经纶学典

总主编◎李朝东

教材解析

JIAOCAIJIEXI

人教A版

高中数学

选修 2–3

中国少年儿童新闻出版总社
中国少年儿童出版社

经纶学典

总主编◎李朝东

教材解析

JIAOCAIJIEXI

本册主编：殷文涛

人教A版

高中数学

选修 2-3

中国少年儿童新闻出版总社
中国少年兒童出版社

图书在版编目(CIP)数据

经纶学典.教材解析.数学.2-3:选修/李朝东主编;殷文涛编写.—北京:中国少年儿童出版社,2007.5

ISBN 978-7-5007-8591-0

Ⅰ.经… Ⅱ.①李…②殷… Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 055728 号

经纶学典·教材解析
数 学 选修2-3
(人教A版)

出版发行:中国少年儿童新闻出版总社
中国少年兒童出版社
出 版 人:李学谦
执行出版人:赵恒峰

总主编:李朝东
封面设计:杭永鸿
责任编辑:赵海力 梁丽贤
责任印务:栾永生
地 址:北京东四十二条21号
邮政编码:100708
电 话:010-62006940
传 真:010-62006941
E-mail:dakaiming@sina.com
印刷:合肥华云印务有限公司
经销:新华书店
开本:880×1230 1/16 印张:82.5 本次印数:10000册
2007年12月第1版 2007年12月安徽第1次印刷
ISBN 978-7-5007-8591-0/G·6378 定价:115.20元(共九册)

前 言

当一道道疑似难题摆在你面前时，是胸有成竹，还是找不着头绪？如果是前者，那恭喜你，你已经跨越了教材与考试之间的差距；如果是后者，那你也别急，《经纶学典·教材解析》在教材与考试间为你搭建一个沟通平台。

不少同学有这样的感觉：教材都熟悉了，课堂上也听懂了，但考试却取不到好成绩。原因在于教材内容与考试要求有差距，课堂教学与选拔性考试有差别。这就需要在教材之上、课堂之外能够得到补充、提升，直至达到高考的选拔要求。本书就是从以下两个方面填补这种差距。

首先是对教材的深度挖掘。教材内容通俗易懂，但里面包含着丰富的信息，我们把教材所包含的信息挖掘出来，并进行系统整理，让知识内涵和外延、知识间的联系充分展现。

第二是对课堂教学的补充和拓展。本书不是对课堂教学的重复，而是在课堂教学基础上，对课堂教学进行补充、提高，挖掘那些学生难以理解、难以掌握的内容，进行归纳和总结，为学生穿起一条规律性的“线”。数学侧重解题方法、解题技巧、解题思路的整理，注重方法的拓展，找出最优的解题方法，对本节内容与其他小专题内容进行归纳总结。这些由于课堂教学时间限制或教师水平发挥的问题，在课堂上并没有全部传授给学生，而这些恰恰就是考试中要考查的，学生拉开差距的所在。

正是本着上述编写理念，本丛书以学生为中心，用最易理解的表现形式呈现学习中难以理解的部分。希望本书为你的成长助力，有更好的想法和意见请登录：www.jing-lun.cn。

编 者

QIANYAN

读者反馈表

尊敬的读者：

您好！感谢您使用《经纶学典·教材解析》！

为了不断提高图书质量，恳请您写下使用本书的体会与感受，我们将真诚地吸纳。在修订时将刊登您的意见，并予以一定的奖励，以表达我们诚挚的谢意。

读者简介	姓　名		性　别		出生年月	
	所在学校		通讯地址			
	联系方式	（H）： 手机：		（O）： E－mail：		
本书情况		学科		版本		年级

您对本书栏目的评价：	您对本书体例形式的评价：	您的购买行为：
1. 教材梳理： 全面□　一般□　不全面□ 2. 教材拓展： 难□　合理□　易□ 3. 典型题解： 全面□　不全面□ 4. 针对性练习： 难□　合理□　易□ 5. 拓展阅读： 需要□　不需要□ 6. 五年高考回放： 需要□　不需要□	1. 栏目设置： 过多□　适中□　过　少□ 2. 题空： 过大□　正好□　过　小□ 3. 版式： 美观□　一般□　不美观□ 4. 封面： 美观□　一般□　不美观□	1. 您购买本书的途径： 广　告□　教师推荐□ 家长购买□　学校统一购买□ 自己购买□　同学推荐□ 2. 您购买本书的主要原因（可多选）： 广告宣传□　包装形式□ 内　容□　图书价格□ 封面设计□　书　名□

您对本书的其他意见：

欢迎登录：www. jing-lun. cn

通信地址：南京红狐教育传播研究所（南京市租用16－02#信箱）　　邮编：210016

目录

MULU

第一章　计数原理

1.1　分类加法计数原理与分步乘法计数原理　1

1.2　排列与组合　9

1.2.1　排列　9

1.2.2　组合　16

1.3　二项式定理　26

本章总结　35

第二章　随机变量及其分布

2.1　离散型随机变量及其分布列　39

2.2　二项分布及其应用　46

2.3　离散型随机变量的均值与方差　60

2.4　正态分布　72

本章总结　79

第三章　统计案例

3.1　回归分析的基本思想及其初步应用　85

3.2　独立性检验的基本思想及其初步应用　97

本章总结　105

第一章 计数原理

1.1 分类加法计数原理与分步乘法计数原理

A 教材梳理

知识点一 分类加法计数原理

完成一件事有两类不同方案，在第1类方案中有 m 种不同的方法，在第2类方案中有 n 种不同的方法. 那么完成这件事共有 $N=m+n$ 种不同的方法.

注意：(1)分类加法原理的使用关键是分类，分类必须明确标准，要求每一种方法必须属于某一类办法，不同类的任意两种方法是不同的方法，这是分类问题中所要求的"不重复""不遗漏".

(2)完成一件事的 n 类办法是相互独立的. 从集合角度看，完成一件事分 A、B 两类办法，则 $A\cap B=\varnothing$，$A\cup B=I$(I 表示全集).

(3)明确题目中所指完成一件事是指什么事，完成这件事可以有哪些办法，怎样才算是完成这件事.

知识点二 分步乘法计数原理

完成一件事需要两个步骤，做第1步有 m 种不同的方法，做第2步有 n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N=m\times n$ 种不同的方法.

注意：(1)明确题目中所指的"完成一件事"是什么事，单独用题中所给的某种方法是不是能完成这件事，是不是需要经过几个步骤才能完成这件事.

(2)完成这件事需要分成若干个步骤，只有每个步骤都完成了，才算完成这件事，缺少哪一个步骤，这件事都不可能完成.

(3)根据题意正确分步，要求各步之间必须连续，只有按照这几步逐步去做，才能完成这件事，各步之间不能重复也不能遗漏.

知识点三 关于两个原理的理解与应用

1. 分类加法计数原理：该原理是对涉及完成某一件事的不同方法种数的计数方法. 每一类中每一种方法都可以完成这件事；每一类的各种方法是相互独立的.

2. 分步乘法计数原理：该原理是对涉及完成某一件事的各个步骤不同种方法的计数方法. 完成一件事有 n 个步骤，各个步骤互相依存，一个步骤的任何一种方法都不能独立完成这件事，完成这件事的每一种方法都应视为有 n 个步骤.

B 教材拓展

拓展点一 分类加法计数原理与分步乘法计数原理的选用

两个原理的区别在于一个与分类有关，一个与分步有关. 如果完成一件事，有几类方案，这几类方案彼此之间是相互独立的，无论哪类方案的哪种方法都能单独完成这件事，求完成这件事的方法种数，就用分类加法计数原理. 如果要完成一件事需要分几个步骤，缺一不可，即需要依次完成所有的步骤，才能完成这件事，而完成每一个步骤各有若干个不同的方法，求完成这件事的方法种数，就用分步乘法计数原理.

拓展点二 解决基本计数原理问题所用的思想方法及技巧

1. 建模法：建立数学模型，将排列组合问题转化为数学问题，是计数方法中的基本方法(这在下节将重点学习).

2. 枚举法：利用枚举法(如树状图)可以把问题分析的更直观、清楚，便于发现规律，从而形成恰当的分类或分步的设计思想.

总之，对于一些较复杂的既要用分类加法计数原理又要用分步乘法计数原理的问题，恰当地画出表格，合理建模或用树状图枚举全部结果是解决问题的基本思想方法.

拓展点三　两个原理的综合运用

1. 认真审题，弄清题目要做什么事情，怎样才能完成这件事情，完成这件事情有哪些办法.

2. 明确完成这件事情是分成几类办法，还是分成几个步骤，还是既要分类又要分步，并且要明确分类或分步的标准是什么.

3. 对于较复杂的问题，按照完成这件事所必须的步骤，该分类就分类，该分步就分步，或者是先分类，或者是先分步，也可能是分类与分步交叉进行. 总之，目标应该明确，就是如何完成这件事，只要是完成这件事所必须的，就要逐步去完成.

4. 两个原理的应用锻炼了我们研究复杂问题的能力，尤其是分类计数原理，实质上就是分类讨论的数学思想，这对于今后的学习有很大帮助.

C 典型题解

▶问题一　分类加法计数原理

例题 1　高三(1)班有学生 50 人，男生 30 人，女生 20 人；高三(2)班有学生 60 人，男生 30 人，女生 30 人；高三(3)班有学生 55 人，男生 35 人，女生 20 人.

(1)从高三(1)班或(2)班或(3)班中选一名学生担任校学生会主席，有多少种不同的选法？

(2)从高三(1)班、(2)班男生中或从高三(3)班女生中选一名学生担任校学生会体育部部长，有多少种不同的选法？

[解析]　使用分类加法计数原理. (1)中，把三个班的学生人数加起来即为所求. (2)中，(1)、(2)班男生与(3)班女生人数相加即为所求.

[答案]　解:(1)分三类:

①学生会主席产生在高三(1)班，有 50 种不同的方法；

②学生会主席产生在高三(2)班，有 60 种不同的方法；

③学生会主席产生在高三(3)班，有 55 种不同的方法.

由分类加法计数原理得 $50+60+55=165$(种)，

即所求选法有 165 种.

(2)类似(1)得 $30+30+20=80$(种)，

即所求选法有 80 种.

[点评]　使用分类加法计数原理解题时，要根据问题的特点确定一个分类的标准.

例题 2　书架的上层放有 10 本不同的历史书，中层放有 8 本不同的文艺书，下层放有 6 本不同的外文书，某人从中任取一本书，有多少种不同的取法？

[解析]　本题要完成的事是“取一本书”，从上层取 1 本历史书或从中层取 1 本文艺书或从下层取 1 本外文书都可以完成这件事，所以这些方法都可以独立完成这件事，因此选用分类加法计数原理.

[答案]　解:要完成“取一本书”这件事，可以有三类办法:

第一类办法:从上层 10 本不同的历史书中任取 1 本，有 10 种不同的取法；

第二类办法:从中层 8 本不同的文艺书中任取 1 本，有 8 种不同的取法；

第三类办法:从下层 6 本不同的外文书中任取 1 本，有 6 种不同的取法.

根据分类加法计数原理，从书架上任取 1 本书的不同取法共有 $10+8+6=24$(种).

[点评]　根据题目特点正确选用两个计数原理，是解决排列组合问题的关键，本题考查分类加法计数原理，而应用分类加法计数原理解题的关键是确定分类的标准.

例题 3　在所有的两位数中，个位数字大于十位数字的两位数共有多少个？

[解析]　该问题与计数有关，因而考虑选用两个基本原理计算. 完成的一件事是组成两位数，当两位数的十位、个位确定后，这个两位数也就确定了，因而可考虑以安排十位上的数字情况进行分类，对于每一个十位上的数字，满足条件的个位上的数字的个数就是完成一件事的一类办法中的不同方法数.

[答案]　解:根据题意，将十位上的数字分别是 1,2,3,4,5,6,7,8 的情况分成 8 类. 在每一类中满足题目条件的两位数分别是 8 个，7 个，6 个，5 个，4 个，3 个，2 个，1 个.

由分类加法计数原理知，符合题意的两位数的个数共有 $8+7+6+5+4+3+2+1=36$(个).

答:共有 36 个.

[点评]　解决具体问题时，如何分类或分步，开始学习时可能会遇到一点困难，因此要在不断的学习中注意积累经验，掌握思维方法，逐步就会做到恰当分类、合理分步.

请思考:你能换一种分类方法给出另外的解法吗？

▶问题二　分步乘法计数原理

例题 4　一个口袋里有 5 封信，另一个口袋里有 4 封信，各封信内容均不相同.

(1) 从两个口袋里各取 1 封信，有多少种不同的取法?

(2) 把这两个口袋里的 9 封信，分别投入 4 个邮筒，有多少种不同的投法?

[解析]　(1) 各取 1 封信，不论从哪个口袋里取，都不能算完成了这件事，因此应分两个步骤完成，共有 $5\times4=20$(种).

(2) 把信投入邮筒，是将 9 封信分别投入，投一封信，就是一步，共有 4^9 种.

[答案]　解:(1) 各取一封信，不论从哪个口袋里取，都不能算完成了这件事，因此应分两个步骤完成，由分步乘法计数原理，共有 $5\times4=20$(种).

(2) 若以每封信投入邮筒的可能性考虑，第一封信投入邮筒有 4 种可能，第二封信仍有 4 种可能……第九封信还有 4 种可能. 所以共有 4^9 种不同的放法.

[点评]　使用分步乘法计数原理做题时，必须是各步骤全部完成，事情才能完成，切忌缺少步骤.

例题 5　用数字 0,1,2,3,4,5 可以组成多少个不同的四位数?

[解析]　要组成一个四位数，就要依次确定四个数位上的数字，只要确定了这四个数字，就完成了组成四位数这件事，因此选用分步乘法计数原理.

[答案]　解：可分四个步骤完成:

第一步，确定千位上的数字，从 1,2,3,4,5 中任取一个数字，有 5 种不同的取法;

第二步，确定百位上的数字，从 0,1,2,3,4,5 中任取一个数字，有 6 种不同的取法;

第三步：确定十位上的数字，从 0,1,2,3,4,5 中任取一个数字，有 6 种不同的取法;

第四步：确定个位上的数字，从 0,1,2,3,4,5 中任取一个数字，有 6 种不同的取法.

根据分步乘法计数原理，组成的四位数共有

$5\times6\times6\times6=1\,080$(个).

[点评]　本题主要考查分步乘法计数原理，注意“0”这一特殊元素和千位这一特殊位置.

例题 6　若某人由广州到北京出差，但途中必须到武汉办一件事，而由广州到武汉的理想路线共有 12 条(包括坐汽车、火车、飞机，以及不同的路线)，由武汉到北京共有 18 条理想路线，则此人由广州到北京共有多少条不同的理想路线?

[解析]　由于本题中要完成的一件事是“从广州到北京”，而途中又必须经过武汉，因此完成这件事必须分两个步骤来完成，即第一步由广州到达武汉，第二步由武汉到达北京.

[答案]　解：完成这件事，分作两步:

第一步，从广州到武汉，有 12 种走法;

第二步，由武汉到北京，有 18 种走法. 由分步乘法计数原理可知，此人由广州到北京共有 $12\times18=216$ 条不同的理想路线.

[点评]　分步就是做完每个步骤中的某种方法，并不能完成整个事件，而只有当它依次完成所有步骤时，才能完成整个事件. 有时具体问题就明确地告诉了我们完成这个事件的步骤，如本题，解答这类问题时，要认真审题，透彻理解题意.

例题 7　书架的第一层放有 6 本不同的数学书，第二层放有 6 本不同的语文书，第三层放有 5 本不同的英语书.

(1) 从这些书中任取一本数学、一本语文、一本英语共三本书的不同取法有多少种?

(2) 从这些书中任取三本，并且在书架上按次序排好，有多少种不同的排法?

[答案]　解:(1) 完成这个工作可分三个步骤:

第一步，从 6 本不同的数学书中，任取一本，有 6 种取法;

第二步，从 6 本不同的语文书中，任取一本，有 6 种取法;

第三步，从 5 本不同的英语书中，任取一本，有 5 种取法. 根据分步乘法计数原理，共有 $6\times6\times5=180$(种)不同取法.

(2) 本题实际上是从 17 本书中任取 3 本放在三个不同位置.

完成这个工作分三个步骤:

第一步，从 17 本书中任取 1 本放在第一个位置上，共有 17 种不同的方法;

第二步，从 16 本书中任取 1 本放在第二个位置上，共有 16 种不同的方法;

第三步，从 15 本书中任取 1 本放在第三个位置上，共有 15 种不同的方法.

根据分步乘法计数原理，共有 $17\times16\times15=4\,080$(种)不同的排法.

[点评]　本题是根据分步乘法计数原理解题，使用这个原理

的关键是：依据题意把完成一件事恰当地分成若干个步骤.

▶问题三 两个基本计数原理的综合应用

例题 8 在直角坐标系 xOy 平面上，平行直线 $x=n(n=0,1,2,\cdots,5)$ 与平行直线 $y=n(n=0,1,2,\cdots,5)$ 组成的图形中，矩形共有 ( )

A. 25 个　　B. 36 个

C. 100 个　　D. 225 个

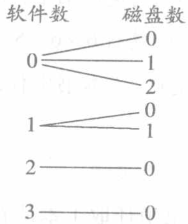
[解析] 本题考查两个计数原理，若利用分类加法计数原理，要找准分类标准，即以所构成矩形中所含"小正方形"的个数进行分类. 若用分步乘法计数原理，则从与 x 轴平行的直线中任取 2 条，再从与 y 轴平行的直线中任取 2 条即可构成矩形，分两步.

[答案] D

[点评] 本题主要考查两个原理的综合应用，使用分类加法计数原理，首先要根据问题特征确定分类标准，各类方法不重不漏，相互独立. 同样，使用分步乘法计数原理也要根据问题的特征，合理确定分步的标准，各步之间是连续的，各步骤完成，事情也就完成了.

例题 9 某电脑用户计划用不超过 500 元的资金购买单价分别为 60 元、70 元的单片软件和盒装磁盘，根据需要，软件至少买 3 片，磁盘至少买 2 盘，则不同的选购方式有几种.

[解析] 本题是一道理财问题，其实质是 180 元钱如何用，用树状图可解，可能的选购方式如下：



[答案] 解：由题意知，除去购买 3 片软件，2 盒磁盘，剩余的钱数为 $500-3\times60-2\times70=180$(元).

设用剩余的 180 元选购单片软件 x 片，盒装磁盘 y 盒，则 $60x+70y\leqslant180(x,y\in\mathbf{N})$.

当 $x=0$ 时，$y=0,1,2$；

当 $x=1$ 时，$y=0,1$；

当 $x=2$ 时，$y=0$；

当 $x=3$ 时，$y=0$.

∴ 不等式共有 7 个解.

∴ 选购方式有 7 种.

[点评] 本题采用树状图将所有答案一一列出，既清楚又直观.

例题 10 已知集合 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，集合 $B=\{b_1,b_2\}$，其中 $a_i,b_j(i=1,2,3,4;j=1,2)$ 均为实数.

(1)从集合 A 到集合 B 能构成多少个不同的映射？

(2)能构成多少个以集合 A 为定义域，以集合 B 为值域的不同函数？

[解析] 由映射的定义可知：集合 B 中的每一个元素在集合 A 中均要有原象，因此只要从问题(1)的映射数中减去 A 中四个元素均对应 B 中一个元素的情况种数即可得到(2)的解.

[答案] 解：(1)因为集合 A 中的每个元素 $a_i(i=1,2,3,4)$ 与集合 B 中元素的对应方法都有 2 种，由分步计数原理，构成 $A\to B$ 的映射有 $2\times2\times2\times2=2^4=16$(个).

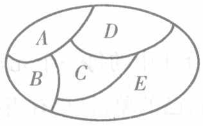
(2)在(1)的映射中，a_1、a_2、a_3、a_4 均对应同一元素 b_1 或 b_2 的情形构不成以集合 A 为定义域，以集合 B 为值域的函数，这样的映射有 2 个. 所以，构成以集合 A 为定义域，以集合 B 为值域的函数有 $16-2=14$(个).

[点评] 正确理解"映射"与"函数"的概念是解决本题的关键. 由此可见，解决两个计数原理的实际应用问题的关键在于：一方面，要准确把握两个原理，并能灵活地运用它解决问题；另一方面，要熟练掌握前面我们所学习的知识，因为两个原理的应用题综合性强，它涉及到中学数学的方方面面的知识.

"去杂法"是解决本章有关问题的基本方法之一. 所谓"去杂法"就是从方法总数中减去不符合条件的方法数.

例题 11 将红、黄、绿、黑四种不同的颜色涂入图中的五个区域内，要求相邻的两个区域的颜色都不相同，则有多少种不同的涂色方法？

[解析] 给区域标上记号 A、B、C、D、E(如图)，则 A 区域有 4 种不同的涂色方法，B 区域有 3 种，C 区域有 2 种，D 区域有 2 种，但 E 区域的涂色依赖于 B 与 D 涂色的颜色，如果 B 与 D 颜色相同有 2 种，如果不相同，则只有 1 种. 因此应先分类后分步.



[答案] 解：当 B 与 D 同色时，有 $4\times3\times2\times1\times2=48$(种).

当 B 与 D 不同色时，有 $4\times3\times2\times1\times1=24$(种).

故共有 $48+24=72$(种)不同的涂色方法.

[点评] (1)像这类给区域涂色的问题，我们应该给区域依次标上相应的序号，以便分析问题. 在给各区域涂色时，要注意不同的涂色顺序，其解题就有繁简之分. 如本题若按 A、B、E、D、C 顺序涂色时，在最后给区域 C 涂色时，就应考虑 A 与 E 是否同色、B 与 D 是否同色这两种情况. 因此在分析解决这类问题时，应按不同的涂色顺序多尝试，看哪一种最简单.

(2)本题易错的是未考虑 B 与 D 是否同色.

D 针对性练习

1. 已知集合 $A=\{a,b,c,d\}$，$B=\{x,y,z\}$，则从集合 A 到集合 B 的映射个数最多有 ( )

A. 4×4 个　B. 4×3 个

C. 3^4 个　D. 4^3 个

2. 从 6 名志愿者中选 4 人分别从事翻译、导游、导购、保洁四项不同的工作，若其中甲、乙两名志愿者不能从事翻译工作，则选派方案共有 ( )

A. 280 种　B. 240 种

C. 180 种　D. 96 种

3. 已知函数 $y=ax^2+bx+c$，其中 $a,b,c\in\{0,1,2,3,4\}$，则不同的二次函数的个数有 ( )

A. 125 个　B. 15 个

C. 100 个　D. 10 个

4. 把 10 个水果分成 3 份，要求每份至少一个，至多 5 个，则不同的分法种数共有 ( )

A. 5 种　B. 6 种

C. 4 种　D. 3 种

5. 已知 $x\in\{2,3,7\}$，$y\in\{-31,-24,4\}$，则 $x\cdot y$ 可表示不同的值的个数是 ( )

A. $1+1=2$　B. $1+1+1=3$

C. $2\times3=6$　D. $3\times3=9$

6. 电子计算机的输入纸带每排有 8 个穿孔位置，每个穿孔位置可穿孔或不穿孔，则每排最多产生________种不同的信息.

7. 同室四人各写一张贺卡，先集中起来，然后每人从中拿一张别人送出的贺卡，则四张贺卡的不同的分配方式有________.

8. 已知 $a\in\{3,4,5\}$，$b\in\{1,2,7,8\}$，$r\in\{8,9\}$，则方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=r$ 可表示________个不同的圆.

9. 多项式 $(a_1+a_2)(b_1+b_2+b_3)-(a_3+a_4)(b_4+b_5)$ 展开后共有________项.

10. 有三个口袋装有小球，一个装有 5 个白色小球，一个装有 6 个黑色小球，一个装有 7 个红色小球. 若每次从中取 2 个不同颜色的小球，共有多少种不同的取法？

11. 某外语组有 9 人，每人至少会英语和日语中的一门，其中 7 人会英语，3 人会日语. 从中选出会英语和会日语的各 1 人，有多少种不同的选法？

12. 1 800 有几个正约数？其中奇约数有几个？

13. 将一个四棱锥的每个顶点染上一种颜色，使同一条棱的两端点异色，如果只有 5 种颜色可供使用，那么不同的染色方法是多少种？

［参考答案］

1. C　解析：由于集合 A 中的每一个元素都能在集合 B 中找到一个元素作为自己的象，且只有当集合 A 中的每一个元素都在集合 B 中找到自己的象后，才能建立起从 A 到 B 的映射，因此，从 A 到 B 的映射最多有 $3\times3\times3\times3=3^4$（个），故选 C.

2. B　解析：由于甲、乙不能从事翻译工作，因此翻译工作从余下的 4 名志愿者中选 1 人，有 4 种选法. 后面三项工作的选法有 $5\times4\times3$ 种，因此共有 $4\times5\times4\times3=240$（种），故选 B.

3. C　解析：若 $y=ax^2+bx+c$ 为二次函数，则 $a\neq0$，要完成该事件，分三步：a 有 4 种选法，b、c 分别有 5 种选法. 由分步乘法计数原理知，共有 $4\times5\times5=100$（个）.

4. C　解析：由于分成 3 份，每份至少 1 个，至多 5 个，故
有一份 1 个苹果，则其余两份只能是一份 5 个，一份 4 个；
有一份 2 个苹果，则其余两份可能一份 5 个，一份 3 个，或两份都是 4 个；
有一份 3 个苹果，则其余两份只能是一份 4 个，一份 3 个.
∴ 共有 $1+2+1=4$（种）.

5. D

6. 256　解析：8 个位置上的每个位置穿孔或不穿孔都可确定一个信息，故应分步完成确定一个信息，由分步乘法计数原理得 $2^8=256$（种）.

7. 9 种　解析：A 先拿，可从 b、c、d 中拿一张，有 3 种拿法. 若拿走 b，则 B 从剩下的 3 张贺卡中任选一张，也有 3 种拿法，剩下的两人都只有 1 种拿法，由分步乘法计数原理知，共有 $3\times3\times1\times1=9$（种）.

8. 24

9. 10

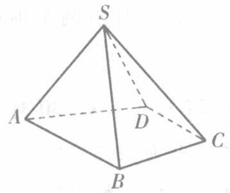
10. 解：取法可分为三类：
一类是取白球、黑球，有 $5\times6=30$（种）取法；
一类是取白球、红球，有 $5\times7=35$（种）取法；
一类是取黑球、红球，有 $6\times7=42$（种）取法.
∴ 共有取法 $30+35+42=107$（种）.

11. 解：“完成一件事”指“从 9 人中选出会英语与日语的各 1 人”. 既会英语又会日语的共有 $7+3-9=1$（人），仅会英语的有 6 人，仅会日语的有 2 人. 先分类后分步，先从仅会英语与仅会日语的人中各选 1 人，有 $6\times2=12$（种）选

法；从仅会英语与英日语都会的人中各选1人，有$6\times1=6$(种)选法；从仅会日语与英日语都会的人中各选1人，有$2\times1=2$(种)选法. 根据分类加法计数原理，共有$6\times2+6\times1+2\times1=20$(种)不同的选法.

12. 解：1 800分解成质数积的形式为$1\ 800=2^3\times3^2\times5^2$，它的正约数形如$2^m\cdot3^n\cdot5^p$，其中$m\in\{0,1,2,3\}$，$n\in\{0,1,2\}$，$p\in\{0,1,2\}$，即$m,n,p$的不同取法依次有4、3、3种，故1 800的正约数有$4\times3\times3=36$(个). 奇约数形如$3^n\cdot5^p$，n,p的不同取法各有3种，故其中奇约数有$3\times3=9$(个).

13. 解：如图所示，设五种颜色分别为1,2,3,4,5. 由题意知四棱锥$S-ABCD$的顶点S、A、B所染色互不相同，它们共有$5\times4\times3=60$(种)染色方法. 当S、A、B已染色时，不妨设其颜色分别为1,2,3，则C可染颜色2,4,5，若C染颜色2，则D可染颜色3,4,5中任一种，有3种染法；若C染颜色4，则D可染颜色3或5，有2种染法；若C染颜色5，则D可染颜色3或4，也有2种染法. 可见，当S、A、B已染好时，C与D还有7种染法. 从而，染色方法总数为$60\times7=420$(种).



E 课后答案点拨

[练习(第6页)]

1. (1)9种　点拨：要完成的“一件事情”是“选出1人完成工作”，选法种数是$5+4=9$(种)；
   (2)6　点拨：要完成的“一件事情”是“从A村经B村到C村去”，不同路线有$3\times2=6$(条).
2. (1)要完成的“一件事情”是“选出1人参加活动”，不同的选法有$3+5+4=12$(种)；
   (2)要完成的“一件事情”是“从3个年级的学生中各选1人参加活动”，不同选法种数有$3\times5\times4=60$(种).
3. 因为要确定的是这名同学的专业选择，并不要考虑学校的差异，所以应当是$6+4-1=9$(种)可能的专业选择.

[练习(第10页)]

1. 要完成的“一件事情”是“得到展开式的项数”. 由于每一项都是$a_ib_jc_k$的形式，所以可以分三步完成：第一步，取a_i，有3种方法；第二步，取b_j，也有3种方法；第三步，取c_k，有5种方法，根据分步乘法计数原理，展开式共有$3\times3\times5=45$(项).
2. 要完成的“一件事情”是“确定一个电话号码的后四位”. 分四步完成，每一步都是从0~9这10个数字中取一个，共有$10\times10\times10\times10=10\ 000$(个).
3. 要完成的“一件事情”是“从5名同学中选出正、副组长各1名”，分两步完成：第一步，选正组长，有5种方法；第二步，选副组长，有4种方法. 共有选法$5\times4=20$(种).
4. 要完成的“一件事情”是“从6个门中的一个进入并从另一个门出去”. 分两步完成：先从6个门中选一个进入，再从其余5个门中选一个出去，共有进出方法$6\times5=30$(种).

[习题1.1(第12页)]

A组

1. “一件事情”是“买一台某型号的电视机”选法种数是$4+7=11$(种).
2. “一件事情”是“从甲地经乙地或经丙地到丁地去”，所以“先分类，后分步”，不同的路线共有$2\times3+4\times2=14$(条).
3. 对于第一问，“一件事情”是“构成一个分数”. 由于1,5,9,13是奇数，4,8,12,16是偶数，所以以1,5,9,13中任意一个为分子，都可以与4,8,12,16中的任意一个构成分数，因此可以分两步来构成分数：第一步，选分子，有4种选法；第二步，选分母，也有4种选法，共有不同的分数$4\times4=16$(个).
   对于第二问，“一件事情”是“构成一个真分数”. 分四类：分子为1时，分母可以从4,8,12,16中任选一个，有4个；分子为5时，分母从8,12,16中选一个，有3个；分子为9时，分母从12,16中选一个，有2个；分子为13时，分母只能选16，有1个，所以共有真分数$4+3+2+1=10$(个).
4. “一件事情”是“接通线路”，根据电路的有关知识，容易得到不同的接通线路有$3+1+2\times2=8$(条).
5. (1)“一件事情”是“用坐标确定一个点”. 由于横、纵坐标可以相同，因此可以分两步完成：第一步，从A中选横坐标，有6个选择；第二步从A中选纵坐标，也有6个选择，所以共有坐标$6\times6=36$(个).
   (2)“一件事情”是“确定一条直线的方程”. 由于斜率不同截距不同、斜率不同截距相同、斜率相同截距不同的直

线都是互不相同的,因此可分两步完成:第一步,取斜率,有4种取法;第二步,取截距,有4种取法,所以共有直线$4\times4=16$(条).

B组

1. “一件事情”是“组成一个四位数字号码”.由于数字可以重复,最后一个只能在$0\sim5$这六个数字中拨,所以有号码$10\times10\times10\times6=6\,000$(个).

2. (1)“一件事情”是“4名学生分别参加3个运动队中的一个,每人限报一个,可以报同一个运动队”.应该是人选运动队,所以不同报法种数是3^4.

(2)“一件事情”是“3个班分别从5个风景点中选择一处游览”,应该是人选风景点,故不同的选法种数是5^3.

F 拓展阅读

电话号码从7位升为8位可增加多少用户

现在,我国许多大城市的电话号码都相继升到了八位,如北京、上海等.那么你知道电话号码从七位升为八位后,可以增加多少用户吗?

电话号码是从$0\sim9$这十个数字中选出来组成的,一般首位不能为0,所以当用七位数构成电话号码时,首位可以是从$1\sim9$中任选一个数,所以有9种不同的选法.从第二位开始,可以从$0\sim9$这十个数字中任选,而且允许与其他位数的数字重复,所以后六位每位数字的选法都是10种.这样可能组成的电话号码就有9×10^6个.应用同样的方法,可知道用八位数构成的电话号码有9×10^7个.

上面两者之差为$9\times10^7-9\times10^6=8.1\times10^7$.

这就是说,将电话号码升为八位后,最多可增加8 100万个用户.

当然,实际情况并非如此,因为有些特殊数字开头的电话号码必须保留作为特殊用途,例如以1开头的电话,常用作与老百姓生活密切相关的特殊电话,如110、114、119、120等.随着电话号码的升位,这些电话号码占有的号码资源也要扩大.例如,在七位号码制时,以110开头的10 000个号码由于110的特殊用途而不能使用,以119开头的10 000个号码由于同样的理由也不能使用.这样,在升位后,实际可增加的用户数不到8 100万.

G 五年高考回放

1 (2007·广东)如图是某汽车维修公司的维修点环形分布图.公司在年初分配给A、B、C、D四个维修点某种配件各50件.在使用前发现需将A、B、C、D四个维修点的这批配件分别调整为40、45、54、61件.但调整只能在相邻维修点之间进行.那么要完成上述调整,最少的调动件次(n件配件从一个维修点调整到相邻维修点的调动件次为n)为 ( )

A. 18 B. 17 C. 16 D. 15

[解析] 使调动件次最少的调动方案是从A调10件到D,从B调5件到C,从C调1件到D,调动件次共为$10+1+5=16$.

[答案] C

2 (2005·全国)过三棱柱任意两个顶点的直线共15条,其中异面直线有 ( )

A. 18对 B. 24对 C. 30对 D. 36对

[解析] 本题主要考查异面直线的定义和分类与整合思想.对各种情况的异面直线进行分类讨论:

①侧棱的条数为3条,且和每条侧棱异面的直线条数为4条;

②侧面对角线的条数为6条,且和每一条侧面对角线异面的直线条数为5条;

③底面和顶面的边的条数为6条,且和每一条边异面的直线的条数为5条.

又由于直线异面是相互的.故异面直线共有

$\frac{1}{2}\times(3\times4+6\times5+6\times5)=36$(对).

[答案] D

3 (2005·天津)从集合$\{1,2,3,\cdots,11\}$中任选两个元素作为椭圆方程$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$中的$m$和$n$,则能组成落在矩形区域$B=\{(x,y)\mid |x|<11且|y|<9\}$内的椭圆个数为 ( )

A. 43 个　B. 72 个　C. 86 个　D. 90 个

[解析] 由题意知,

当 $m=1$ 时,n 可等于 $2,3,\cdots,8$,共对应 7 个不同的椭圆;

当 $m=2$ 时,n 可等于 $1,3,\cdots,8$,共对应 7 个不同的椭圆.

同理可得:当 $m=3,4,5,6,7,8$ 时,各分别对应 7 个不同的椭圆.

当 $m=9$ 时,n 可等于 $1,2,\cdots,8$,共对应 8 个不同的椭圆.

当 $m=10$ 时,对应 8 个不同的椭圆.

综上所述,对应椭圆的个数共有 $7\times8+8\times2=72$(个).

[答案] B

4 (2005·全国)在由 0,1,2,3,4,5 所组成的没有重复数字的四位数中,不能被 5 整除的数共有________个.

[解析] 由数字 0,1,2,3,4,5 组成没有重复数字的四位数共有 $5\times5\times4\times3=300$(个),其中能被 5 整除的共分两类:末位为 5,有 $4\times4\times3=48$(个);末位为 0,有 $5\times4\times3=60$(个).故有 $300-48-60=192$(个).

[答案] 192

5 (2006·全国)设集合 $I=\{1,2,3,4,5\}$,选择 I 的两个非空子集 A 和 B,要使 B 中最小的数大于 A 中最大的数,则不同的选择方法共有　(　)

A. 50 种　B. 49 种　C. 48 种　D. 47 种

[解析] 当 $A=\{1\}$ 时,B 为 $\{2,3,4,5\}$ 的非空子集即可,有 15 个. 当 A 中最大数为 2(有 2 个)时,则 B 有 7 个. 当 A 中最大数为 3(有 4 个)时,则 B 有 3 个. 当 A 中最大数为 4(有 8 个)时,$B=\{5\}$,故共有 $15+2\times7+4\times3+8=49$(种)不同的选择方法. 故选 B.

[答案] B

6 (2006·上海)如果一条直线与一个平面垂直,那么,称此直线与平面构成一个"正交线面对". 在一个正方体中,由两个顶点确定的直线与含有四个顶点的平面构成的"正交线面对"的个数是________.

[解析] 若"正交线面对"中的平面为正方体的某一面,则过其四个顶点的垂线(必过正方体的另一个顶点)与该面是"正交线面对",而这样的"正交线面对"有 $6\times4=24$(个). 若"正交线面对"中的平面为正方体的某一对角面,则过正方体必有两条面对角线与该平面垂直,因而这样的"正交线面对"有 $6\times2=12$(个).

因而共有 $24+12=36$(个). 故填 36.

[答案] 36

1.2 排列与组合

1.2.1 排　　列

A 教材梳理

知识点一　排列

一般地,从 n 个不同元素中任取 $m(m\leqslant n)$ 个元素,按照一定的顺序排成一列,叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列.

注意:(1)排列的定义包括两个基本内容:一是"取出元素",二是"按照一定顺序"排列.

(2)定义中"一定顺序"就是说与位置有关,在实际问题中,要由具体问题的性质和条件决定,这一点是与后面学习的组合的根本区别.

知识点二　排列数

从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素的所有不同排列的个数,叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数,用符号 A_n^m 表示. 排列数公式可以写成

$A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$.

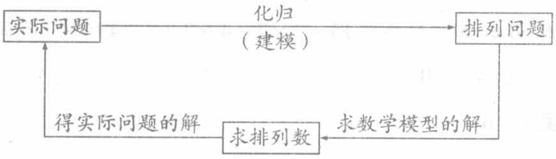
我们把正整数由 1 到 n 的连乘积,叫做 n 的阶乘,用 $n!$ 表示,规定 $0!=1$,排列数公式还可以写成

$A_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$.

当 $n=m$ 时，n 个不同元素全部取出的一个排列，叫做 n 个不同元素的一个全排列，全排列数公式可写成 $A_n^n=n!$.

知识点三　排列的应用

解排列应用题的基本思想：



解简单的排列应用题首先必须认真分析理解题意，看能否把问题归结为排列问题，即是否有顺序. 如果是的话，再进一步分析，这里 n 个不同的元素指的是什么，以及从 n 个不同的元素中任取 m 个元素的每一种排列对应的是什么事情，然后才能运用排列数公式求解.

B 教材拓展

拓展点一　排列数公式的应用

1. 排列数的第一个公式 $A_n^m=n(n-1)\cdots(n-m+1)$ 适用于具体计算以及解当 m 较小时含排列数的方程和不等式. 在运用该公式时要注意它的特点，其特点是：第一个因数是 n，最后一个因数是 $n-m+1$，共 m 个连续自然数的连乘积.

2. 排列数的第二个公式 $A_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$，适用于与排列数有关的证明、解方程、解不等式等，在具体运用时，则应注意先提取公因式，再计算，同时还要注意隐含条件"$m\leqslant n$，$m\in\mathbf{N}^*$，$n\in\mathbf{N}^*$"的运用.

拓展点二　有限制条件的排列应用题

1. 注意排列的有序性.

2. 对受限制条件的位置与元素首先排列，并适当选用直接法或间接法.

3. 从位置出发的"填空法"和不相邻问题的"插空法"是解答排列应用题中常用的有效方法. 某些元素的相邻问题，常用"捆绑法"，先看成一个元素.

4. 要注意通过排列应用题，深化对分类加法计数原理和分步乘法计数原理的理解，培养"全局分类"和"局部分步"意识.

拓展点三　某些元素顺序确定的排列问题

在有些排列问题中，某些元素的前后顺序是固定的（但不一定相邻）. 解决这类某些元素顺序确定的问题的基本方法有两种：一是整体法，即若有 $m+n$ 个元素排成一列，其中有 m 个元素之间的顺序固定不变，将这 $m+n$ 个元素任意排成一列，共有 A_{m+n}^{m+n} 种不同的排法，然后任取一个排列，固定其他的 n 个元素的位置不动，把这 m 个元素交换顺序，共有 A_m^m 种排法，其中只有一个排列是我们需要的，因而共有 $\dfrac{A_{m+n}^{m+n}}{A_m^m}$ 种不同的排法. 二是插空法，即逐步插空法.

C 典型题解

▶问题一　计算类问题

例题 1　解方程：$A_{2x+1}^4=140A_x^3$.

［解析］　利用排列数公式展开即得到关于 x 的方程，但由于 x 存在于排列数中，故应考虑排列数对 x 的制约，避免出现增根.

［答案］　解：根据题意，原方程等价于

$$\begin{cases}2x+1\geqslant 4,\\ x\geqslant 3,\\ x\in\mathbf{N}^*,\\ (2x+1)\cdot 2x\cdot(2x-1)(2x-2)=140x(x-1)(x-2).\end{cases}$$

即 $$\begin{cases}x\geqslant 3,\\ x\in\mathbf{N}^*,\\ (2x+1)(2x-1)=35(x-2),\end{cases}$$

解得 $x=3$.

［点评］　本题中的 x 存在于排列数中，一定要注意排列数对 x 的限制条件，否则容易产生错误.

例题 2　(1)计算：$\dfrac{2A_8^5+7A_8^4}{A_8^8-A_9^5}$；

(2)求证：$A_{n+1}^m=mA_n^{m-1}+A_n^m$.

［解析］　本题主要考查排列数公式. (1)由排列数公式展开即可解决；(2)用公式 $A_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$ 可以证明.

［答案］　(1)解：$\dfrac{2A_8^5+7A_8^4}{A_8^8-A_9^5}$

$$=\frac{2\times8\times7\times6\times5\times4+7\times8\times7\times6\times5}{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1-9\times8\times7\times6\times5}$$

$$=\frac{8\times7\times6\times5\times(8+7)}{8\times7\times6\times5\times(24-9)}$$

$=1$.

(2)证法一：∵$A_{n+1}^m-A_n^m$

$=\frac{(n+1)!}{(n+1-m)!}-\frac{n!}{(n-m)!}$

$=\frac{n!}{(n-m)!}\cdot\left(\frac{n+1}{n+1-m}-1\right)$

$=\frac{n!}{(n-m)!}\cdot\frac{m}{n+1-m}$

$=m\cdot\frac{n!}{(n+1-m)!}$

$=mA_n^{m-1}$,

$\therefore A_{n+1}^m=mA_n^{m-1}+A_n^m$.

证法二：A_{n+1}^m表示从$n+1$个元素中取出m个元素的排列个数，其中不含某元素a_1的有A_n^m个，含有a_1的可这样进行排列：先排a_1，有m种排法，再从另外n个元素中取出$m-1$个元素排在剩下的$m-1$个位置上，有A_n^{m-1}种排法，故含有a_1的排法有mA_n^{m-1}种.

$\therefore A_{n+1}^m=mA_n^{m-1}+A_n^m$.

[点评] 正确运用排列数公式是解决本题的关键.(2)题证法二是充分利用排列的定义及对某一特定元素的正确处理来解决的，解法新颖独到.

▶问题二 元素的不定序问题

例题 3 今有2个红球、3个黄球和4个白球，同色球不加以区分，将这9个球排成3列，有________种不同的方法(用数字作答).

[解析] 本题考查元素的不定序问题，属局部不定序.

排成一列，有A_9^9种排法，除以2红、3黄、4白的顺序即可. 故有$\frac{A_9^9}{A_2^2A_3^3A_4^4}=1\ 260$(种).

[答案] 1 260

[点评] 本题的易错点是没注意“同色球不加以区分”这一条件.

▶问题三 特殊元素问题

例题 4 用数字0,1,2,3,4组成没有重复数字的五位数，则其中数字1,2相邻的偶数共有几个.

[解析] 本题考查排列问题中的特殊元素问题及特殊位置问题.

[答案] 解：若末位为0，则有$A_3^3\cdot A_2^2=12$(种)，

若末位为2，则有$A_2^1\cdot A_2^2=4$(种)，

若末位为4，则有两种情况：

①若1或2在首位有$A_2^1A_2^2=4$(种)，

②若3在首位有$A_2^2A_2^2=4$(种)；

故共有24种.

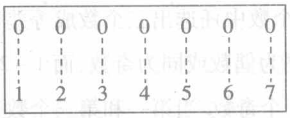
[点评] 有特殊元素或特殊位置要优先安排，本题应注意1，2相邻.

▶问题四 有限制条件类问题

例题 5 5名男生与2名女生排成一排，如果男生甲必须站在中间，两名女生必须相邻，共有多少种不同的排法？

[解析] 本题是有限制条件的排列问题，先安排好甲，再安排两女生，最后安排剩下的男生.

[答案] 解：如图，先排甲(图中的4号位置)只有一种排法，将2名女生看作1人，排在1和2,2和3,5和6,6和7中的“四个位置”中的“一个位置”有A_4^1种排法，其中2名女生可交换位置有A_2^2种方法，最后将其余4名男生排在剩下的4个位置有A_4^4种方法，故符合题意的排法种数共有$A_4^1A_2^2A_4^4=192$(种).



[点评] 解决有限制条件的排列问题的思路：一是直接法，先安排好特殊元素，处理好特殊位置. 二是间接法，先全排列，再扣除不符合条件的方法种数.

例题 6 七人站成一排，其中甲在乙前(不一定相邻)，乙在丙前，则共有多少种不同的站法？

[解析] 我们可以从整体角度出发，七个人任意排共有A_7^7种不同的排法，而甲、乙、丙三人全排列共有A_3^3种不同排法，符合题意的排法只有一种，把七人的全排列种数除以甲、乙、丙三人的全排列种数即可解决问题，还可用插空法来求解.

[答案] 解法一：先不考虑甲、乙、丙的顺序，任意排列共有A_7^7种，由于在上述排列中，甲、乙、丙六种排法中仅有一种符合要求，因此符合要求的排法共有$A_7^7\div A_3^3=840$(种).

解法二：七个位置中，先将除甲、乙、丙以外的四个人先排列，有A_7^4种，然后将甲、乙、丙按规定顺序插入三个空格中，因此共有$A_7^4=840$(种).