ADVANCES IN THEORY AND APPLICATIONS OF RANDOM VIBRATION

随机振动理论与应用新进展

主 编 李 杰 陈建兵

同濟大學出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

随机振动理论与应用新进展

主编　李　杰　陈建兵

同濟大學出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

随着现代试验与计算技术的迅速发展，随机振动理论在土木、机械、航空航天、船舶和海洋工程等领域获得了日益广泛的应用.近20年来，我国在随机振动领域作出了多项具有国际影响的突破性成果，包括虚拟激励法、复模态理论、FPK方程的哈密顿理论体系和非线性随机系统的密度演化理论等方面的贡献.本书是中国振动工程学会随机振动专业委员会组织编撰的、拟每四年出版一次的《随机振动理论与应用新进展》系列文献性文集的第一辑.论文分别由我国作出上述突破性成果的学者和活跃在随机振动领域的骨干专家撰写，较全面地反映了随机振动理论与应用的新进展.

本书可供土木、机械、航空航天和海洋工程等专业的教师、研究人员、研究生和高年级大学生阅读.

图书在版编目(CIP)数据

随机振动理论与应用新进展/李杰，陈建兵主编.—上海：同济大学出版社，2009.4

ISBN 978-7-5608-3988-2

Ⅰ.随…　Ⅱ.①李…　②陈…　Ⅲ.随机振动　Ⅳ.O324

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第037020号

随机振动理论与应用新进展

主编　李　杰　陈建兵

责任编辑　曹　建　　责任校对　杨江淮　　封面设计　潘向蓁

出版发行　同济大学出版社　　www.tongjipress.com.cn

(地址：上海市四平路1239号　邮编：200092　电话：021-65985622)

经　　销　全国各地新华书店

印　　刷　江苏句容市排印厂

开　　本　787mm×1 092mm　1/16

印　　张　18.5

印　　数　1—800

字　　数　462 000

版　　次　2009年4月第1版　　2009年4月第1次印刷

书　　号　ISBN 978-7-5608-3988-2

定　　价　98.00元

我国随机振动研究的重要新进展

（代序）

我们的世界充满着不确定性.在工程领域,这种不确定性一是来源于环境载荷,如风、浪、地震和地面轨道不平顺等的不确定性,使得结构响应过程不确定,从而也带来损伤机理和可靠性评判等一系列问题;另一来源是结构参数的不确定性,有些参数本身不易精确确定或在其结构生命周期中发生变化,在空间分布出现了随机性;此外,还可能来源于结构的非线性,使得系统的动力学过程因其内在的随机性而产生不能准确预测的分岔和混沌过程(在其数字特征上表现为各态历经的随机过程).从20世纪的中叶开始,在工程力学领域,将概率论与振动领域的力学问题相结合,已经发展出一门重要的学科分支——随机振动.

中国学者在随机振动领域的研究,从20世纪60年代就开始了,几十年来一直非常活跃.特别是近十多年间,与我国大规模基础建设、制造业和国防装备建设相适应,更取得了非常可喜的进展和成就,在世界范围内已经和正在发挥重要影响.这些贡献的重要标志是:

(1) 在理论方面,朱位秋院士和他的团队提出与发展了随机激励的耗散的哈密顿系统理论,包括高斯白噪声激励下耗散的哈密顿系统的五类精确平稳解与等效非线性系统法,拟哈密顿系统随机平均法,拟哈密顿系统的随机稳定性、随机分岔、首次穿越及非线性随机最优控制理论方法.上述研究成果构成了一个非线性随机动力学与控制的哈密顿理论体系,为解决多自由度强非线性系统的随机动力学与控制这个极为困难的问题提供了一系列崭新而有效的理论基础.我们知道,工程力学很大程度上是基于拉格朗日分析力学发展而来的,随机振动理论也是如此,发展至今,已显示出其一定的局限性,现在将理论构架转换到哈密顿理论体系,大大改善了其对称性和适应性(如对多变量变分和保辛),自有它的合理性和广阔的发展应用前景.本文集上篇,特别邀请朱位秋先生作了专题进展综述.

理论方面的另一重要成果是由李杰教授和他的团队给出的.他们将注意力再次转向随机振动理论的物理本源,阐明了概率密度演化与系统物理演化的内在联系,即:系统物理演化构成概率密度演化的内在机制.在此基础上,结合概率守恒原理的两类描述与系统状态的物理演化方程,重新推导了经典的概率密度演化方程,进一步阐明了这些方程的物理意义.对非线性结构随机反应、结构动力可靠度和控制系统概率密度演化的分析,展示了概率密度演化理论广阔的应用前景.同时,将动力激励的物理背景引入到随机系统研究中来,建立基于物理的风、浪、地震等激励的随机过程(场)模型,将有助于解决随机动力系统研究中的一系列难题.

(2) 在工程应用方面,以林家浩教授为首的团队十几年来一直致力于大规模结构的随机振动响应计算,提出了虚拟激励算法,为解决大规模复杂系统的随机响应和可靠性分析开辟了广阔的道路.随机振动理论在其约半个世纪的发展历史中已经产生了丰厚的积淀,也出版了很多专著.但是,时至今日,这门技术性学科的丰富成果在工程中的应用还相当有限.很多工程技术人员对此学科感到莫测高深,甚至敬而远之.究其原因,一个长期未能逾越的瓶颈就是现有分析方法的复杂低效,所以难于被工程师接受.

经过多年的努力，我国随机振动学者林家浩先生等人独辟蹊径，从不确定性激励过程的能量随频率的分布(功率谱)出发，结合时域快速积分和大型结构空间离散技术，提出了虚拟激励算法，为随机振动理论和计算方法作出了令人兴奋的贡献，不但对多点激励平稳随机振动方程提出了高效精确的求解方法，而且将虚拟激励法与精细积分法相结合，使得更为困难的非平稳随机振动问题也可以高效精确地解决.在获得微分方程均方解的同时，对复杂结构而言，计算效率比应用常规方法可以提高达2～4个数量级.现在，这一方法在我国已被广泛地应用于大坝、桥梁、空间大跨度结构、高层建筑、海洋平台和车辆工程等很多领域中.根据迄今在网上检索到的中外文献资料，凡计算规模在几千或几万自由度的复杂结构随机振动计算，都是借助于虚拟激励法实现的.在这方面，中国学者可以说已经走到了国际上该领域的最前列.

虚拟激励法首先在中国发展出来和快速地得到日益广泛的应用不是偶然的，它看似简单，出发点只是在基本方程中作了一次参数的转换，但已经满足了经典的随机振动均方解的表达.这里的“虚拟”不是真的虚拟，而是与随机激励过程的能量结构(谱密度)紧紧地联系在一起了.如果说真理是简单的，从哲学的宏观上考察，这是非常巧妙的出发点.虚拟激励法还有一个重要的准备条件，就是时域精细积分法的提出和应用，这也是以钟万勰先生为代表的中国科学家在数值积分方法中的重要贡献，它对相当多的微分方程的积分可以取得计算机精度意义上的精确解，而且非常快速.虚拟激励法的提出和应用还有另外一个重要的基础，就是以有限元方法为代表的对确定性结构的离散化建模的成熟，使得这一方法对大规模结构随机响应计算成为可以实现的工程计算方法.虚拟激励法在国际上已经得到承认，进入了美国CRC出版社2005年出版的《振动与冲击手册》.

随机分岔和混沌也是我国学者很活跃的研究领域，这方面的研究通常只限于一两个自由度的系统，最近郑兆昌先生提出的要在共振频率附近考虑非线性分岔和混沌现象，可以为此打开一些思路.我们知道，混沌理论的数学基础是分形几何，而分形几何的自相似恰恰也表达了它的不确定性，这正是科学研究特别是随机振动研究的魅力所在.本文集邀请方同先生对此领域的进展作了综述.

科学家从未停止过对不确定过程的研究，随机振动学科诞生半个多世纪以来，寻求确定性或随机结构，特别是大型工程结构对随机激励的响应计算和可靠性评价的研究一直没有停止.现在，我国相当数量的学者已经或正在做更深入和更多的应用研究，这是与我国正在进行的大规模的基础建设相适应的，是我国科学工作者密切结合工程实际的行动.这本论文集所反映的内容，正是中国科学工作者的贡献.

随机振动专业委员会自1986年成立以来，在欧阳怡、庄表中、郑万泔等老一辈学者的带领下，紧密地结合我国的工程实际，作出了很大的成绩.例如，在2007年冬天南方冻雪灾害和2008年汶川大地震之后，许多学者在高压输电塔和工程结构抗震方面就进行了积极的研究.我国学者对我国大型桥梁和高层建筑结构抗风抗震的研究是非常切合工程实际的.本文集虽然只是收入很少的文章，但也可见其一斑.

相信在未来的岁月里，我们将团结广大在此领域研究的学者和年轻一代为国家经济发展和科学事业做出更大的成绩.是为序.

中国振动工程学会随机振动专业委员会第五届

委员会理事长　暨南大学教授　张森文

2008年12月25日

目　录

上篇　专题进展综述

非线性随机动力学与控制的哈密顿理论体系及其应用*

朱位秋

（浙江大学力学系，杭州 310027）

摘 要 本文主要介绍近十几年来在非线性随机动力学与控制哈密顿理论体系方面的研究成果，包括高斯白噪声激励下耗散的哈密顿系统的精确平稳解与等效非线性系统法，拟哈密顿系统随机平均法，拟哈密顿系统的随机稳定性、随机分岔、首次穿越及非线性随机最优控制理论方法，同时也简要介绍与之相关的非线性随机动力学的一般发展，并指出若干今后有待进一步研究的问题.

关键词 随机动力学 哈密顿系统 精确平稳解 等效非线性系统法 随机最优控制

Nonlinear Stochastic Dynamics and Control in Hamiltonian Formulation and Its Applications

Zhu Weiqiu

(Department of Mechanics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

Abstract The significant advances in nonlinear stochastic dynamics and control in Hamiltonian formulation during the past decade are reviewed. The exact stationary solutions and equivalent nonlinear system method of Gaussian-white-noises excited and dissipated Hamiltonian systems, the stochastic averaging method for quasi Hamiltonian systems, the stochastic stability, stochastic bifurcation, first-passage time and nonlinear stochastic optimal control of quasi Hamiltonian systems are summarized. The related advances of nonlinear stochastic dynamics are also outlined. Possible extension and applications of the theory are pointed out.

Key words Stochastic dynamics; Hamiltonian system; exact stationary solution; equivalent nonlinear system method; stochastic optimal control

1 引 言

随机动力学源于一个世纪前对布朗运动定量描述的研究. 20 世纪四五十年代，先后发

* 本文是在发表于 ASME Applied Mechanics Reviews, July 2006, 59:230-248 的 Nonlinear stochastic dynamics and control in Hamiltonian formulation 与发表于马兴瑞主编《动力学、振动与控制新进展》(北京，中国宇航出版社，2006)一书中“非线性随机动力学与控制的哈密顿理论体系”的基础上补充修改而成. 感谢吴禹博士协助补充修改. 本文得到国家自然科学基金项目 10772159 的资助.

展了通信工程中的随机噪声理论，航空航天与机械等工程中的随机振动，土木与海洋等工程中的随机结构动力学. 自 20 世纪 60 年代开始，理论研究主要转向非线性系统的随机响应、随机稳定性及随机最优控制. 虽然在这些方面也已取得很大的进步[1-23]，但在多自由度强非线性系统的随机动力学与控制方面进展甚微.

过去十几年中，本人与其合作者将非线性随机动力学系统表为随机激励的耗散的哈密顿系统，并按相应哈密顿系统的可积性与共振性将系统分成不可积、可积非共振、可积共振、部分可积非共振、部分可积共振五类，提出与发展了随机激励的耗散的哈密顿系统理论，包括高斯白噪声激励下耗散的哈密顿系统的五类精确平稳解与等效非线性系统法，拟哈密顿系统随机平均法，拟哈密顿系统的随机稳定性、随机分岔、首次穿越及非线性随机最优控制理论方法. 上述研究成果构成了一个非线性随机动力学与控制的哈密顿理论体系，为解决多自由度强非线性系统的随机动力学与控制这个极为困难的问题提供了一系列崭新而有效的理论方法[24]，本文中理论方法也适用于拟线性系统与线性系统. 本文着重介绍这方面的研究成果.

2 非线性随机动力学系统的哈密顿提法和分类

一个 n 自由度受控的非线性随机动力学系统可用下述 n 对方程描述：

$$\begin{aligned} \dot{Q}_i &= \frac{\partial H}{\partial P_i}, \\ \dot{P}_i &= -\frac{\partial H}{\partial Q_i} - c_{ij}\frac{\partial H}{\partial P_j} + u_i + f_{ik}\xi_k(t), \\ & i,\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n;\quad k = 1,\ 2,\ \cdots,\ m. \end{aligned} \tag{1}$$

式中，Q_i，P_i 分别为广义位移与广义动量 $\boldsymbol{Q} = [Q_1,\ Q_2,\ \cdots,\ Q_n]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{P} = [P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_n]^{\mathrm{T}}$；$H = H(\boldsymbol{Q},\ \boldsymbol{P})$ 为具有连续偏导数的哈密顿函数；$c_{ij} = c_{ij}(\boldsymbol{Q},\ \boldsymbol{P})$ 表示拟线性阻尼系数；$f_{ik} = f_{ik}(\boldsymbol{Q},\ \boldsymbol{P})$ 表示随机激励幅值；$\xi_k(t)$ 为随机过程，特殊情形下，包括概周期、周期或谐和函数；$u_i = u_i(\boldsymbol{Q},\ \boldsymbol{P})$ 表示反馈控制力. 式(1)所描述的系统为受控的、随机激励的、耗散的哈密顿系统. 注意，本文中采用了 Einstein 求和规则.

系统(1)的核心是相应的哈密顿系统，它可用下列哈密顿方程描述：

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i},\quad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n. \tag{2}$$

此处假定哈密顿系统是自治的，用哈密顿函数 $H = H(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{p})$ 表征. 对机械 / 结构系统，哈密顿函数表示系统的总能量，它在系统运动过程中守恒. 一个动力学量 $H_i = H_i(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{p})$ 称为首次积分(运动积分，或守恒量)，若 $[H_i,\ H] = 0$；两个首次积分 H_i 与 H_j 称为对合，若 $[H_i,\ H_j] = 0$，其中

$$[H_i,\ H_j] = \frac{\partial H_i}{\partial p_k}\frac{\partial H_j}{\partial q_k} - \frac{\partial H_i}{\partial q_k}\frac{\partial H_j}{\partial p_k},\quad i,\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ r;\ k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{3}$$

为 H_i 和 H_j 的泊松括号. 哈密顿系统可按独立、对合的首次积分 $H_1(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{p}) = H(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{p})$，$H_2(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{p})$，$\cdots$，$H_r(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{p})$ 的个数进行分类[25]. 若 $r = 1$，称该哈密顿系统为不可积的；若

$r=n$，称该哈密顿系统为(完全)可积的，若 $1<r<n$，则称该哈密顿系统为部分可积的.

对可积哈密顿系统，原则上可引入作用角变量 I_i 与 θ_i，$i=1, 2, \cdots, n$. 藉此，哈密顿函数可表为 $H=H(\boldsymbol{I})$，$\boldsymbol{I}=[I_1, I_2, \cdots, I_n]^{\mathrm{T}}$. 而可积哈密顿系统的运动方程为

$$\dot{\theta}_i=\frac{\partial H(I)}{\partial I_i}=\omega_i(I), \quad \dot{I}_i=0, \; i=1, 2, \cdots, n \tag{4}$$

式中，$\omega_i(I)$ 为该哈密顿系统的 n 个频率. 方程(4)的解为

$$I_i=\text{const}, \quad \theta_i=\omega_i(\boldsymbol{I})t+\delta_i, \quad i=1, 2, \cdots, n. \tag{5}$$

式中，δ_i 为积分常数. 注意，作用角变量为全局变量，方程(4)与(5)适用于整个相空间，这一点对研究多自由度强非线性系统的随机动力学很重要.

一个可积哈密顿系统称为共振的，若至少存在一个如下的共振关系：

$$k_i^u\omega_i(\boldsymbol{I})=0, \quad i=1, 2, \cdots, n; \; u=1, 2, \cdots, \alpha, \tag{6}$$

式中，k_i^u 为整数，对固定的 u 不全为零；否则，可积哈密顿系统称为非共振的.

部分可积哈密顿系统这一概念乃由作者为研究随机激励的耗散的哈密顿系统而引入的. 原则上，一个部分可积哈密顿系统可用正则变换变成一个由一个可积与一个不可积哈密顿子系统组成的系统，前者具有首次积分 $H_1(q_1, p_1)$，$H_2(q_2, p_2)$，$\cdots$，$H_{r-1}(q_{r-1}, p_{r-1})$，或 $H_1(I_1)$，$H_2(I_2)$，$\cdots$，$H_{r-1}(I_{r-1})$，后者的哈密顿函数为 $H_r(q_r, \cdots, q_n; p_r, \cdots, p_n)$. 因此，一个部分可积哈密顿系统也可是非共振或共振的，取决于可积哈密顿子系统是共振的还是非共振的.

于是，按其可积性与共振性，哈密顿系统又可分成五类：不可积、可积非共振、可积共振、部分可积非共振、部分可积共振. 不同类的哈密顿系统的性态是不同的，例如，可积非共振哈密顿系统的运动是概周期的，单个轨线最终均匀覆盖 n 维环面. 不可积哈密顿系统在能量达到一定值后运动是混沌的，并在 $2n-1$ 维等能量椭球面上遍历.

迄今，尚无识别哈密顿系统是否可积的一般方法，但有一些识别特殊类型哈密顿系统可积性的方法，如 Hamilton-Jacobi 法[26, 27]，Lax 对法[26, 27]，Painlevé 奇性分析法[25, 28]，Whittaker 可积势[29]，Poincare 映射法[30].

方程(1)所描述的受控的、随机激励的耗散的哈密顿系统也可按其相应哈密顿系统的可积性与共振性分成五类. 这一分类极为重要，因为已证明系统的精确与近似平稳解的泛函形式取决于相应哈密顿系统的可积性与共振性. 应指出，非线性随机动力学系统的哈密顿提法最早由 Fuller[31]给出，也曾为 Soize[7]与 Zhu 等[32, 33]用于得到精确平稳解，但他们没有对系统按可积性与共振性进行分类，因此，他们只能得到能量等分的精确平稳解，而得不到能量非等分的精确平稳解.

上述哈密顿系统都是有限偶数维的，常称为经典哈密顿系统. 然而，许多学科中的保守系统是奇数维或无穷维的. 为使哈密顿系统理论应用于这些情形，提出了广义哈密顿系统概念. 此外，具有某些对称性的经典哈密顿系统可约化为较低维数的广义哈密顿系统，例如，三自由度刚体定点运动的 Euler 情形可约化为三维广义哈密顿系统. 自 20 世纪 50 年代以来，广义哈密顿系统理论已取得重要进展，此处只考虑有限维广义哈密顿系统.

以 $x=[x_1, x_2, \cdots, x_m]^{\mathrm{T}}$ 表示状态变量. 一个 m 维广义哈密顿系统可用如下方程描述：

$$\dot{x}_i = [x_i, H] = J_{ij}(x) \frac{\partial H(x)}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, \cdots, m. \tag{7}$$

式中，$H(x)$为哈密顿函数，$[F, G]$为 F 与 G 的泊松括号

$$[F, G] = J_{ij}(x) \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial G}{\partial x_j}, \tag{8}$$

$J_{ij}(x)$为结构矩阵 $\boldsymbol{J}(x)$的元素，当它满足 Darboux 定理条件时，运动方程可化为

$$\dot{q}_r = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial q_r}, \quad \dot{z}_s = 0, \quad r = 1, 2, \cdots, n; \ s = m - 2n. \tag{9}$$

与经典哈密顿方程(2)相比，仅多了最后一个方程. z_s 常称为 Casimir 函数.

类似于经典哈密顿系统，广义哈密顿系统也可按可积性与共振性分成不可积、可积非共振、可积共振、部分可积非共振、部分可积共振五类. 各类系统的运动性态比相应各类经典哈密顿系统稍复杂，但在辛叶(z_s 为常数)上是一样的.

类似于系统(1)，可研究受控的、随机激励的、耗散的广义哈密顿系统，其运动方程形为

$$\dot{X}_i = [X_i, H] - c_{ij} \frac{\partial H}{\partial X_j} + u_i + f_{ik}\xi_k(t). \tag{10}$$

3 精确平稳解

一个动力学系统对高斯白噪声的响应是一个扩散(马尔柯夫)过程，其转移概率密度由 Fokker-Planck-Kolmogrov(FPK)方程支配. 获得随机激励的非线性动力学系统的精确平稳解的唯一途径是在适当的初边值条件下推导与求解 FPK 方程. 只有对很特殊的一维非线性系统可得 FPK 方程的精确瞬态解[34]. 对二维与高维非线性系统，只对若干类系统得到精确平稳解. 早期的精确平稳解结果可在 Fuller 的综述[31]中找到. 20 世纪 80—90 年代，在这方面取得了很多进步[7, 35-39]. 直到 90 年代初，所有得到的多自由度非线性随机系统精确平稳解都与古典统计力学中的 Maxwell-Boltzmann 分布紧密相关，都具有能量在多自由度之间等分的性质. 对随机激励的耗散的哈密顿系统，这一性质表现为平稳概率密度是哈密顿量的函数. 另一方面，多自由度线性系统在高维白噪声外激下的精确平稳解为高斯的，具有能量非等分性质. 这两类解的不一致性由在多自由度非线性随机系统的哈密顿提法中引入可积性与共振性得以克服.

考虑系统(1)的一个特殊情形，即一个耗散的哈密顿系统受高斯白噪声激励，其运动方程形为

$$\begin{aligned} \dot{Q}_i &= \frac{\partial H'}{\partial P_i}, \\ \dot{P}_i &= -\frac{\partial H'}{\partial Q_i} - c_{ij} \frac{\partial H'}{\partial P_j} + f_{ik} W_k(t), \\ & i, j = 1, 2, \cdots, n; \ k = 1, 2, \cdots, m. \end{aligned} \tag{11}$$

式中，$W_k(t)$是 Stratonovich 意义上的高斯白噪声，其相关函数为 $E[W_k(t)W_l(t+\tau)] = 2D_{kl}\delta(\tau)$. 方程(11)可改写成 Stratonovich 随机微分方程，然后加上 Wong-Zakai 修正项转

化成 Itô 随机微分方程. Wong-Zakai 修正项可分成保守与耗散两部分，并可分别与 $-\partial H'/\partial Q_i$ 和 $-c_{ij}\partial H'/\partial P_j$ 合并成有效保守力 $-\partial H/\partial Q_i$ 和有效阻尼力 $-m_{ij}\partial H/\partial P_j$. 完成这些步骤后，方程(11)变成

$$\begin{aligned} dQ_i &= \frac{\partial H}{\partial P_i}dt, \\ dP_i &= -\left(\frac{\partial H}{\partial Q_i} + m_{ij}\frac{\partial H}{\partial P_j}\right)dt + \sigma_{ik}dB_k(t), \end{aligned} \tag{12}$$

式中，$H = H(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P})$ 与 $m_{ij} = m_{ij}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P})$ 分别为变更后的哈密顿函数与阻尼系数；$B_k(t)$ 是标准 Wiener 过程；$\sigma_{ik} = \sigma_{ik}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P})$，$\boldsymbol{\sigma\sigma}^{\mathrm{T}} = 2(\boldsymbol{fDf}^{\mathrm{T}})$. 由方程(12)知，$\boldsymbol{Z} = [\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ 是一个矢量扩散过程，其转移概率密度由 FPK 方程支配. 一般得不到该 FPK 方程的精确瞬态解. 因此，此处仅考虑精确平稳解. 精确平稳概率密度由下列简化 FPK 方程支配：

$$[\rho, H] + \frac{\partial}{\partial p_i}\left(m_{ij}\frac{\partial H}{\partial p_j}\rho\right) + \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j}(b_{ij}^{(i)}\rho) = 0,. \tag{13}$$

式中，$b_{ij} = \sigma_{ik}\sigma_{jk}$，$b_{ij} = b_{ij}^{(i)} + b_{ji}^{(j)}$. 方程(13)在无穷远处无概率流的边界条件下求解.

3.1 不可积情形

已证[32, 33, 40]，若相应变更后的哈密顿系统不可积，则方程(13)的精确解形为

$$\rho(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = C\exp[-\lambda(H)]\Big|_{H=H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})}. \tag{14}$$

式中，C 为归一化常数，$\lambda(H)$称为概率势，它是下列 n 个一阶线性常微分方程之解：

$$m_{ij}\frac{\partial H}{\partial p_j} + \frac{\partial b_{ij}^{(i)}}{\partial p_j} - b_{ij}^{(i)}\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{d\lambda}{dH} = 0, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n. \tag{15}$$

若能找到满足式(15)中所有 n 个方程的一致的 $d\lambda/dH = h(H)$，则

$$\lambda(H) = \lambda(0) + \int_0^H h(u)du, \tag{16}$$

精确平稳解乃由式(16)代入式(14)得到. 高斯白噪声激励下，两自由度振动碰撞系统的精确平稳解是这类解的一个例子[41].

3.2 可积非共振情形[40]

若相应变更后哈密顿系统可积非共振，则方程(13)的精确解形为

$$\rho(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = C\exp[-\lambda(\boldsymbol{H})]\Big|_{\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})}. \tag{17}$$

式中，$\boldsymbol{H} = [H_1, H_2, \cdots, H_n]^{\mathrm{T}}$ 是相应哈密顿系统 n 个独立、对合首次积分组成的矢量，$\lambda(\boldsymbol{H})$ 是下列 n 个一阶线性偏微分方程之解：

$$m_{ij}\frac{\partial H}{\partial p_j} + \frac{\partial}{\partial p_j}b_{ij}^{(i)} - b_{ij}^{(i)}\frac{\partial H_s}{\partial p_j}\frac{\partial\lambda}{\partial H_s} = 0, \quad i, j, s = 1, 2, \cdots, n. \tag{18}$$

若可从中找到作为 H_i 的函数之解 $\partial\lambda/\partial H_s$，并满足下列相容性条件：

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial H_{s1} \partial H_{s2}} = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial H_{s2} \partial H_{s1}}, \quad s_1, s_2 = 1, 2, \cdots, n, \tag{19}$$

则

$$\lambda(\boldsymbol{H}) = \lambda(\boldsymbol{0}) + \int_0^{H_s} \frac{\partial \lambda}{\partial u_s} \mathrm{d}u_s. \tag{20}$$

式(20)右边第 2 项是一个线性积分，被积函数对 $s = 1, 2, \cdots, n$ 求和. 精确平稳解乃由式(20)代入式(17)得到. 注意，在式(17)—式(20)中 $\boldsymbol{H}$ 可代之以作用矢量 $\boldsymbol{I}$. 受线性与(或)非线性阻尼及高斯白噪声外激与(或)参激的线性自治哈密顿系统与耦合 Duffing 振子的精确平稳解[40]是这类解的例子. Cai and Lin [42]得到的精确平稳解是这类解的特殊情形.

3.3 可积共振情形

若相应变更后的哈密顿系统可积共振，有 α 个形如式(6)的共振关系，则精确平稳解形为

$$\rho(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = C\exp[-\lambda(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{\psi})]. \tag{21}$$

式中，$\boldsymbol{\psi} = [\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_\alpha]^{\mathrm{T}}$，$\psi_u = k_i^u \theta_i$ 为角变量组合，$\lambda(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{\psi})$ 是下列一阶线性偏微分方程组之解：

$$m_{ij} \frac{\partial H}{\partial p_j} + \frac{\partial b_{ij}^{(i)}}{\partial p_j} - b_{ij}^{(i)} \left(\frac{\partial I_s}{\partial p_j} \frac{\partial \lambda}{\partial I_s} + \frac{\partial \psi_u}{\partial p_j} \frac{\partial \lambda}{\partial \psi_u} \right) = 0,$$
$$i, j, s = 1, 2, \cdots, n;\ u = 1, 2, \cdots, \alpha. \tag{22}$$

若可从中找到作为 I_i，ψ_u 的函数的 $\partial\lambda/\partial H_s$，$\partial\lambda/\partial\psi_u$，且满足类似于式(19)的相容性条件，则

$$\lambda(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{\psi}) = \lambda(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}) + \int_0^{I_s} \frac{\partial \lambda}{\partial u_s} \mathrm{d}u_s + \int_0^{\psi_u} \frac{\partial \lambda}{\partial v_u} \mathrm{d}v_u. \tag{23}$$

精确平稳解乃由式(23)代入式(21)得到. 鉴于 $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{I})$，若 $\boldsymbol{I}$ 代之以 $\boldsymbol{H}$，式(21)—式(23)仍适用. 在线性与(或)非线性阻尼及高斯白噪声外激与(或)参激下具有共振关系式(6)的两自由度线性自治哈密顿系统的精确平稳解是这类解的例子.

3.4 部分可积非共振情形[43]

若相应变更后哈密顿系统为部分可积非共振，有 r 个独立、对合的首次积分，则精确平稳解形为

$$\rho(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = C\exp[-\lambda(\boldsymbol{H}_1)]\Big|_{\boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{H}_1(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})}. \tag{24}$$

式中，$\boldsymbol{H}_1 = [H_1, H_2, \cdots, H_r]^{\mathrm{T}}$，$\lambda(\boldsymbol{H}_1)$ 是下列 n 个一阶线性偏微分方程之解：

$$m_{ij} \frac{\partial H}{\partial p_j} + \frac{\partial}{\partial p_j} b_{ij}^{(i)} - b_{ij}^{(i)} \frac{\partial H_s}{\partial p_j} \frac{\partial \lambda}{\partial H_s} = 0, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n;\ s = 1, 2, \cdots, r. \tag{25}$$

若可从中找到作为 H_i 函数的 $\partial\lambda/\partial H_s$，且满足类似于式(19)的相容性条件，则

$$\lambda(\boldsymbol{H}_1) = \lambda(\boldsymbol{0}) + \int_0^{H_s} \frac{\partial \lambda}{\partial u_s} \mathrm{d}u_s, \quad s = 1, 2, \cdots, r. \tag{26}$$

精确平稳解乃由式(26)代入式(24)得到. 若 H_1, H_2, …, H_r 代之以 I_1, I_2, …, I_{r-1}, H_r, 则式(24)—式(26)仍适用. 在线性与非线性阻尼及高斯白噪声外激下的部分可积哈密顿系统的精确平稳解是这类解的例子[43].

3.5 部分可积共振情形[43]

若相应变更后的哈密顿系统部分可积共振, 有 r 个独立、对合的首次积分, 有 β 个形如式(6)的共振关系, 则精确平稳解形为:

$$\rho(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{p}) = C\exp[-\lambda(\boldsymbol{I}',\ H_r',\ \boldsymbol{\psi}')]. \tag{27}$$

式中, $\boldsymbol{I}' = [I_1,\ I_2,\ \cdots,\ I_{r-1}]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\psi}' = [\psi_1,\ \psi_2,\ \cdots,\ \psi_\beta]^{\mathrm{T}}$, $\lambda(\boldsymbol{I}',\ H_r, \boldsymbol{\psi}')$ 是下列 n 个一阶线性偏微分方程之解:

$$\begin{gathered} m_{ij}\frac{\partial H}{\partial p_j} + \frac{\partial}{\partial p_j}b_{ij}^{(i)} - b_{ij}^{(i)}\left(\frac{\partial I_\eta}{\partial p_j}\frac{\partial \lambda}{\partial I_\eta} + \frac{\partial H_r}{\partial p_j}\frac{\partial \lambda}{\partial H_r} + \frac{\partial \psi_v}{\partial p_j}\frac{\partial \lambda}{\partial \psi_v}\right) = 0, \\ i,\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n;\ \eta = 1,\ 2,\ \cdots,\ r-1;\ v = 1,\ 2,\ \cdots,\ \beta. \end{gathered} \tag{28}$$

若可从中找到作为 I_η, H_r, ψ_v 的函数的 $\partial\lambda/\partial I_\eta$, $\partial\lambda/\partial H_r$, $\partial\lambda/\partial\psi_v$, 且满足类似于式(19) 的相容性条件, 则

$$\lambda(\boldsymbol{I}',\ H_r,\ \boldsymbol{\psi}') = \lambda(\boldsymbol{0},\ 0,\ \boldsymbol{0}) + \int_0^{I_\eta}\frac{\partial\lambda}{\partial u_\eta}\mathrm{d}u_\eta + \int_0^{H_r}\frac{\partial\lambda}{\partial v_r}\mathrm{d}v_r + \int_0^{\psi_v}\frac{\partial\lambda}{\partial w_v}\mathrm{d}w_v. \tag{29}$$

精确平稳解乃由式(29)代入式(27)得到. 若 I_η 代之以 H_η, 则式(27)—式(29)仍适用. 这类解的例子可在文献[43]中找到.

陀螺力通常从广义势导出, 后者为哈密顿函数的一部分. 上述求精确平稳解的理论与步骤同时适用于非陀螺与陀螺系统[44]. 也同时适用于下列更为一般的系统:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}Q_i &= D(\boldsymbol{Q})\frac{\partial H}{\partial P_i}\mathrm{d}t, \\ \mathrm{d}P_i &= -\left[D(\boldsymbol{Q})\frac{\partial H}{\partial Q_i} + m_{ij}(\boldsymbol{Q},\ \boldsymbol{P})\frac{\partial H}{\partial P_j}\right]\mathrm{d}t + \sigma_{ik}(\boldsymbol{Q},\ \boldsymbol{P})\mathrm{d}B_k(t), \end{aligned} \tag{30}$$

式中, $D(\boldsymbol{Q})$ 为 $\boldsymbol{Q}$ 的任意函数. 式(30)的精确平稳解形为

$$\rho^*(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{p}) = \frac{\rho(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{p})}{D(\boldsymbol{q})}, \tag{31}$$

式中, $\rho(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{p})$ 是系统(30) 在 $D(\boldsymbol{Q}) = 1$ 时之精确平稳解. 此外, 已得到一些耗散的可积哈密顿系统在谐和与高斯白噪声共同激励下的精确平稳解[45].

应指出, 解(14)具有各自由度之间能量等分的性质, 阻尼与随机激励只控制系统的总能量. 另一方面, 解(17), (21), (24)及(27), 类似于线性系统在高斯白噪声外激下的解, 具有能量非等分的性质, 系统的能量及其在各自由度之间的分配都可由阻尼力与随机激励大小及分布控制. 因此, 得到能量非等分精确平稳解(17), (21), (24)及(27)打破了 60 多年来只有能量等分精确平稳解的局限, 并使非线性随机系统的精确平稳解与在高斯白噪声外激下的线性系统的精确平稳解一致起来.

高斯白噪声激励下的耗散的哈密顿系统精确平稳解的求解理论与步骤已推广到高斯白

噪声激励下的耗散的广义哈密顿系统，得到了不可积、可积非共振、可积共振、部分可积非共振、部分可积共振五种情形的精确平稳解[46].

4 等效非线性系统法

精确平稳解的存在条件(15)，(18)，(22)，(25)，(28)及相应相容性条件常常是有很严厉的限制，许多工程实际系统并不满足. 然而，给定高斯白噪声激励下耗散的哈密顿系统，有可能找到具有精确平稳解的等效非线性随机系统，其性态与给定系统的性态在某种统计意义上十分接近. 于是，可取等效系统的精确平稳解作为给定系统的近似平稳解，这就是等效非线性系统法. 等效非线性系统法(等效非线性微分方程法，或等效非线性化法)乃首先由Caughey[47]提出，虽然Lutes[48]更早将之应用于滞迟系统. 20世纪80—90年代，曾有许多发展[49-52]. 然而，所有这些方法只适用于单自由度非线性随机系统，仅加权残数法[8]按多自由度非线性随机系统提出.

发展等效非线性系统法的前提是已有足够多的精确平稳解. 因此，随着有愈来愈一般的精确平稳解，等效非线性系统法也随之发展. 鉴于已得到五类多自由度随机激励的耗散的哈密顿系统的精确平稳解，也就有可能为相应的非线性随机系统发展等效非线性系统法. 随机激励的耗散的哈密顿系统的等效非线性系统取决于相应哈密顿系统的可积性与共振性. 已提出了三种求等效非线性系统及其精确平稳解的准则，它们是给定系统与等效系统阻尼力之差的均方值最小，两系统阻尼耗能之差均方值最小及两系统独立、对合首次积分的时间变化率的期望相等.

设给定的高斯白噪声激励下多自由度耗散的哈密顿系统的Itô方程形为

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}Q_i = \frac{\partial H}{\partial P_i}\mathrm{d}t,\\
&\mathrm{d}P_i = -\left(\frac{\partial H}{\partial Q_i} + M_{ij}\,\frac{\partial H}{\partial P_j}\right)\mathrm{d}t + \sigma_{ik}\,\mathrm{d}B_k(t),\\
&i,\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n;\ k = 1,\ 2,\ \cdots,\ m.
\end{aligned}\tag{32}$$

其等效非线性随机系统的Itô随机微分方程形为(12)，它有与方程(32)相同的哈密顿函数与随机激励，仅阻尼系数不同. 给定系统与等效系统之差为

$$\Delta_i = (m_{ij} - M_{ij})\,\frac{\partial H}{\partial P_j},\quad i,\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n,\tag{33}$$

它表示两系统第 i 个自由度之间阻尼力之差.

4.1 不可积情形[53]

若具有哈密顿函数 H 的哈密顿系统为不可积，则等效非线性系统(12)将具有形为式(14)的精确平稳解，方程(33)中之 m_{ij} 应满足方程(15). 于是

$$\Delta_i = \left[b_{ij}^{(i)}h(H) - M_{ij}\right]\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial b_{ij}^{(i)}}{\partial p_j}.\tag{34}$$

第一个准则是

$$\min_{h(H)} E[\Delta_i \Delta_i], \tag{35}$$

它导致下列 $h(H)$ 的表达式：

$$h(H)=\frac{\int_{\Omega}\left[\left(M_{ij}\frac{\partial H}{\partial p_j}+\frac{\partial b_{ij}^{(i)}}{\partial p_j}\right)\left(b_{ij}^{(i)}\frac{\partial H}{\partial p_j}\Big/\frac{\partial H}{\partial p_1}\right)\right]\mathrm{d}\boldsymbol{q}\mathrm{d}p_2\cdots\mathrm{d}p_n}{\int_{\Omega}\left[\left(b_{ij}^{(i)}\frac{\partial H}{\partial p_j}\right)\left(b_{ij}^{(i)}\frac{\partial H}{\partial p_j}\Big/\frac{\partial H}{\partial p_1}\right)\right]\mathrm{d}\boldsymbol{q}\mathrm{d}p_2\cdots\mathrm{d}p_n}; \tag{36}$$

第二个准则为

$$\min_{h(H)} E[\Delta_e \Delta_e]=\min_{h(H)} E\left[\left(\frac{\partial H_i}{\partial p_i}\Delta_i\right)\left(\frac{\partial H_i}{\partial p_i}\Delta_i\right)\right], \tag{37}$$

它导致下列 $h(H)$ 的表达式：

$$h(H)=\frac{\int_{\Omega}\left[\frac{\partial H}{\partial p_i}\left(M_{ij}\frac{\partial H}{\partial p_j}+\frac{\partial b_{ij}^{(i)}}{\partial p_j}\right)\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}b_{ij}^{(i)}\frac{\partial H}{\partial p_j}\Big/\frac{\partial H}{\partial p_1}\right)\right]\mathrm{d}\boldsymbol{q}\mathrm{d}p_2\cdots\mathrm{d}p_n}{\int_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}b_{ij}^{(i)}\frac{\partial H}{\partial p_j}\right)\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}b_{ij}^{(i)}\frac{\partial H}{\partial p_j}\right)\Big/\frac{\partial H}{\partial p_1}\right)\right]\mathrm{d}\boldsymbol{q}\mathrm{d}p_2\cdots\mathrm{d}p_n}; \tag{38}$$

第三个准则为

$$E[\Delta_e]=0, \tag{39}$$

它导致如下 $h(H)$ 的表达式：

$$h(H)=\frac{\int_{\Omega}\left[\frac{\partial H}{\partial p_i}\left(M_{ij}\frac{\partial H}{\partial p_j}+\frac{\partial b_{ij}^{(i)}}{\partial p_j}\right)\Big/\frac{\partial H}{\partial p_1}\right]\mathrm{d}\boldsymbol{q}\mathrm{d}p_2\cdots\mathrm{d}p_n}{\int_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}b_{ij}^{(i)}\frac{\partial H}{\partial p_j}\right)\Big/\frac{\partial H}{\partial p_1}\right]\mathrm{d}\boldsymbol{q}\mathrm{d}p_2\cdots\mathrm{d}p_n}. \tag{40}$$

在式(36)、式(38)及式(40)中，

$$\Omega=\{(q_1,\cdots,q_n,p_2,\cdots,p_n)\mid H(q_1,\cdots,q_n;0,p_2,\cdots,p_n)\leqslant H\}, \tag{41}$$

式中，$H(q_1,\cdots,q_n,0,p_2,\cdots,p_n)$ 是在 $p_1=0$ 时的哈密顿函数，H 是哈密顿函数的某个值. 将式(36)、式(38)或式(40)中的 $h(H)$ 代入式(16)，然后代入式(14)，就得到等效非线性系统(12)的精确平稳解与给定系统(32)的近似平稳解. 两个非线性耦合的 van der Pol 振子在高斯白噪声参激下的近似平稳解就是用这一方法得到的[53]. 与 Monte Carlo 模拟结果的比较表明，当非线性耦合较强与激励强度较大时，该法给出较好的结果，因为在这些情形下，不可积性较强.

4.2 可积非共振情形[54]

若哈密顿函数为 H 的哈密顿系统可积非共振，其等效非线性系统(12)将具有形为式(17)的精确平稳解，式(33)中 m_{ij} 应满足条件(18). 此时，三个准则依次导致下列确定 $\partial\lambda/\partial H_s$ 的方程：

$$\int_{\Omega_1}\left[\left(b_{ij}^{(i)}\frac{\partial H_s}{\partial p_j}\frac{\partial\lambda}{\partial H_s}-M_{ij}\frac{\partial H}{\partial p_j}-\frac{\partial b_{ij}^{(i)}}{\partial p_j}\right)\left(b_{ij}^{(i)}\frac{\partial H_s}{\partial p_j}\right)\Big/\left|\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{p}}\right|\right]\mathrm{d}\boldsymbol{q}=0, \tag{42}$$