全国高等学校教学研究课题成果

医用高等数学

YIYONG GAODENG SHUXUE

主编 王培承 祁爱琴 潘庆忠

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

全国高等学校教学研究课题成果

医用高等数学

主　编　王培承　祁爱琴　潘庆忠

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

医用高等数学：全国高等学校教学研究课题成果/王培承，祁爱琴，潘庆忠主编. —北京：北京理工大学出版社，2008. 8

ISBN 978-7-5640-1578-7

Ⅰ. 医…　Ⅱ. ①王…②祁…③潘…　Ⅲ. 医用数学-教学研究-医学院校　Ⅳ. R311

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 119790 号

出版发行 / 北京理工大学出版社
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(办公室)　68944990(批销中心)　68911084(读者服务部)
网　　址 / http：// www. bitpress. com. cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京圣瑞伦印刷厂
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 / 18. 25
字　　数 / 438 千字
版　　次 / 2008 年 8 月第 1 版　　2008 年 8 月第 1 次印刷
印　　数 / 1 ~ 6000 册
定　　价 / 27. 80 元

责任校对 / 陈玉梅
责任印制 / 母长新

医用高等数学

编 委 会

主　编　王培承　祁爱琴　潘庆忠

副主编　安洪庆　高明海　胡式良　祁英华

孔雨佳　胡西厚　闫　岩　苗巧云

编　委（以姓氏笔画为序）

王希杰　王培承　孔　杨　孔雨佳　刘玉花

刘守鹏　刘　芳　刘　琳　闫　岩　祁英华

祁爱琴　安洪庆　李云伟　杨　丽　杨淑香

李望晨　苗巧云　郑婷婷　胡式良　胡西厚

高明海　曹伟燕　曹海霞　程秀兰　潘庆忠

前　言

本书是全国教育科学“十五”国家规划课题“21 世纪中国高等教育人才培养体系的创新与实践”数学类子课题“五年制医药类专业数学课程体系与教学模式研究”的研究成果之一。

该书按照现行《医科（五年制）高等数学基本要求》，结合医学院校数学教学的实际情况，由首都医科大学、青岛大学、滨州医学院和潍坊医学院等课题组成员学校联合编写。课题组成员多年来从事高等数学的教学工作，积累了丰富的教学经验，对高等数学的教育体系和内容有着全面的了解，本书充分吸收了课题组成员学校的教学经验和改革成果。

全书力求深入浅出，紧密联系医学实际，注重科学抽象能力、逻辑推理能力以及数值计算能力的培养。教材内容的选取充分考虑到 21 世纪医科人才所需要的数学素质，也充分考虑到医科学生学习数学的实际条件，使本书基本概念、基本理论描述通俗易懂，例题、习题配置适当。全书分为微积分、微分方程、线性代数、概率统计四个板块，共十章。

本书包含了高等医学院校各专业学生必须学习的数学内容，教学中可根据各专业的需要，对内容作适当的取舍。本书也可作为医学硕士研究生高等数学教材和医药工作者的参考书。

由于编者水平有限，书中难免有不妥之处， 恳切希望广大读者给予批评指正。

编　者

目　录

第一章　函数与极限 …… (1)
　第一节　函数 …… (1)
　第二节　极限 …… (7)
　第三节　函数的连续性 …… (13)
　习题一 …… (17)
第二章　导数与微分 …… (19)
　第一节　导数 …… (19)
　第二节　微分及其应用 …… (25)
　习题二 …… (28)
第三章　微分中值定理及导数应用 …… (30)
　第一节　中值定理 …… (30)
　第二节　洛比达法则 …… (32)
　第三节　函数的单调性与极值 …… (36)
　第四节　曲线的凹凸性与拐点 …… (41)
　第五节　函数的渐近线 …… (43)
　第六节　函数图形的绘制 …… (45)
　习题三 …… (46)
第四章　不定积分 …… (48)
　第一节　不定积分的概念和性质 …… (48)
　第二节　换元积分法 …… (52)
　第三节　分部积分法 …… (57)
　第四节　几种特殊类型函数的积分 …… (59)
　第五节　积分表的使用 …… (63)
　习题四 …… (64)
第五章　定积分及其应用 …… (67)
　第一节　定积分的概念和性质 …… (67)
　第二节　定积分的计算 …… (72)
　第三节　定积分的近似计算 …… (77)
　第四节　广义积分 …… (80)
　第五节　定积分的应用 …… (83)
　习题五 …… (88)
第六章　多元函数微积分 …… (91)
　第一节　空间解析几何简介 …… (91)
　第二节　多元函数的概念 …… (93)
　第三节　偏导数和全微分 …… (97)

第四节 二元复合函数的微分法 …………（100）
第五节 二元函数的极值 …………（104）
第六节 二重积分 …………（106）
习题六 …………（111）
第七章 微分方程 …………（114）
第一节 微分方程的一般概念 …………（114）
第二节 可分离变量的微分方程 …………（116）
第三节 一阶线性微分方程 …………（119）
第四节 几种可降阶的微分方程 …………（123）
第五节 二阶常系数线性齐次微分方程 …………（127）
第六节 微分方程模型应用简介 …………（131）
习题七 …………（136）
第八章 线性代数基础 …………（138）
第一节 行列式 …………（138）
第二节 矩阵及其运算 …………（146）
第三节 矩阵的逆 …………（153）
第四节 线性方程组 …………（156）
第五节 方阵的特征值与特征向量 …………（165）
习题八 …………（169）
第九章 概率论 …………（173）
第一节 随机事件及其运算 …………（173）
第二节 随机事件的概率 …………（176）
第三节 概率的基本运算法则 …………（178）
第四节 全概率公式和贝叶斯公式 …………（182）
第五节 贝努利概型 …………（184）
第六节 随机变量及其概率分布 …………（185）
第七节 随机变量的数字特征 …………（194）
第八节 大数定律与中心极限定理 …………（199）
习题九 …………（202）
第十章 数理统计初步 …………（205）
第一节 抽样分布 …………（205）
第二节 参数估计 …………（213）
第三节 假设检验 …………（223）
第四节 方差分析 …………（230）
第五节 回归分析 …………（238）
习题十 …………（242）
附表 …………（245）
习题答案 …………（270）
参考文献 …………（284）

第一章

函数与极限

函数是事物间质与量相互联系、相互制约规律的数学抽象，是表达变量间复杂关系的基本数学形式. 极限则动态的刻画了变量的运动和演进的变化趋势，是深入研究函数的重要方法. 本章在初等数学的基础上进一步介绍函数、极限、连续等知识，为以后内容的学习奠定必要的基础.

第一节 函 数

一、函数的概念

事物的发展和变化，本质上是量的演变. 如果在所考虑的问题或过程中，一个量始终保持同一数值，例如圆周率π，这样的量称为**常量**（constant）. 如果在研究范围内，一个量可以有不同的数值，这样的量称为**变量**（variable）. 儿童服药的剂量可能取决于儿童的体重，如果治疗时间较短，该儿童体重可视为常量；若此疗程长达数年，其体重就是一个变量，因此，一般可以把常量看成特殊的变量.

定义 1.1 设 x 和 y 是同一过程中的两个变量，如果对于变量 x 的每一个允许的取值，按照一定的对应法则 f，变量 y 总有一个确定的值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的**函数**（function），变量 x 称为**自变量**（independent variable），变量 y 称为**因变量**（dependent variable），f 称为**对应规律**，记为

$$y = f(x), \quad x \in D$$

D是自变量 x 的所有允许值的集合，称为函数的**定义域**（domain of definition）. 而因变量 y 的所有对应值的集合称为函数的**值域**（range），记为 R.

从函数的定义可知，函数的定义域和对应法则是决定函数的主要因素，当它们确定以后，函数的值域也就相应的确定了.

在数学中，通常不考虑函数的实际意义，而抽象地用算式表达函数，我们约定函数的定义域就是使函数有意义的自变量取值的全体构成的集合.

例 1.1 确定下列函数的定义域.

（1） $y = \sqrt{x^2 - 1} + \dfrac{2}{x-1}$；

（2）$y=\ln(\frac{1-x}{3})$.

解 显然要求函数的定义域，只需求出使函数有意义的 x 的取值范围即可.

（1）要使函数有意义，必有

$$\begin{cases} x^2-1\geqslant 0 \\ x-1\neq 0 \end{cases}$$

解此不等式得 $x>1$ 或 $x\leqslant -1$，所以该函数的定义域可表示为

$$(-\infty,\ -1]\cup(1,\ +\infty)$$

（2）要使函数有意义，必有 $\frac{1-x}{3}>0$，所以该函数的定义域可表示为 $(-\infty,\ 1)$.

在实际问题中，求函数的定义域要注意其实际意义.

例 1.2 在自由落体运动中，设物体下落的时间为 t，下落的高度为 h，运动规律为 $s=0.5gt^2$，其中 g 为重力加速度，求函数 s 的定义域.

解 从抽象的算式看，t 可以取一切实数值，但考虑到实际意义，显然应有

$$t\geqslant 0 \text{ 且 } 0\leqslant s\leqslant h\text{，而 } t=\sqrt{\frac{2s}{g}}$$

故定义域为 $\left[0,\ \sqrt{\frac{2h}{g}}\right]$.

函数的表达方式通常有公式法、图像法和表格法，甚至可以用一段文字来表述.

例 1.3 2003 年中国非典型肺炎（SARS）流行时，感染人数随时间变化的规律通过实际观测的数据表示，我们用最引人关注的时间段里公布的全国疫情报告中的8组数据来反映新增病例数 N 与时间 t 的关系，表格表示法见表 1–1.

表 1–1 2003 年全国 SARS 流行高峰期新增病例报告

报告日期（月 / 日）	4/28	5/1	5/4	5/7	5/9	5/12	5/15	5/17
标示时间 (t_i)	1	4	7	10	12	15	18	20
新增例数 (N_i)	206	187	163	159	118	75	52	28

将表 1–1 中的数据 $(t_i,\ N_i)$ 以描点的形式标记在坐标平面上，然后用光滑的曲线连接这些点. 则此曲线 $N=N(t)$ 也表示这个时间段全国新增病例数 N 与时间 t 的关系，此为图像表示法，如图 1–1 所示.

当然，还可以用解析式法表示 N 与时间 t 的关系. 由于影响新增病例数 N 的因素很多，绝非一个时间变量 t 所能完全确定的，故 $N=N(t)$ 这类解析式只能近似模拟这种关系，例如用 $N(t)=\alpha+\beta t^{\gamma}$ 来拟合这一关系，这里 α、β、γ 均为常数，在流行病学中有具体含义.

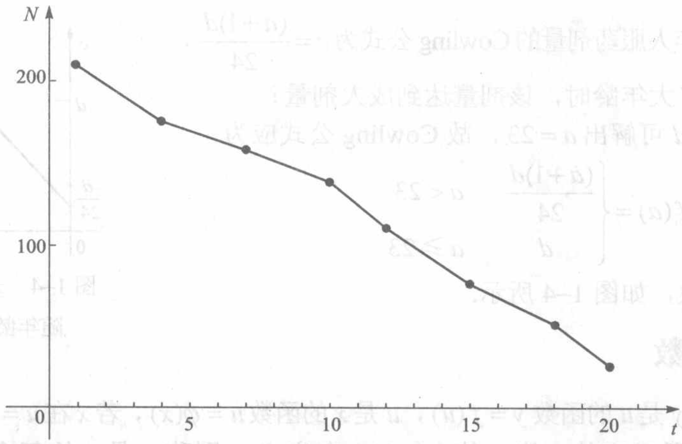


图 1–1　N-t 关系图像表示

二、分段函数

在生物、医学和工程技术等应用中，经常遇到一类函数，当自变量在不同范围内取值时，其表达式也不同，这类函数就是**分段函数**（piecewise function）. 历史上最著名的 Dirichlet 函数就是一个分段函数：

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\text{是无理数}\\ 1 & x\text{是有理数}\end{cases}$$

例 1.4　设 x 为任意实数，不超过 x 的最大整数简称为**取整函数**，无理数记为 $f(x)=[x]$. 例如 $[\pi]=3$，$[\sqrt{3}]=1$，$\left[\dfrac{2}{5}\right]=0$，$\left[-\dfrac{2}{5}\right]=-1$，取整函数的定义域是 $(-\infty, +\infty)$，值域是整数集 **Z**，这是一个分段函数，它的图形是阶梯状的，如图 1–2 所示.

例 1.5　在生理学研究中，血液中胰岛素浓度 $c(t)$（单位：mL）随时间 t（min）变化的经验公式为

$$c(t)=\begin{cases}t(10-t) & 0\leqslant t\leqslant 5\\ 25\mathrm{e}^{-k(t-5)} & t>5\end{cases}$$

式中 k 为常数，这是一个分段函数，如图 1–3 所示.

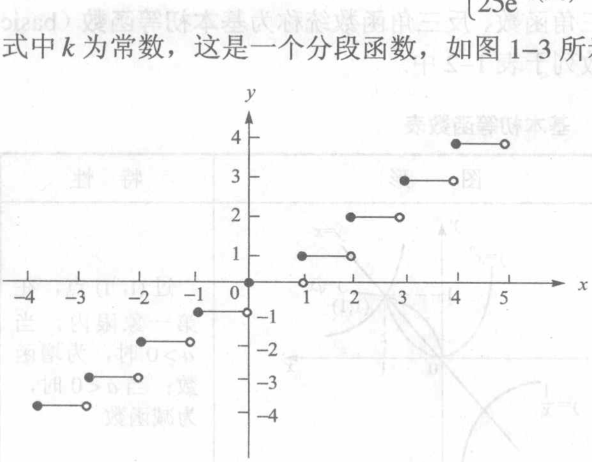


图 1–2　取整函数的图形

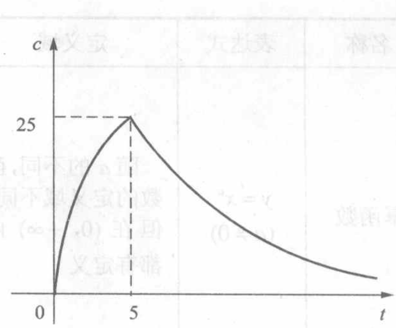


图 1–3　血液中胰岛素浓度随时间变化的图形

例 1.6 未成年人服药剂量的 Cowling 公式为 $c=\dfrac{(a+1)d}{24}$，根据此公式，到多大年龄时，该剂量达到成人剂量？

显然，令 $c=d$ 可解出 $a=23$，故 Cowling 公式应为

$$f(a)=\begin{cases}\dfrac{(a+1)d}{24} & a<23\\ d & a\geqslant 23\end{cases}$$

这是一个分段函数，如图 1–4 所示.

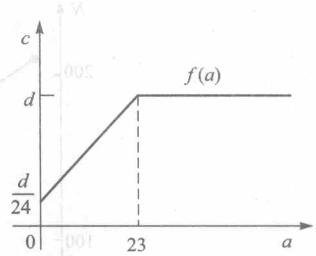


图 1–4 未成年人服药剂量随年龄变化的图形

三、复合函数

定义 1.2 设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，u 是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，若 x 在 $u=\varphi(x)$ 的定义域或其子域上取值时，所对应的 u 值，使 $y=f(u)$ 有定义，则称 y 是 x 的**复合函数**（compound function），记为 $y=f[\varphi(x)]$，其中 u 称为**中间变量**（intermediate variable）.

例 1.7 求由 $y=\mathrm{e}^u$，$u=v+\sin v$，$v=1-2x$ 构成的复合函数.

解 u 是 y 的中间变量，v 是 u 的中间变量，依次代入可得 $y=\mathrm{e}^{1-2x+\sin(1-2x)}$

例 1.8 求由函数 $y=u^3$ 和 $u=\sin x$ 构成的复合函数和由函数 $y=\sin u$ 和 $u=x^3$ 构成的复合函数.

解 ① 由函数 $y=u^3$ 和 $u=\sin x$ 构成的复合函数是

$$y=(\sin x)^3$$

② 由函数 $y=\sin u$ 和 $u=x^3$ 构成的复合函数是

$$y=\sin x^3$$

例 1.9 试分解复合函数 $y=\mathrm{e}^{\arcsin 3x}$.

解 该复合函数显然是由 $y=\mathrm{e}^u$，$u=\arcsin v$ 和 $v=3x$ 复合而成.

例 1.10 试分解复合函数 $y=\lg[\tan(x^2+\arcsin x)]$.

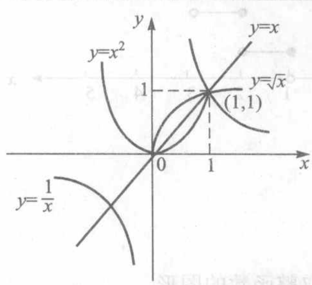
解 该复合函数做如下分解：$y=\lg u$，$u=\tan v$，$v=x^2+\arcsin x$.

四、初等函数

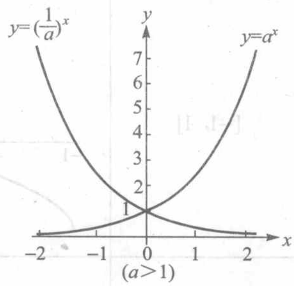
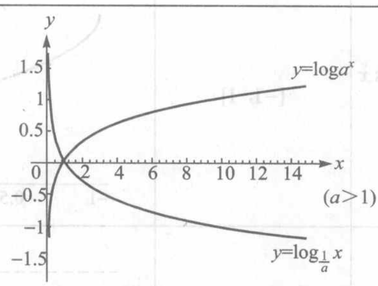
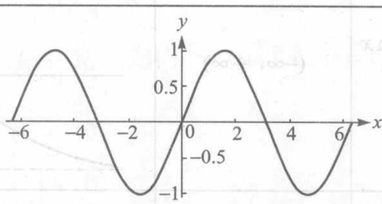
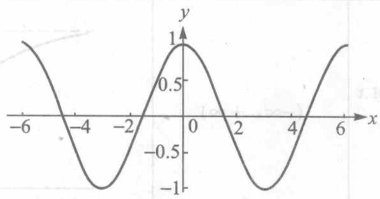
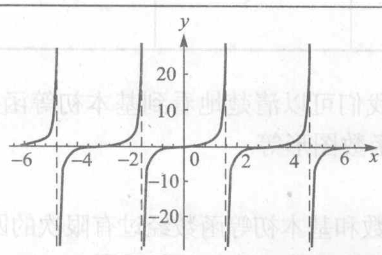
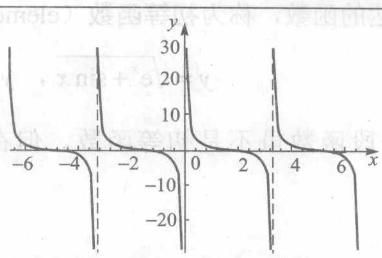
1. 基本初等函数

通常把幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为**基本初等函数**（basic elementary function）. 现将五种基本初等函数列于表 1–2 中.

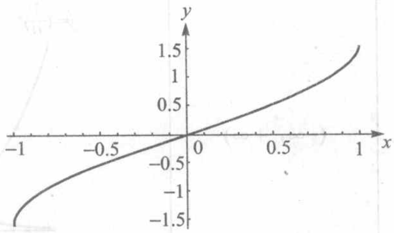
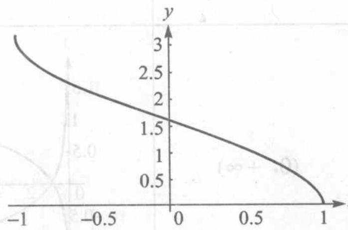
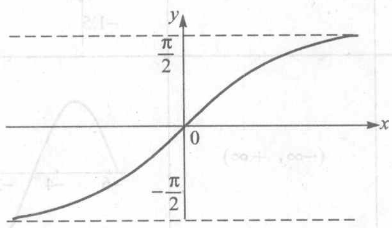
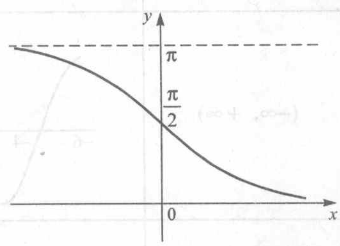
表 1–2 基本初等函数表

名称	表达式	定义域	图形	特性
幂函数	$y=x^a$ $(a\neq 0)$	随 a 的不同，函数的定义域不同，但在 $(0,+\infty)$ 内都有定义		过 (1, 1) 点，在第一象限内，当 $a>0$ 时，为增函数；当 $a<0$ 时，为减函数

续表

名称	表达式	定义域	图形	特性
指数函数	$y=a^x$ $(a>0$ 且$a\neq1)$	$(-\infty,+\infty)$		图像在 x 轴上方，且过点 $(0,1)$，当 $0<a<1$ 时为减函数；当 $a>1$ 时为增函数
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>0$ 且$a\neq1)$	$(0,+\infty)$		图像在 y 轴右侧，且过点 $(1,0)$，当 $0<a<1$ 时，为减函数；当 $a>1$ 时，为增函数
三角函数 正弦函数	$y=\sin x$	$(-\infty,+\infty)$		以 2π 为周期，为奇函数，$\lvert\sin x\rvert\leqslant1$
三角函数 余弦函数	$y=\cos x$	$(-\infty,+\infty)$		以 2π 为周期，为偶函数，$\lvert\cos x\rvert\leqslant1$
三角函数 正切函数	$y=\tan x$	$x\neq(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$		以 π 为周期，为奇函数，$(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$ 内为增函数
三角函数 余切函数	$y=\cot x$	$x\neq k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$		以 π 为周期，为奇函数，$(0,\pi)$ 内为减函数

续表

名称		表达式	定义域	图形	特性
反三角函数	反正弦函数	$y=\arcsin x$	$[-1, 1]$		单调增加，奇函数，值域为$\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$
	反余弦函数	$y=\arccos x$	$[-1, 1]$		单调减少，值域为$[0, \pi]$
	反正切函数	$y=\arctan x$	$(-\infty, +\infty)$		单调增加，奇函数，值域为$(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$
	反余切函数	$y=\mathrm{arc}\cot x$	$(-\infty, +\infty)$		单调减少，值域为$(0, \pi)$

从表 1–2 中，我们可以清楚地看到基本初等函数的定义域、值域、有界性、奇偶性、单调性、周期性及其函数图形等.

2. 初等函数

定义 1.3 由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合运算所构成的仅用一个解析式表达的函数，称为**初等函数**（elementary function）. 如

$$y=\sqrt{e^x+\sin x}, \quad y=\frac{a^x+1}{a^x-1}$$

都是初等函数；分段函数虽不是初等函数，但在不同段内的表达式，通常用初等函数表示.

第二节 极 限

一、极限的概念

对于函数 $y=f(x)$，在自变量的某个变化过程中（如 $|x|$ 无限增大即 $x\to\infty$ 的过程或 x 无限接近于某一个常数即 $x\to x_0$ 的过程），如果对应的函数值无限的接近于某一个常数，那么这个常数叫做在自变量的这一变化过程中函数的极限，这个极限是由自变量的变化过程所决定的. 函数的极限主要研究以下两种情形：

1. $x\to\infty$ 时函数的极限

当自变量 x 的绝对值无限增大时，若函数 $f(x)$ 无限的趋近于一个常数 A，则称 A 为 $f(x)$ 在 x 趋向于无穷大时的极限.

定义 1.4 若自变量 x 的绝对值无限增大时，函数 $f(x)$ 都趋近于常数 A，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限（limit），记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to\infty)$$

从几何意义上看，表示随着 x 的绝对值的增大，曲线 $f(x)$ 与直线 $y=A$ 越来越接近，即对于任意的 $\varepsilon>0$，无论直线 $y=A+\varepsilon$ 和 $y=A-\varepsilon$ 所夹的条形区域多么窄，只要 x 离原点足够远，即 $|x|>M$，函数 $f(x)$ 的图形都在这个条形区域内，如图 1–5 所示.

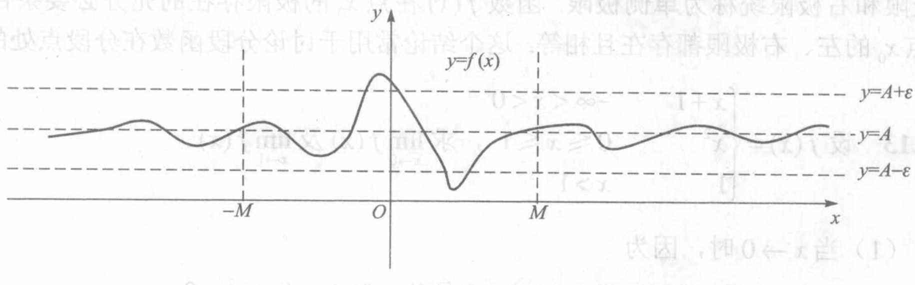


图 1–5 $x\to\infty$ 时函数极限的几何意义

如果仅考虑 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$，那么可以类似地定义 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$.

例 1.11 从几何意义上可知下列等式成立.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0,\quad \lim_{x\to\infty}e^{-x^2}=0,\quad \lim_{x\to-\infty}3^x=0,\quad \lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$$

2. $x\to x_0$ 时函数的极限

定义 1.5 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义（在 x_0 点可以没有定义），若当 x 无论以怎样的方式趋近于 x_0 时，函数 $f(x)$ 都趋近于常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to x_0)$$

注 （1）这里 $x\to x_0$ 的方式是任意的；

（2）函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限是否存在与函数在 x_0 点是否有定义无关.

反映在几何上，这个定义对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，无论直线 $y = A + \varepsilon$ 和 $y = A - \varepsilon$ 所夹的条形区域多么窄，总能找到 x 的一个区域 $(x_0 - \delta,\ x_0) \cup (x_0,\ x_0 + \delta)$，当 x 在这个区域内取值时，$f(x)$ 满足不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad 即 \quad A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$$

即在 x_0 的空心邻域 $\mathring{U}(x_0,\ \delta)$ 内 $f(x)$ 的值全部落在如图 1–6 所示横条形区域内.

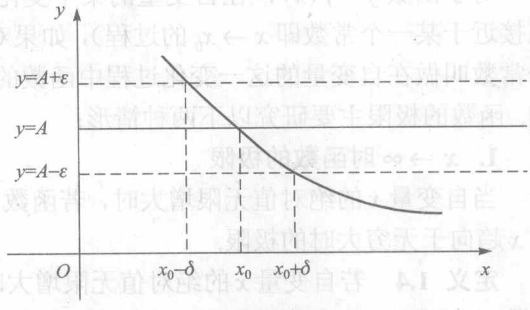


图 1–6　$x \to x_0$ 时函数极限的几何意义

例 1.12　由定义及几何意义知，$\lim\limits_{x \to 1}(2x - 1) = 1$.

可以看出，上述 x 以任意方式趋近于 x_0 的过程包括 x 从 x_0 的左侧趋向于 x_0 和从 x_0 的右侧趋向于 x_0 这两种情况. 当 x 从 x_0 的左侧趋向于 x_0 时，函数 $f(x)$ 趋近于常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的**左极限**（left-hand limit），记为 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$ 或 $f(x) \to A(x \to x_0^-)$ 或 $f(x_0 - 0) = A$；同样当 x 从 x_0 的右侧趋向于 x_0 时，函数 $f(x)$ 趋近于常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的**右极限**（right-hand limit），记为 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$ 或 $f(x) \to A(x \to x_0^+)$ 或 $f(x_0 + 0) = A$.

左极限和右极限统称为**单侧极限**. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 的极限存在的充分必要条件为函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左、右极限都存在且相等. 这个结论常用于讨论分段函数在分段点处的极限.

例 1.13　设 $f(x) = \begin{cases} x+1 & -\infty < x < 0 \\ x^2 & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$，求 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 及 $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

解　（1）当 $x \to 0$ 时，因为

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-}(x+1) = 1 \text{ 且 } \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^2 = 0$$

即

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1 \neq 0 = \lim_{x \to 0^+} f(x)$$

所以 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 不存在.

（2）当 $x \to 1$ 时，因为

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 = 1 \text{ 且 } \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 1 = 1$$

即

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 = \lim_{x \to 1^+} f(x)$$

所以 $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$.

3. 极限存在的判别准则

不加证明的给出下列定理.

定理 1.1　（**夹逼定理**）在同一极限过程中，若三个函数 $f(x)$、$g(x)$ 和 $h(x)$ 之间满足 $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ 且 $\lim g(x) = \lim h(x) = A$，则

$$\lim f(x)=A.$$

定理1.2 （单调有界数列必有极限）若数列$\{x_n\}$单调并且有界，则$\{x_n\}$一定有极限，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

二、极限的四则运算

定理 1.3 若$\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则有

（1）$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$；

（2）$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$；

特别地，当c、k为常数时，有$\lim[cf(x)]=c\lim f(x)$，$\lim[f(x)]^k=[\lim f(x)]^k$；

（3）$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}\ (B\neq 0)$；

该定理对数列的极限也是成立的，该定理中x的变化趋势应为同一个变化趋势.

例 1.14 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-1}{x^2-2}$.

解 $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-1}{x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}}=\frac{2+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}{1-2\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}=\frac{2+0-0}{1-0}=2.$$

例 1.15 求$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x+1}$.

解 $$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}(x-1)=\lim_{x\to -1}x-1=-2.$$

例 1.16 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{x^3+x+2}$.

解 $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^3+x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}}=\frac{0}{1}=0.$$

三、两个重要极限

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

例 1.17 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}=5\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=5\times 1=5.$$

例 1.18 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\cos x}=1\times\frac{1}{1}=1.$$

例 1.19 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{4(\dfrac{x}{2})^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}})^2=\dfrac{1}{2}(\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}})^2=\dfrac{1}{2}\times1^2=\dfrac{1}{2}$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=\mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

用这个重要极限求极限实际是求在某个极限过程中$(1+无穷小)^{无穷大}$的极限，但无穷大与无穷小的表达式应互为倒数.

例 1.20 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{2}{x})^{3x}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{2}{x})^{3x}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{2}{-x})^{3x}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{\dfrac{-x}{2}})^{\frac{-x}{2}\cdot(-6)}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[(1+\dfrac{1}{\dfrac{-x}{2}})^{\frac{-x}{2}}\right]^{-6}$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{\frac{-x}{2}})^{\frac{-x}{2}}\right]^{-6}=\mathrm{e}^{-6}.$$

例 1.21 求 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\ln(x-3)}{x^2-9}$.

解 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\ln(x-3)}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\ln(x-3)}{x-3}\cdot\lim\limits_{x\to3}\dfrac{1}{x+3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\ln(x-3)}{x-3}\cdot\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to3}(x+3)}$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to3}\frac{\ln(x-3)}{x-3}=\frac{1}{6}\lim_{x\to3}\frac{1}{x-3}\ln(x-3)=\frac{1}{6}\lim_{x\to3}\ln(x-3)^{\frac{1}{x-3}}$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to3}\ln[1+(x-3)]^{\frac{1}{x-3}}=\frac{1}{6}\ln\left\{\lim_{x\to3}[1+(x-3)]^{\frac{1}{x-3}}\right\}=\frac{1}{6}\ln\mathrm{e}=\frac{1}{6}.$$

例 1.22 当 Apollo 13 登月失败返回地球时，空气净化器出现故障，三名宇航员利用身上的衣袜等纤维制品填充了一个长 30 cm 的圆柱形容器，抽动空气来吸收CO_2，空气中的CO_2浓度为 8%时，在容器内通过 10 cm 厚度后浓度可降至 2%. 要求出口处的CO_2浓度为 1%，吸收层厚度至少为多少？

解 假设气流每通过相同厚度的Δx便有相等比例的CO_2被吸收. 将厚度x分成n等份，每一份上CO_2的吸收量与$\dfrac{x}{n}$成正比，比例系数为k. 在$x=0$处CO_2的量为M_0，则经过n层后为$M_0(1-\dfrac{kx}{n})^n$，要让每层的厚度尽可能的小并趋于零，只要$n\to\infty$，则经过x层后CO_2的量为

$$M(x)=\lim_{n\to\infty}M_0(1-\frac{kx}{n})^n=M_0\left[\lim_{n\to\infty}(1-\frac{kx}{n})^{-\frac{n}{kx}}\right]^{-kx}=M_0\mathrm{e}^{-kx}$$

当$x=10$时，CO_2浓度从 8%降至 2%，即初始浓度的$\dfrac{1}{4}$，这就是