Gaodeng Shuxue

GAODENG SHUXUE

China University of Mining and Technology Press

高等职业院校“十一五”规划教材

# 高等数学

徐　强　白秀琴　主编

中国矿业大学出版社

高等职业院校“十一五”规划教材

# 高等数学

主　编　徐　强　白秀琴

中国矿业大学出版社

## 内容提要

本书是21世纪高职高专规划教材，依据《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》编写而成。《高等数学》共分为11章，主要内容包括函数及其图形、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数、数学实验与数学建模等。

本书是高等职业教育和高等专科教育《高等数学》课程的通用教材，也可作为成人教育和函授教育高等数学课程的学生用书。

**图书在版编目(CIP)数据**

高等数学/徐强，白秀琴主编．—徐州：中国矿业大学出版社，2008.8

高等职业院校"十一五"规划教材

ISBN 978-7-5646-0057-0

Ⅰ.高… Ⅱ.①徐…②白… Ⅲ.高等数学—高等学校：技术学校—教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第130769号

**书　　名**　高等数学
**主　　编**　徐　强　白秀琴
**责任编辑**　耿东锋　张　岩
**责任校对**　周俊平
**出版发行**　中国矿业大学出版社
（江苏省徐州市中国矿业大学内　邮编 221008）
**网　　址**　http://www.cumtp.com　**E-mail**　cumtpvip@cumtp.com
**排　　版**　中国矿业大学出版社排版中心
**印　　刷**　徐州市今日彩色印刷有限公司
**经　　销**　新华书店
**开　　本**　787×1092　1/16　**印张** 23.5　**字数** 587千字
**版次印次**　2008年8月第1版　2008年8月第1次印刷
**定　　价**　32.00元
（图书出现印装质量问题，本社负责调换）

# 前　言

本书是21世纪高职高专规划教材。

本教材依据教育部最新规定的《高职高专高等数学课程教学基本要求》和《教育部关于加强高职高专教育专业人才培养工作的意见》，并结合煤炭行业高职高专的教育特色的实际情况而编写。

在本教材的编写过程中，重点体现以下指导思想：突出“以应用为目的，以必需、够用为度”的高等职业教育特色；遵循“突出思想分析、立足能力培养，强化动手技能，解决实际问题”的原则；在保证科学性的基础上，力求讲清概念、减少理论求证；注意学生基本运算能力、分析问题能力、解决问题能力以及理论联系实际能力的培养；强调数学学科与相关学科之间的横向联系，力求做到立足实践与应用，拓宽基础知识面，使一般能力的培养与职业能力相结合，努力适应工科高职高专教学需求。

为了培养和启迪学生思维空间的发展及应用现代科学工具，本教材编写了数学实验与数学建模基本知识。

参加本书编写的人员有平顶山工业职业技术学院张建中（第一章），平顶山工业职业技术学院李晓歌（第二章），平顶山工业职业技术学院崔小珂（第三章），平顶山工业职业技术学院李清（第四章），平顶山工业职业技术学院白永丽（第五章），平顶山工业职业技术学院杨宝玉（第六章），平顶山工业职业技术学院刘俊峰（第七章），平顶山工业职业技术学院白搬琴（第八章），平顶山工业职业技术学院刘义山（第九章），平顶山工业职业技术学院李骥昭（第十章），平顶山工业职业技术学院徐强（第十一章，附录Ⅰ）。徐强、白秀琴任主编。

在此，谨向在本书编写出版过程中，进行指导、参加审稿、提供帮助和支持的所有同志及单位，致以衷心的感谢！

由于编者的水平有限，编写时间仓促，书中不足之处肯定不少，错误之处也在所难免，恳请专家、同行和读者批评指正，以待本书在教学初中中不断完善，并再版时修正。

编　者

2008年5月

# 目　录

# 第一章　函数及其图形

函数是近代数学的基本概念之一，也是高等数学的主要研究对象. 所谓函数关系就是变量之间的依赖关系，它与后续章节的极限和连续等组成高等数学的基础知识. 本章将学习集合、函数的概念、性质、基本初等函数、复合函数等基本内容，为以后的学习奠定必要的基础.

## 第一节　集　　合

### 一、集合的概念

我们先考察以下几类事物和对象：

(1) 0,1,4,7 四个数字；

(2) 在同一平面内到两定点距离相等的所有点；

(3) 所有等腰三角形；

(4) 某学院全体学生；

(5) 某图书馆全部藏书.

它们分别是由一些具有相同属性的事物或对象所构成的各自的“全体”或“总体”. 我们把具有某种特定属性的对象所组成的总体叫做集合(简称集). 把组成集合的每一个对象叫做这个集合的元素.

对于一个给定的集合，它的元素有以下三个特征：

(1) 确定性　集合中的元素是确定的.

(2) 互异性　集合中的元素都是不同的对象，当两个相同的对象归入同一个集合时，只能算作这个集合的一个元素，一个集合的元素是不允许重复的.

(3) 无序性　就是说，对于一个给定的集合，集合中的各个元素间不考虑其顺序关系.

一般用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素. 用“$a\in A$”表示 $a$ 是集合 $A$ 的元素或说“$a$ 属于 $A$”；用“$a\notin A$”表示 $a$ 不是集合 $A$ 的元素或说“$a$ 不属于 $A$”. 属于关系是元素与集合之间的关系，故属于符号 $\in$ 两边就分别是元素和集合.

含有有限个元素的集合叫做有限集；含有无限个元素的集合叫做无限集. 只含有一个元素的集合叫做单元素集；不含任何元素的集合叫做空集，空集用符号“$\varnothing$”表示. 例如，只由 0,1,4,7 四个元素组成的集合是有限集；全体自然数组成的集合是无限集；方程 $x^2+1=0$，在实数范围内的解的集合是空集 $\varnothing$.

元素为数的集合叫做数集，常见的数集有：全体非负整数组成的集合叫做自然数集，通常记作 $\mathbf{N}$；全体整数组成的集合叫做整数集，通常记作 $\mathbf{Z}$；全体有理数组成的集合叫做有理数集，通常记作 $\mathbf{Q}$；全体实数组成的集合叫做实数集，通常记作 $\mathbf{R}$. 另外，$\mathbf{Z}^+$ 表示正整数集；$\mathbf{Z}^-$ 表示负整数集；$\mathbf{Q}^+$ 表示正有理数集；$\mathbf{Q}^-$ 表示负有理数集；$\mathbf{R}^+$ 表示正实数集；$\mathbf{R}^-$ 表示负实数集.

集合的表示法有列举法和描述法：把集合中的元素一一列举出来，并记在{ }内，这种表示集合的方法叫做列举法. 如方程 $x^2-5x+6=0$ 的解的集合是{2,3}. 把集合中所包含元素的共同特性，用描述性短语或数学表达式写在{ }内，这种表示集合的方法叫做描述法. 如 $\{x\mid x^2-5x+6=0\}$.

**例 1** 用列举法或描述法表示下列集合，并判断它们是有限集还是无限集.

(1) 大于 2 且小于 12 的偶数；

(2) 由全体正奇数组成的集合；

(3) 方程 $x^2-x-2=0$ 的解集.

**解** (1)用描述法表示为

$$\{\text{大于 2 且小于 12 的偶数}\}\text{或}\{x\mid x=2n,1<n<6,n\in\mathbf{N}\}$$

用列举法表示为

$$\{4,6,8,10\}$$

该集合为有限集.

(2) 用描述法表示为

$$\{\text{全体正奇数}\}\text{或}\{x\mid x=2n+1,n\in\mathbf{N}\}$$

用列举法表示为

$$\{1,3,5,7,\cdots,2n+1,\cdots\}$$

该集合为无限集.

(3) 用描述法表示为

$$\{x\mid x^2-x-2=0\}$$

用列举法表示为

$$\{-1,2\}$$

该集合为有限集.

设 $A,B$ 是两个集合，如果集合 $A$ 的每一个元素都属于集合 $B$，这时，我们把集合 $A$ 叫做集合 $B$ 的子集，记作

$$A\subseteq B\text{ 或 }B\supseteq A$$

读作"$A$ 包含于 $B$"或"$B$ 包含 $A$". 包含关系是集合与集合之间的一种关系，故包含关系符号两边就都是集合.

根据子集的概念可得，任何一个集合 $A$ 都是它自身的子集，即

$$A\subseteq A$$

如果 $A$ 是 $B$ 的子集，并且集合 $B$ 中至少有一个元素不属于 $A$，那么 $A$ 叫做 $B$ 的真子集，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

通常用圆或封闭曲线来形象地表示集合，用封闭曲线内部的点表示该集合的元素(如图 1-1). 这样的图形叫做文氏图. 图 1-2 表示 $A$ 是 $B$ 的真子集.

我们还规定：空集是任何集合的子集，是任何非空集合的真子集，所以对任何集合 $A$，有 $\varnothing\subseteq A$.

对于两个集合 $A$、$B$，如果 $A\subseteq B$，同时 $B\subseteq A$，则称集合 $A$ 与集合 $B$ 相等，记作 $A=B$.

**例 2** 写出{1,2,3}的所有子集与真子集.

**解** {1,2,3}的所有子集是 $\varnothing$、{1}、{2}、{3}、{1,2}、{1,3}、{2,3}、{1,2,3}. 其中，除了

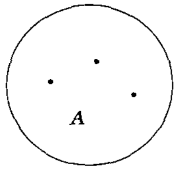


图 1-1

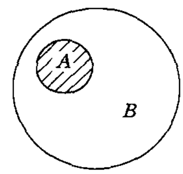


图 1-2

{1,2,3}以外的子集都是{1,2,3}的真子集.

**二、集合的运算**

设 $A,B$ 是两个集合，由属于集合 $A$ 或集合 $B$ 的一切元素组成的集合，叫做集合 $A$ 与 $B$ 的并集，记作 $A\cup B$，读作“$A$ 并 $B$”，即 $A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$. 并集可用图 1-3 的阴影部分来表示

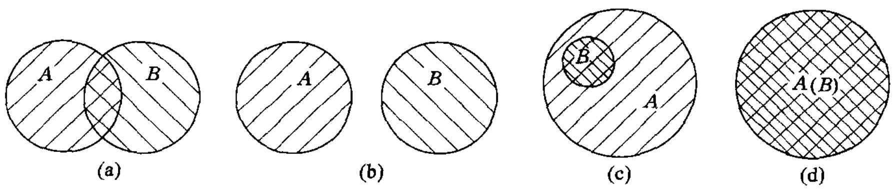


图 1-3

由并集定义可得，对任何一个集合 $A$ 都有 $A\cup A=A$，$A\cup\varnothing=A$，对于集合 $A$、$B$ 和 $C$ 有 $A\cup B=B\cup A$（交换律），$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$（结合律）.

求集合并集的运算叫做并运算.

**例 3**　设 $A=\{0,1,2\}$，$B=\{-1,1\}$，求 $A\cup B$.

**解**　$A\cup B=\{0,1,2\}\cup\{-1,1\}=\{-1,0,1,2\}$.

**例 4**　设 $A=\{x\mid 0<x<3\}$，$B=\{x\mid 1<x<5\}$，求 $A\cup B$.

**解**　$A\cup B=\{x\mid 0<x<3\}\cup\{x\mid 1<x<5\}=\{x\mid 0<x<5\}$，如图 1-4 所示.

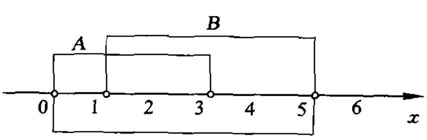


图 1-4

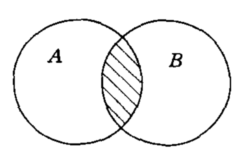


图 1-5

设 $A,B$ 是两个集合，把属于集合 $A$ 且属于集合 $B$ 的所有元素组成的集合叫做集合 $A$ 与 $B$ 的交集，记作 $A\cap B$，读作“$A$ 交 $B$”，即 $A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$，如图 1-5 所示.

由交集定义可得，对于任何一个集合 $A$ 都有 $A\cap A=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$，对于集合 $A$、$B$ 和 $C$ 有：$A\cap B=B\cap A$（交换律），$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$（结合律），$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$、$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$（分配率）.

求集合交集的运算叫做交运算.

**例 5**　设 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{b,c,d\}$，求 $A\cap B$.

**解** $A\cap B=\{a,b,c\}\cap\{b,c,d\}=\{b,c\}$.

**例 6** 设 $A=\{x\mid -3<x<2\}$，$B=\{x\mid -1<x<4\}$，求 $A\cap B$.

**解** $A\cap B=\{x\mid -3<x<2\}\cap\{x\mid -1<x<4\}=\{x\mid -1<x<2\}$，如图 1-6 所示.

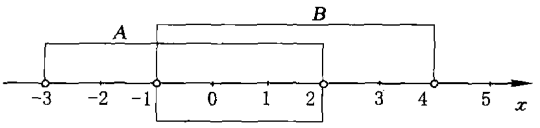


图 1-6

我们研究集合与集合的关系时，常遇到一些集合是某一个给定集合的子集，这个给定的集合叫做全集，用 $\Omega$ 表示. 也就是说，全集包含了我们所要研究的各个集合的全部元素.

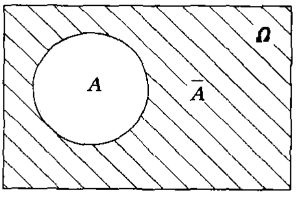


图 1-7

对于全集 $\Omega$，集合 $A$ 是 $\Omega$ 的子集，即 $A\subseteq\Omega$，由 $\Omega$ 中所有不属于 $A$ 的元素组成的集合，叫做集合 $A$ 在 $\Omega$ 中的补集. 记作 $\overline{A}$，读作"$A$ 补"，即 $\overline{A}=\{x\mid x\in\Omega，且\ x\notin A\}$. 补集可用图 1-7 阴影部分表示.

由定义可知 $\overline{\Omega}=\varnothing$，$\overline{\varnothing}=\Omega$.

求集合补集的运算叫做补运算.

**例 7** 设 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，$A=\{1,3,5\}$，求 $\overline{A}$.

**解** $\overline{A}=\{2,4,6,7,8\}$.

**例 8** 设 $\Omega=\{三角形\}$，$A=\{直角三角形\}$，求 $\overline{A}$.

**解** $\overline{A}=\{斜三角形\}$.

## 习题 1-1

1. 用列举法或描述法表示下列集合，指出哪些集合是有限集，哪些集合是无限集.

(1) 能整除 15 的整数；　　(2) 方程 $x^2-5x+4=0$ 的解；

(3) 不等式 $x^2+5x+6>0$ 的解；　　(4) 大于 3 的偶数；

(5) 方程 $3x+y=11$ 的解.

2. 写出集合 $\{a,b,c\}$ 的全部真子集.

3. (1) 设 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{2,3,4\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$；

(2) 设 $A=\{x\mid x<5\}$，$B=\{x\mid x\geqslant 0\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$；

(3) 设 $A=\{(x,y)\mid 3x+2y=1\}$，$B=\{(x,y)\mid x-y=2\}$，求 $A\cap B$.

4. 设 $A=\{x\mid -2<x<1\}$，$B=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$.

5. (1) 设 $\Omega=\{x\mid 1<x<10, x\in\mathbf{N}\}$，$A=\{2,3\}$，求 $\overline{A}$；

(2) 设 $\Omega=\mathbf{R}$，$A=\{无理数\}$，求 $\overline{A}$.

6. (1) 设 $\Omega=\{小于\ 9\ 的正整数\}$，$A=\{1,2,3\}$，$B=\{3,4,5,6\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$，$\overline{A}$，$\overline{B}$，$\overline{A}\cap\overline{B}$，$A\cap\overline{B}$；

(2) 设 $\Omega=\mathbf{R}$，$A=\{x\mid -3<x<2\}$，$B=\{x\mid -1<x<5\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$，$\overline{A}$，$\overline{B}$，$\overline{A}\cap B$ 和

$\overline{A}\cap\overline{B}$.

7. 设全集 $\Omega=\{1,2,\cdots,10\}$，集合 $M=\{1,3,5,6\}$，$N=\{2,4,6,7\}$，$P=\{3,4,8,10\}$. 求：
(1) $M\cup N$；(2) $M\cap N$；(3) $(M\cap N)\cup P$；(4) $\overline{M}\cap P$；(5) $\overline{M\cap N}$；(6) $\overline{N}\cap P$.

8. 设全集 $\Omega=R$，$A=\{x\mid -1\leqslant x<3\}$，$B=\{x\mid |x|<2\}$. 求：
(1) $A\cap B$；(2) $A\cup B$；(3) $\overline{A}$；(4) $\overline{B}$；(5) $\overline{A}\cap B$；(6) $\overline{A}\cup B$.

# 第二节　函　　数

## 一、常量与变量

在自然现象或科学技术中，某一过程常常会遇到各种不同的量，其中有的量在过程中不起变化，也就是保持一定的数值，这种量叫做常量；还有一些量在过程中是变化着的，也就是可以取不同的数值，这种量叫做变量.

例如，火车在铁路上行驶时，火车行驶的速度保持一定，它是常量；而火车行驶的路程和时间则是变量.

再如，把一个密闭容器内的气体加热时，气体的体积和分子个数保持一定，它们是常量；而气体的温度和压力则是变量.

一个量是常量或是变量要根据具体的情况作出具体分析. 例如，就小范围地区来说，重力加速度可以看作常量，但就广大地区来说，重力加速度则是变量.

通常用字母 $a$、$b$、$c$ 等表示常量，用 $x$、$y$、$t$ 等表示变量.

任何一个变量，总有一定的变化范围. 如果变量的变化范围是连续的，常用区间来表示变量的变化范围. 在学习和研究实数集时，我们常常要用到区间的概念.

设 $a$、$b$ 是两个实数，且 $a<b$，集合 $\{x\mid a<x<b\}$ 叫做从 $a$ 到 $b$ 的开区间，记作 $(a,b)$.

集合 $\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 叫做从 $a$ 到 $b$ 的闭区间，记作 $[a,b]$.

集合 $\{x\mid a<x\leqslant b\}$ 叫做从 $a$ 到 $b$ 的左开右闭区间，记作 $(a,b]$.

集合 $\{x\mid a\leqslant x<b\}$ 叫做从 $a$ 到 $b$ 的左闭右开区间，记作 $[a,b)$.

左开右闭区间与左闭右开区间统称为半开半闭区间，以上四种区间均称为有限区间.

符号"$-\infty$"与"$+\infty$"分别读作"负无穷大"与"正无穷大". 它们不表示数，而表示变量分别沿负或正方向无止境地变化. 符号"$\infty$"读作"无穷大"，它表示某变量绝对值无止境地变大.

实数集可以表示为 $(-\infty,+\infty)$；集合 $\{x\mid x<a\}$ 用区间 $(-\infty,a)$ 表示；集合 $\{x\mid x\leqslant a\}$ 用区间 $(-\infty,a]$ 表示；集合 $\{x\mid x>b\}$ 用区间 $(b,+\infty)$ 表示；集合 $\{x\mid x\geqslant b\}$ 用区间 $[b,+\infty)$ 表示；集合 $\{x\mid x\neq a\}$ 用区间 $(-\infty,a)\cup(a,+\infty)$ 表示.

以上六种区间都称为无限区间.

以后，我们还要用到与区间有关的邻域概念.

设 $a$ 与 $\delta$ 是两个实数，且 $\delta>0$，满足不等式

$$|x-a|<\delta$$

的实数 $x$ 的全体叫做点 $a$ 的 $\delta$ 邻域，点 $a$ 叫做这邻域的中心，$\delta$ 叫做这邻域的半径. 上述绝对值不等式与不等式

$$-\delta<x-a<\delta$$