

高等职业院校“十一五”规划教材

高等数学

徐 强 白秀琴 主编

Gaodeng Shuxue

China University of Mining and Technology Press

中国矿业大学出版社

GAODENG

SHUXUE

高等职业院校“十一五”规划教材

高等数学

主 编 徐 强 白秀琴

中国矿业大学出版社

内 容 提 要

本书是 21 世纪高职高专规划教材,依据《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》编写而成。《高等数学》共分为 11 章,主要包括函数及其图形、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数、数学实验与数学建模等。

本书是高等职业教育和高等专科教育《高等数学》课程的通用教材,也可作为成人教育和函授教育高等数学课程的学生用书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/徐强,白秀琴主编. —徐州:中国矿业大学出版社, 2008. 8

高等职业院校“十一五”规划教材

ISBN 978 - 7 - 5646 - 0057 - 0

I. 高… II. ①徐…②白… III. 高等数学—高等学校: 技术学校—教材 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 130769 号

书 名 高等数学

主 编 徐 强 白秀琴

责任编辑 耿东锋 张 岩

责任校对 周俊平

出版发行 中国矿业大学出版社

(江苏省徐州市中国矿业大学内 邮编 221008)

网 址 <http://www.cumtp.com> E-mail cumtpvip@cumtp.com

排 版 中国矿业大学出版社排版中心

印 刷 徐州市今日彩色印刷有限公司

经 销 新华书店

开 本 787×1092 1/16 印张 23.5 字数 587 千字

版次印次 2008 年 8 月第 1 版 2008 年 8 月第 1 次印刷

定 价 32.00 元

(图书出现印装质量问题,本社负责调换)

前 言

本书是 21 世纪高职高专规划教材。

本教材依据教育部最新规定的《高职高专高等数学课程教学基本要求》和《教育部关于加强高职高专教育专业人才培养工作的意见》，并结合煤炭行业高职高专的教育特色的实际情况而编写。

在本教材的编写过程中，重点体现以下指导思想：突出“以应用为目的，以必需、够用为度”的高等职业教育特色；遵循“突出思想分析、立足能力培养，强化动手技能，解决实际问题”的原则；在保证科学性的基础上，力求讲清概念、减少理论求证；注意学生基本运算能力、分析问题能力、解决问题能力以及理论联系实际能力的培养；强调数学学科与相关学科之间的横向联系，力求做到立足实践与应用，拓宽基础知识面，使一般能力的培养与职业能力相结合，努力适应工科高职高专教学需求。

为了培养和启迪学生思维空间的发展及应用现代科学工具，本教材编写了数学实验与数学建模基本知识。

参加本书编写的人员有平顶山工业职业技术学院张建中（第一章），平顶山工业职业技术学院李晓歌（第二章），平顶山工业职业技术学院崔小珂（第三章），平顶山工业职业技术学院李清（第四章），平顶山工业职业技术学院白永丽（第五章），平顶山工业职业技术学院杨宝玉（第六章），平顶山工业职业技术学院刘俊峰（第七章），平顶山工业职业技术学院白搬琴（第八章），平顶山工业职业技术学院刘义山（第九章），平顶山工业职业技术学院李骥昭（第十章），平顶山工业职业技术学院徐强（第十一章，附录 I）。徐强、白秀琴任主编。

在此，谨向在本书编写出版过程中，进行指导、参加审稿、提供帮助和支持的所有同志及单位，致以衷心的感谢！

由于编者的水平有限，编写时间仓促，书中不足之处肯定不少，错误之处也在所难免，恳请专家、同行和读者批评指正，以待本书在教学初中中不断完善，并再版时修正。

编 者

2008 年 5 月

目 录

第一章 函数及其图形	1
第一节 集合	1
一、集合的概念	1
二、集合的运算	3
习题 1-1	4
第二节 函数	5
一、常量与变量	5
二、函数的概念	6
三、函数的表示法	7
四、隐函数	8
五、反函数	8
习题 1-2	9
第三节 函数的几种特性	10
一、函数的有界性	10
二、函数的单调性	10
三、函数的奇偶性	11
四、函数的周期性	12
习题 1-3	12
第四节 初等函数	12
一、基本初等函数	12
二、复合函数	15
三、初等函数	15
习题 1-4	15
第五节 建立函数关系式举例	17
习题 1-5	19
总复习题一(A)	19
总复习题一(B)	21
第二章 极限与连续	24
第一节 极限的概念	24
一、函数的极限	24
二、极限的性质	27
习题 2-1	27
第二节 无穷小量与无穷大量	27
一、无穷小量	27

二、无穷大量	28
三、无穷小与无穷大的关系	29
习题 2-2	29
第三节 两个重要极限	29
一、第一个重要极限	29
二、第二个重要极限	30
习题 2-3	31
第四节 极限的四则运算法则	31
一、极限的四则运算	31
二、无穷小的比较	33
习题 2-4	34
第五节 函数的连续性与间断点	34
一、函数的连续性	34
二、函数的间断点及其分类	37
习题 2-5	38
第六节 连续函数的运算与初等函数的连续性	40
一、连续函数的四则运算	40
二、复合函数的连续性	40
三、反函数的连续性	40
四、初等函数的连续性	41
习题 2-6	41
第七节 闭区间上连续函数的性质	42
一、最大值和最小值定理	42
二、介值定理	43
习题 2-7	44
总复习题二(A)	45
总复习题二(B)	46
第三章 导数与微分	48
第一节 导数的概念	48
一、引例	48
二、导数的定义与几何意义	49
三、函数的可导性与连续性的关系	53
习题 3-1	54
第二节 函数的和、差、积、商的求导法则	55
一、函数和的求导法则	55
二、函数积的求导法则	56
三、函数商的求导法则	57
习题 3-2	58
第三节 反函数与复合函数的导数	59

一、反函数的导数	59
二、复合函数的导数	61
习题 3-3	63
第四节 隐函数的导数和由参数方程确定的函数的导数	64
一、隐函数的导数	64
二、由参数方程确定的函数的导数	67
三、初等函数的导数	69
习题 3-4	70
第五节 高阶导数	71
习题 3-5	74
第六节 微分及其应用	75
一、微分的定义和几何意义	75
二、微分运算法则	77
三、微分在近似计算中的应用	79
习题 3-6	81
总复习题三(A)	83
总复习题三(B)	84
第四章 中值定理与导数的应用	86
第一节 中值定理	86
一、罗尔(Rolle)中值定理	86
二、拉格朗日(Lagrange)中值定理	86
三、柯西(Cauchy)中值定理	88
习题 4-1	88
第二节 洛必达(L'Hospital)法则	89
一、 $\frac{0}{0}$ 型和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式	89
二、其他类型的未定式	90
习题 4-2	92
第三节 函数单调性、凹凸性和拐点	92
一、函数单调性	92
二、函数的凹凸性和拐点	94
习题 4-3	95
第四节 函数的极值与最值	96
一、函数的极值	96
二、函数的最值	98
习题 4-4	100
第五节 函数图形的描绘	101
一、曲线的渐近线	101
二、函数图形的描绘	101

习题 4-5	102
总复习题四(A)	103
总复习题四(B)	104
第五章 不定积分	106
第一节 不定积分的概念与性质	106
一、原函数与不定积分	106
二、不定积分的几何意义	107
三、基本积分公式	108
四、不定积分的性质	109
习题 5-1	111
第二节 换元积分法	112
一、第一类换元积分法	112
二、第二类换元积分法	116
习题 5-2	118
第三节 分部积分法	119
习题 5-3	123
第四节 两类初等可积函数的积分	123
一、有理函数的积分	123
二、三角函数有理式的积分	126
习题 5-4	127
总复习题五(A)	128
总复习题五(B)	129
第六章 定积分及其应用	131
第一节 定积分的概念与性质	131
一、实例分析	131
二、定积分的概念	133
三、定积分的性质	136
习题 6-1	138
第二节 微积分基本定理	139
一、积分上限的函数及其导数	140
二、牛顿—莱布尼茨(Newton-Leibniz)公式	142
习题 6-2	143
第三节 定积分的换元积分法和分部积分法	144
一、定积分的换元积分法	145
二、定积分的分部积分法	147
三、定积分的几个常用公式	148
习题 6-3	150
第四节 定积分的应用	151
一、定积分应用的微元法	151

二、求平面图形的面积	152
三、体积	155
* 四、平面曲线的弧长	157
五、变力沿直线所做的功	158
习题 6-4	160
第五节 广义积分	161
一、无穷区间上的广义积分	161
二、无界函数的广义积分	163
习题 6-5	165
总复习题六(A)	165
总复习题六(B)	167
第七章 常微分方程	170
第一节 微分方程的基本概念	170
一、微分方程的基本概念	170
二、线性相关性	171
习题 7-1	171
第二节 可分离变量的微分方程	172
一、可分离变量的微分方程	172
二、齐次方程	174
习题 7-2	176
第三节 一阶线性微分方程	177
习题 7-3	180
* 第四节 可降阶的高阶微分方程	180
一、 $y^{(n)}=f(x)$ 型的微分方程	180
二、 $y''=f(x, y')$ 型的微分方程	181
三、 $y''=f(y, y')$ 型的微分方程	182
习题 7-4	183
* 第五节 二阶常系数齐次线性微分方程	184
一、二阶常系数齐次线性微分方程的概念及其性质	184
二、二阶常系数齐次线性微分方程的求解方法	184
习题 7-5	187
* 第六节 二阶常系数非齐次线性微分方程	188
一、二阶常系数非齐次线性微分方程的性质	188
二、 $f(x)=e^{\alpha x}P_m(x)$ 型的解法	188
三、 $f(x)=A\cos wx+B\sin wx$ 型的解法	190
习题 7-6	191
总复习题七(A)	192
总复习题七(B)	193

第八章 向量代数与空间解析几何	195
第一节 向量及其线性运算	195
一、空间直角坐标系	195
二、向量与向量的线性运算	196
三、向量的坐标表示式	199
习题 8-1	202
第二节 向量的乘法运算	203
一、向量的数量积	203
二、向量的向量积	205
习题 8-2	208
第三节 平面与直线	208
一、点的轨迹方程的概念	208
二、平面	209
三、直线	212
四、平面、直线间的夹角	214
五、点到平面的距离	215
习题 8-3	216
第四节 曲面与曲线	217
一、几种常见的曲面及其方程	217
二、二次曲面	220
三、曲线	222
习题 8-4	224
总复习题八(A)	225
总复习题八(B)	226
第九章 多元函数微分学	228
第一节 多元函数	228
一、区域	228
二、二元函数	229
习题 9-1	232
第二节 偏导数	232
一、多元函数偏导数	232
二、高阶偏导数	235
习题 9-2	237
第三节 全微分	237
一、全微分	237
二、全微分在近似计算中的应用举例	239
习题 9-3	240
第四节 复合函数的求导法则	240
一、多元复合函数的求导法则	240

二、隐函数的求导法	244
习题 9-4	245
第五节 偏导数在几何上的应用	246
一、空间曲线的切线与法平面	246
二、曲面的切平面与法线	247
习题 9-5	249
第六节 多元函数极值	249
一、极值与最大值和最小值	249
二、条件极值	252
习题 9-6	253
总复习题九(A)	253
总复习题九(B)	255
第十章 多元函数积分学	257
第一节 二重积分	257
一、二重积分的概念	257
二、二重积分的性质	258
习题 10-1	260
第二节 二重积分的计算法	260
一、利用直角坐标计算二重积分	260
二、利用极坐标计算二重积分	266
习题 10-2	269
第三节 二重积分应用举例	270
一、体积	270
二、曲面的面积	270
三、质量与重心	272
习题 10-3	273
第四节 平面曲线积分	274
一、对弧长的曲线积分	274
二、对坐标的曲线积分	276
习题 10-4	280
总复习题十(A)	281
总复习题十(B)	282
第十一章 无穷级数	284
第一节 常数项级数的概念与基本性质	284
一、数项级数的概念	284
二、无穷级数的基本性质	285
习题 11-1	287
第二节 正项级数及其敛散性	288
一、基本定理	288

二、正项级数及其敛散性判别法	288
习题 11-2	291
第三节 绝对收敛与条件收敛	292
一、交错级数及其敛散性判别法	292
二、绝对收敛与条件收敛	293
习题 11-3	293
第四节 幂级数	294
一、幂级数的概念	294
二、幂级数的运算	296
习题 11-4	298
第五节 函数展开成幂级数	298
一、泰勒(Taylor)级数	298
二、幂级数展开式在近似计算上的应用	302
习题 11-5	303
总复习题十一(A)	303
总复习题十一(B)	305
附录 I 数学实验与数学建模	307
附录 II 初等数学中的常用公式	319
学习提要及要求	322
习题答案与提示	329
参考文献	364

第一章 函数及其图形

函数是近代数学的基本概念之一,也是高等数学的主要研究对象.所谓函数关系就是变量之间的依赖关系,它与后续章节的极限和连续等组成高等数学的基础知识.本章将学习集合、函数的概念、性质、基本初等函数、复合函数等基本内容,为以后的学习奠定必要的基础.

第一节 集 合

一、集合的概念

我们先考察以下几类事物和对象:

- (1) 0, 1, 4, 7 四个数字;
- (2) 在同一平面内到两定点距离相等的所有点;
- (3) 所有等腰三角形;
- (4) 某学院全体学生;
- (5) 某图书馆全部藏书.

它们分别是由一些具有相同属性的事物或对象所构成的各自的“全体”或“总体”.我们把具有某种特定属性的对象所组成的总体叫做集合(简称集).把组成集合的每一个对象叫做这个集合的元素.

对于一个给定的集合,它的元素有以下三个特征:

- (1) 确定性 集合中的元素是确定的.
- (2) 互异性 集合中的元素都是不同的对象,当两个相同的对象归入同一个集合时,只能算作这个集合的一个元素,一个集合的元素是不允许重复的.
- (3) 无序性 就是说,对于一个给定的集合,集合中的各个元素间不考虑其顺序关系.

一般用大写字母 $A, B, C, \dots$ 表示集合,用小写字母 $a, b, c, \dots$ 表示集合的元素.用“ $a \in A$ ”表示 a 是集合 A 的元素或说“ a 属于 A ”;用“ $a \notin A$ ”表示 a 不是集合 A 的元素或说“ a 不属于 A ”.属于关系是元素与集合之间的关系,故属于符号 $\in$ 两边就分别是元素和集合.

含有有限个元素的集合叫做有限集;含有无限个元素的集合叫做无限集.只含有一个元素的集合叫做单元素集;不含任何元素的集合叫做空集,空集用符号“ $\emptyset$ ”表示.例如,只由 0, 1, 4, 7 四个元素组成的集合是有限集;全体自然数组成的集合是无限集;方程 $x^2 + 1 = 0$, 在实数范围内的解的集合是空集 $\emptyset$.

元素为数的集合叫做数集,常见的数集有:全体非负整数组成的集合叫做自然数集,通常记作 $\mathbf{N}$;全体整数组成的集合叫做整数集,通常记作 $\mathbf{Z}$;全体有理数组成的集合叫做有理数集,通常记作 $\mathbf{Q}$;全体实数组成的集合叫做实数集,通常记作 $\mathbf{R}$. 另外, $\mathbf{Z}^+$ 表示正整数集; $\mathbf{Z}^-$ 表示负整数集; $\mathbf{Q}^+$ 表示正有理数集; $\mathbf{Q}^-$ 表示负有理数集; $\mathbf{R}^+$ 表示正实数集; $\mathbf{R}^-$ 表示负实数集.

集合的表示法有列举法和描述法:把集合中的元素一一列举出来,并记在 $\{\}$ 内,这种表示集合的方法叫做列举法.如方程 $x^2-5x+6=0$ 的解的集合是 $\{2,3\}$.把集合中所包含元素的共同特性,用描述性短语或数学表达式写在 $\{\}$ 内,这种表示集合的方法叫做描述法.如 $\{x|x^2-5x+6=0\}$.

例 1 用列举法或描述法表示下列集合,并判断它们是有限集还是无限集.

- (1) 大于 2 且小于 12 的偶数;
- (2) 由全体正奇数组成的集合;
- (3) 方程 $x^2-x-2=0$ 的解集.

解 (1)用描述法表示为

$$\{\text{大于 2 且小于 12 的偶数}\} \text{ 或 } \{x|x=2n, 1 < n < 6, n \in \mathbf{N}\}$$

用列举法表示为

$$\{4, 6, 8, 10\}$$

该集合为有限集.

(2) 用描述法表示为

$$\{\text{全体正奇数}\} \text{ 或 } \{x|x=2n+1, n \in \mathbf{N}\}$$

用列举法表示为

$$\{1, 3, 5, 7, \dots, 2n+1, \dots\}$$

该集合为无限集.

(3) 用描述法表示为

$$\{x|x^2-x-2=0\}$$

用列举法表示为

$$\{-1, 2\}$$

该集合为有限集.

设 A, B 是两个集合,如果集合 A 的每一个元素都属于集合 B ,这时,我们把集合 A 叫做集合 B 的子集,记作

$$A \subseteq B \text{ 或 } B \supseteq A$$

读作“ A 包含于 B ”或“ B 包含 A ”.包含关系是集合与集合之间的一种关系,故包含关系符号两边就都是集合.

根据子集的概念可得,任何一个集合 A 都是它自身的子集,即

$$A \subseteq A$$

如果 A 是 B 的子集,并且集合 B 中至少有一个元素不属于 A ,那么 A 叫做 B 的真子集,记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.

通常用圆或封闭曲线来形象地表示集合,用封闭曲线内部的点表示该集合的元素(如图 1-1).这样的图形叫做文氏图.图 1-2 表示 A 是 B 的真子集.

我们还规定:空集是任何集合的子集,是任何非空集合的真子集,所以对任何集合 A ,有 $\emptyset \subseteq A$.

对于两个集合 A, B ,如果 $A \subseteq B$,同时 $B \subseteq A$,则称集合 A 与集合 B 相等,记作 $A=B$.

例 2 写出 $\{1, 2, 3\}$ 的所有子集与真子集.

解 $\{1, 2, 3\}$ 的所有子集是 $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$.其中,除了

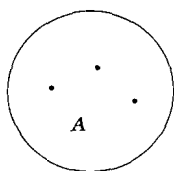


图 1-1

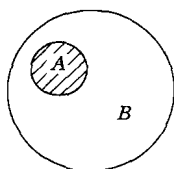


图 1-2

$\{1, 2, 3\}$ 以外的子集都是 $\{1, 2, 3\}$ 的真子集.

二、集合的运算

设 A, B 是两个集合, 由属于集合 A 或集合 B 的一切元素组成的集合, 叫做集合 A 与 B 的并集, 记作 $A \cup B$, 读作“ A 并 B ”, 即 $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$. 并集可用图 1-3 的阴影部分来表示

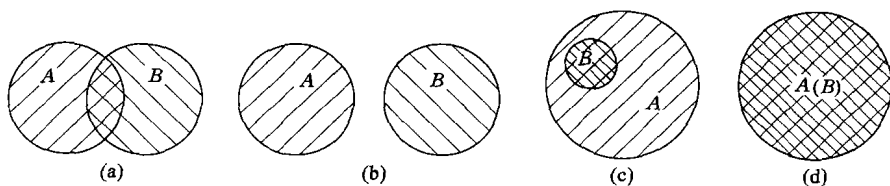


图 1-3

由并集定义可得, 对任何一个集合 A 都有 $A \cup A = A, A \cup \emptyset = A$, 对于集合 A, B 和 C 有 $A \cup B = B \cup A$ (交换律), $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (结合律).

求集合并集的运算叫做并运算.

例 3 设 $A = \{0, 1, 2\}, B = \{-1, 1\}$, 求 $A \cup B$.

解 $A \cup B = \{0, 1, 2\} \cup \{-1, 1\} = \{-1, 0, 1, 2\}$.

例 4 设 $A = \{x | 0 < x < 3\}, B = \{x | 1 < x < 5\}$, 求 $A \cup B$.

解 $A \cup B = \{x | 0 < x < 3\} \cup \{x | 1 < x < 5\} = \{x | 0 < x < 5\}$, 如图 1-4 所示.

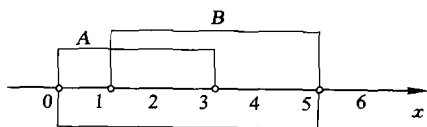


图 1-4

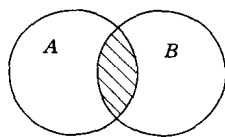


图 1-5

设 A, B 是两个集合, 把属于集合 A 且属于集合 B 的所有元素组成的集合叫做集合 A 与 B 的交集, 记作 $A \cap B$, 读作“ A 交 B ”, 即 $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$, 如图 1-5 所示.

由交集定义可得, 对于任何一个集合 A 都有 $A \cap A = A, A \cap \emptyset = \emptyset$, 对于集合 A, B 和 C 有: $A \cap B = B \cap A$ (交换律), $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (结合律), $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$, $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ (分配率).

求集合交集的运算叫做交运算.

例 5 设 $A = \{a, b, c\}, B = \{b, c, d\}$, 求 $A \cap B$.

解 $A \cap B = \{a, b, c\} \cap \{b, c, d\} = \{b, c\}$.

例 6 设 $A = \{x | -3 < x < 2\}$, $B = \{x | -1 < x < 4\}$, 求 $A \cap B$.

解 $A \cap B = \{x | -3 < x < 2\} \cap \{x | -1 < x < 4\} = \{x | -1 < x < 2\}$, 如图 1-6 所示.

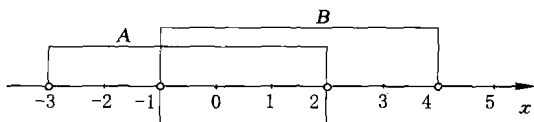


图 1-6

我们研究集合与集合的关系时,常遇到一些集合是某一个给定集合的子集,这个给定的集合叫做全集,用 Ω 表示.也就是说,全集包含了我们所要研究的各个集合的全部元素.

对于全集 Ω ,集合 A 是 Ω 的子集,即 $A \subseteq \Omega$,由 Ω 中所有不属于 A 的元素组成的集合,叫做集合 A 在 Ω 中的补集.记作 $\bar{A}$,读作“ A 补”,即 $\bar{A} = \{x | x \in \Omega, \text{且 } x \notin A\}$.补集可用图 1-7 阴影部分表示.

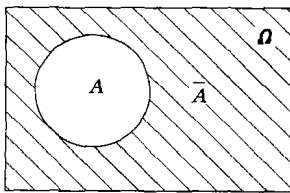


图 1-7

由定义可知 $\bar{\Omega} = \emptyset$, $\bar{\emptyset} = \Omega$.

求集合补集的运算叫做补运算.

例 7 设 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{1, 3, 5\}$, 求 $\bar{A}$.

解 $\bar{A} = \{2, 4, 6, 7, 8\}$.

例 8 设 $\Omega = \{\text{三角形}\}$, $A = \{\text{直角三角形}\}$, 求 $\bar{A}$.

解 $\bar{A} = \{\text{斜三角形}\}$.

习题 1-1

1. 用列举法或描述法表示下列集合,指出哪些集合是有限集,哪些集合是无限集.

(1) 能整除 15 的整数; (2) 方程 $x^2 - 5x + 4 = 0$ 的解;

(3) 不等式 $x^2 + 5x + 6 > 0$ 的解; (4) 大于 3 的偶数;

(5) 方程 $3x + y = 11$ 的解.

2. 写出集合 $\{a, b, c\}$ 的全部真子集.

3. (1) 设 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, 求 $A \cap B, A \cup B$;

(2) 设 $A = \{x | x < 5\}$, $B = \{x | x \geq 0\}$, 求 $A \cap B, A \cup B$;

(3) 设 $A = \{(x, y) | 3x + 2y = 1\}$, $B = \{(x, y) | x - y = 2\}$, 求 $A \cap B$.

4. 设 $A = \{x | -2 < x < 1\}$, $B = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$, 求 $A \cap B, A \cup B$.

5. (1) 设 $\Omega = \{x | 1 < x < 10, x \in \mathbf{N}\}$, $A = \{2, 3\}$, 求 $\bar{A}$;

(2) 设 $\Omega = \mathbf{R}$, $A = \{\text{无理数}\}$, 求 $\bar{A}$.

6. (1) 设 $\Omega = \{\text{小于 9 的正整数}\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, 求 $A \cap B, A \cup B, \bar{A}, \bar{B}, \bar{A} \cap \bar{B}, A \cap \bar{B}$;

(2) 设 $\Omega = \mathbf{R}$, $A = \{x | -3 < x < 2\}$, $B = \{x | -1 < x < 5\}$, 求 $A \cap B, A \cup B, \bar{A}, \bar{B}, \bar{A} \cap \bar{B}$ 和

$\bar{A} \cap \bar{B}$.

7. 设全集 $\Omega = \{1, 2, \dots, 10\}$, 集合 $M = \{1, 3, 5, 6\}$, $N = \{2, 4, 6, 7\}$, $P = \{3, 4, 8, 10\}$. 求:

(1) $M \cup N$; (2) $M \cap N$; (3) $(M \cap N) \cup P$; (4) $\bar{M} \cap P$; (5) $\bar{M} \cap \bar{N}$; (6) $\bar{N} \cap P$.

8. 设全集 $\Omega = \mathbb{R}$, $A = \{x | -1 \leq x < 3\}$, $B = \{x | |x| < 2\}$. 求:

(1) $A \cap B$; (2) $A \cup B$; (3) $\bar{A}$; (4) $\bar{B}$; (5) $\bar{A} \cap B$; (6) $\bar{A} \cup B$.

第二节 函 数

一、常量与变量

在自然现象或科学技术中, 某一过程常常会遇到各种不同的量, 其中有的量在过程中不起变化, 也就是保持一定的数值, 这种量叫做常量; 还有一些量在过程中是变化着的, 也就是可以取不同的数值, 这种量叫做变量.

例如, 火车在铁路上行驶时, 火车行驶的速度保持一定, 它是常量; 而火车行驶的路程和时间则是变量.

再如, 把一个密闭容器内的气体加热时, 气体的体积和分子个数保持一定, 它们是常量; 而气体的温度和压力则是变量.

一个量是常量或是变量要根据具体的情况作出具体分析. 例如, 就小范围地区来说, 重力加速度可以看作常量, 但就广大地区来说, 重力加速度则是变量.

通常用字母 a, b, c 等表示常量, 用 x, y, t 等表示变量.

任何一个变量, 总有一定的变化范围. 如果变量的变化范围是连续的, 常用区间来表示变量的变化范围. 在学习和研究实数集时, 我们常常要用到区间的概念.

设 a, b 是两个实数, 且 $a < b$, 集合 $\{x | a < x < b\}$ 叫做从 a 到 b 的开区间, 记作 (a, b) .

集合 $\{x | a \leq x \leq b\}$ 叫做从 a 到 b 的闭区间, 记作 $[a, b]$.

集合 $\{x | a < x \leq b\}$ 叫做从 a 到 b 的左开右闭区间, 记作 $(a, b]$.

集合 $\{x | a \leq x < b\}$ 叫做从 a 到 b 的左闭右开区间, 记作 $[a, b)$.

左开右闭区间与左闭右开区间统称为半开半闭区间, 以上四种区间均称为有限区间.

符号“ $-\infty$ ”与“ $+\infty$ ”分别读作“负无穷大”与“正无穷大”. 它们不表示数, 而表示变量分别沿负或正方向无止境地变化. 符号“ ∞ ”读作“无穷大”, 它表示某变量绝对值无止境地变大.

实数集可以表示为 $(-\infty, +\infty)$; 集合 $\{x | x < a\}$ 用区间 $(-\infty, a)$ 表示; 集合 $\{x | x \leq a\}$ 用区间 $(-\infty, a]$ 表示; 集合 $\{x | x > b\}$ 用区间 $(b, +\infty)$ 表示; 集合 $\{x | x \geq b\}$ 用区间 $[b, +\infty)$ 表示; 集合 $\{x | x \neq a\}$ 用区间 $(-\infty, a) \cup (a, +\infty)$ 表示.

以上六种区间都称为无限区间.

以后, 我们还要用到与区间有关的邻域概念.

设 a 与 δ 是两个实数, 且 $\delta > 0$, 满足不等式

$$|x - a| < \delta$$

的实数 x 的全体叫做点 a 的 δ 邻域, 点 a 叫做这邻域的中心, δ 叫做这邻域的半径. 上述绝对值不等式与不等式

$$-\delta < x - a < \delta$$