，如图1—4。

已知：E为正方形$ABCD$内一点，且$\angle EAB=\angle EBA=15°$，

求证：$\triangle ECD$为正三角形。

〔证法Ⅰ〕∵以AB为底边在正方形内作底角为15°的等腰三角形的顶点是唯一的。又以CD为边在正方形内作正三角形的顶点也是唯一的。∴ 要证的几何命题的题设和结论具有“同一性”。我们再证它的逆命题成立。

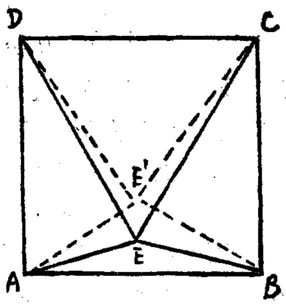


图 1—4

设 $\triangle ECD$为正方形内的正三角形，

则 $\angle CDE=60°$，

∴ $\angle ADE=30°$。

又 $DE=CD=DA$，

$$\therefore\ \angle DAE=\angle DEA=\frac{1}{2}(180°-30°)=75°,$$

∴ $\angle EAB=15°$，

同理，$\angle EBA=15°$。

故原命题的逆命题成立，又因为此命题的题设和结论具有“同一性”。

∴ 原命题成立。

〔证法Ⅱ〕以 CD 为边在正方形内作正三角形 $E'CD$，则

$$\angle CDE'=60^\circ,\quad \therefore\quad \angle ADE'=30^\circ.$$

又
$$DE'=DC=DA,$$

$$\therefore\quad \angle DAE'=\angle DE'A=\frac{1}{2}(180^\circ-30^\circ)=75^\circ.$$

$$\therefore\quad \angle E'AB=15^\circ$$

同理 $\angle E'AB=15^\circ$。

∴ E'是以 AB 边为底，在正方形内作底角为15°的等腰三角形的顶点；又E也是以 AB 边为底，在正方形内作底角为15°的等腰三角形的顶点，这样的顶点是“唯一存在”的。

∴ 点 E'和点 E是同一个点。

故 $\triangle ECD$ 是正三角形。

注意：① 〔证法Ⅰ〕和〔证法Ⅱ〕中，“同一法”的表述形式虽不相同，但实质是一样的，〔证法Ⅰ〕是先证“同一性”，再证逆命题成立；〔证法Ⅱ〕是先证逆命题成立，再证“同一性”。

② 前一表述形式证明的“同一性”，关键在于证明命题的题设和结论论述的对象同具有唯一性；后一表述形式证明“同一性”是证明命题的结论和题设论述的对象是“同一个东西”，在证明过程中还是应用了题设和结论论述的对象同具有“唯一性”的道理。但〔证法Ⅰ〕的“同具有唯一性”反映了“同一法”的实质，而〔证法Ⅱ〕的“是同一个东西”只是“同一性”应用的一种结果，它并不反映“同一法”的实质，请看下例：