职业教育基础课教学改革规划教材

应用数学

YINGYONG SHUXUE

（经济、管理类）

数学教材编写组 编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

职业教育基础课教学改革规划教材

应用数学

（经济、管理类）

数学教材编写组　编
本套教材主编　薛吉伟　王化久
主审　张淑华

机械工业出版社

为了贯彻落实党中央优先办好教育和加强素质教育的指示精神，根据教育部提出的大力发展职业教育的要求，结合我国目前职业教育的现状和特点，在上套“五年制高等职业技术教育教材”的基础上，修改编写了本套教材。教材在不降低学生素质能力培养的前提下，不求结构完整，不求体系合理，只求浅入浅出，易教乐学。教材删减了一些抽象、繁杂的概念和一些不适合职业教育的教学内容，以强化学生对知识的理解，增强学生的接受能力，激发学生的学习兴趣，培养学生勤于动脑、动手的习惯，培养学生数学学习的基本能力，从而提高教学效果，达到加强素质教育的目的。

本套教材包括：初等数学、高等数学、应用数学(理工类)、应用数学(经济、管理类)。本书为应用数学(经济、管理类)，主要内容有：排列、组合、二项式定理，概率论初步，数理统计初步，行列式，矩阵和线性规划初步。

本书适用对象见“前言”。

图书在版编目(CIP)数据

应用数学：经济、管理类/数学教材编写组编. 北京：机械工业出版社，2009.4

职业教育基础课教学改革规划教材

ISBN 978-7-111-25976-3

Ⅰ. 应… Ⅱ. 数… Ⅲ. 应用数学—高等学校：技术学校—教材 Ⅳ. 029

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 210989 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑：宋学敏 责任编辑：宋学敏 朱红波 版式设计：霍永明

责任校对：刘志文 封面设计：王伟光 责任印制：李 妍

北京铭成印刷有限公司印刷

2009 年 4 月第 1 版第 1 次印刷

169mm × 239mm · 10.75 印张 · 190 千字

0001—3000 册

标准书号：ISBN 978-7-111-25976-3

定价：19.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

销售服务热线电话：(010)68326294

购书热线电话：(010)88379639 88379641 88379643

编辑热线电话：(010)88379199

封面无防伪标均为盗版

前　言

这套教材是在机械工业出版社出版的“五年制高等职业技术教育教材”的基础上，本着不降低学生素质能力培养的前提下，不求结构合理，不求体系完整，只求浅入浅出，易教乐学的指导思想编写的。

编写中，注意体现职业教育的特点和专业特色，针对目前教学的实际状况，以通俗易懂的实例引入知识，以简单重复的实例强化学生对知识的理解，删减了一些抽象、繁杂的概念和一些不适合职业教育的教学内容，注重学生的数学基本能力的培养，注重学生未来发展的实际需要。

本套教材有以下特点：

1. 注重基础知识

对传统的初等数学、高等数学内容进行精选，把在理论上、方法上以及在现代生产、生活和各类专业学习中得到广泛应用的基础知识作为必学内容，以保证必要的、基本的数学水准，同时适度更新，增加了逻辑用语、映射、向量、计算器使用简介、计算机软件使用简介等内容，并注意渗透数学建模思想和方法。

2. 教材富有弹性

本套教材采用模块式结构编排，将教材内容分为必学和选学，便于各类学校根据不同专业的不同要求灵活选用，增强了教材的弹性和适用性。

3. 浅入浅出，易教易学

针对目前高职学生的数学基础和实际水平，在编写中力求做到降低知识起点、温故知新、浅入浅出，并采用数形结合的方法，以图、表直观地讲解概念、定理，加强分析过程，使教材易教易学。

4. 突出应用与实践，注意培养学生应用数学的意识和能力

本教材采取分散与集中相结合的方式，编排了有价值的习题。引导学生运用所学的数学知识解决日常生活和生产中的简单实际问题，同时尽量安排能够使用计算器、计算机来计算各类数值的例题与习题，培养和提高学生使用计算工具的能力。

为了适应现代化教学的需要，本套教材均配有电子教案，改变了传统的教学模式，减轻了教与学双方的负担，辅助学生对知识的理解，增强学生的接受能力，激发学生的学习兴趣，培养学生勤于动脑、动手的习惯和数学学习的基本能力，为学生将来的继续学习与发展打下良好基础。总之，一切从教学出发，一切

为学生的现在与将来服务。

本套教材包括：初等数学、高等数学、应用数学，应用数学又分为经济、管理类和理工类。本套教材配合使用，可作为五年制高职教材；亦可单独使用高等数学，作为三年制高职40~60学时用书；还可将高等数学和应用数学配合使用，作为三年制高职（不同专业）80~100学时用书。本册是应用数学（经济、管理类）。

参加本册编写的有：张宏斌、闫国松。本册主编：张宏斌；副主编：闫国松；主审：张淑华。

参加本册编写的院校有：辽宁石化职业技术学院、辽宁信息职业技术学院。

本册书在编写过程中，得到了机械工业出版社的热情关怀和帮助，各编、审同志所在学校对编审工作给予了大力支持和帮助，在此表示感谢。对没有参加这次修改工作的原编审教师也一并表示感谢。

数学教材编写组

目　　录

第1章　排列、组合、二项式定理

【学习目标】

1. 正确理解和掌握加法原理与乘法原理，能准确地应用它们分别解决一些简单的应用问题.

2. 掌握排列、排列数和组合、组合数的概念以及计算公式，会用公式计算和解决有关的实际问题.

3. 正确理解和掌握二项式定理及其通项公式.

4. 发展学生的思维能力，培养学生分析问题和解决问题的能力.

1.1　两个基本原理

1.1.1　加法原理

看下面两个问题：

问题1　从甲地到乙地，可以乘火车，也可以乘汽车，还可以乘轮船. 一天中，火车有4班，汽车有2班，轮船有3班，问一天中乘坐这些交通工具从甲地到乙地，共有多少种不同的走法？

因为一天中乘火车有4种走法，乘汽车有2种走法，乘轮船有3种走法，每一种走法都可以从甲地到达乙地，因此，一天中乘坐这些交通工具从甲地到乙地，共有 $4+2+3=9$ 种不同的走法. 如图1-1所示.

一般地，有如下原理：

加法原理　做一件事，完成它可以有 n 类办法，在第1类办法中有 m_1 种不同的方法，在第2类办法中有 m_2 种不同的方法，……，在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法. 那么，完成这件事共有 $N=m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种不同的方法.

加法原理又称为分类计数原理.

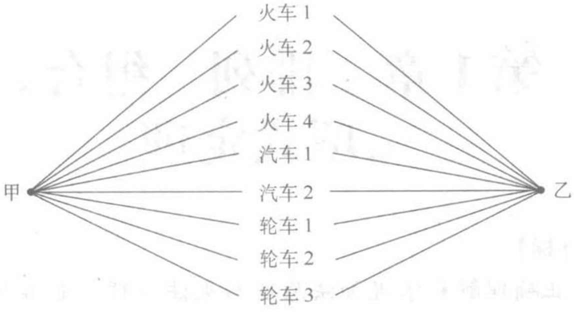

图 1-1

1.1.2 乘法原理

问题 2 从甲地去丙地，必须经过乙地，要从甲地先乘火车到乙地，再从乙地乘汽车到丙地. 一天中，火车有 3 班，汽车有 2 班，那么从甲地到丙地，共有多少种不同的走法？

这个问题与前一个问题不同. 在前一个问题中，采用乘火车或乘汽车中的任何一种方式，都可以从甲地到乙地. 而在这个问题中，必须经过先乘火车、后乘汽车两个步骤，才能从甲地到达丙地.

这里，因为乘火车有 3 种走法，乘汽车有 2 种走法，所以乘一次火车再接乘一次汽车从甲地到丙地，共有 $3\times2=6$ 种不同的走法. 如图 1-2 所示.

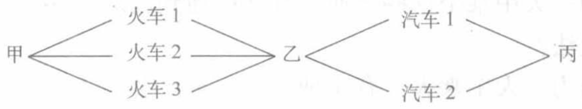

图 1-2

所有走法的具体情况如下：

火车 1 ———————汽车 1
火车 1 ———————汽车 2
火车 2 ———————汽车 1
火车 2 ———————汽车 2
火车 3 ———————汽车 1

火车3 ——————汽车2

一般地，有如下原理：

乘法原理 做一件事，完成它需要分成 n 个步骤，完成第1步有 m_1 种不同的方法，完成第2步有 m_2 种不同的方法，……，完成第 n 步有 m_n 种不同的方法．那么，完成这件事共有 $N=m_1m_2\cdots m_n$ 种不同的方法．

乘法原理又称为分步计数原理．

例1 书架上层放有6本不同的数学书，下层放有5本不同的语文书．

（1）从中任取1本，有多少种不同的取法？

（2）从中任取数学书与语文书各1本，有多少种不同的取法？

解 （1）从书架上任取1本书，有两类办法：

第1类办法，从上层取数学书，可以从6本书中任取1本，有6种方法；

第2类办法，从下层取语文书，可以从5本书中任取1本，有5种方法．

根据加法原理，得到不同的取法的种数是 $6+5=11$．

（2）从书架上任取数学书与语文书各1本，可以分成两个步骤完成：

第1步，取1本数学书，有6种方法；

第2步，取1本语文书，有5种方法．

根据乘法原理，得到不同的取法的种数是 $N=6\times5=30$．

思考：一同学有4枚明朝不同古币和6枚清朝不同古币．

（1）从中任取1枚，有多少种不同取法？

（2）从中任取明清古币各1枚，有多少种不同取法？

例2 （1）由数字1，2，3，4，5可以组成多少个数字允许重复的三位数？

（2）由数字1，2，3，4，5可以组成多少个数字不允许重复的三位数？

（3）由数字0，1，2，3，4，5可以组成多少个数字不允许重复的三位数？

解 （1）要组成一个三位数可以分成三个步骤完成：

第1步，确定百位上的数字，从5个数字中任选1个数字，共有5种选法；

第2步，确定十位上的数字，由于数字允许重复，仍有5种选法；

第 3 步，确定个位上的数字，同理，它也有 5 种选法.

根据乘法原理，得到可以组成的三位数的个数是 $N=5\times5\times5=125$.

（2）要组成一个三位数可以分成三个步骤完成：

第 1 步，确定百位上的数字，从 5 个数字中任选 1 个数字，共有 5 种选法；

第 2 步，确定十位上的数字，由于数字不允许重复，有 4 种选法；

第 3 步，确定个位上的数字，同理，它有 3 种选法.

根据乘法原理，得到可以组成的三位数的个数是 $N=5\times4\times3=60$.

（3）要组成一个三位数可以分成三个步骤完成：

第 1 步，确定百位上的数字，由于百位上的数字不能为 0，从除 0 之外的 5 个数字中任选 1 个数字，共有 5 种选法；

第 2 步，确定十位上的数字，由于数字不允许重复，且十位上的数字可以为 0，仍有 5 种选法；

第 3 步，确定个位上的数字，同理，有 4 种选法.

根据乘法原理，得到可以组成的三位数的个数是 $N=5\times5\times4=100$.

要解决某个此类问题，首先要判断是分类，还是分步？分类时用加法，分步时用乘法；其次要注意怎样分类和分步，以后会进一步学习.

注意 加法原理和乘法原理回答的都是有关做一件事情的不同方法总数的计算问题. 区别在于：加法原理针对的是“分类”问题，其中各种方法相互独立，用其中任何一种方法都可以做完这件事；乘法原理针对的是“分步”问题，各个步骤中的方法相互依存，只有依次完成各个步骤，才能做完这件事.

【习题 1-1】

1. 从甲地到乙地有 2 条陆路可走，从乙地到丙地有 3 条陆路可走，又从甲地不经过乙地到丙地有 2 条水路可走.

（1）从甲地经乙地到丙地有多少种不同的走法？

（2）从甲地到丙地共有多少种不同的走法？

2. 一名儿童做加法游戏. 在一个红口袋中装着 20 张分别标有数 $1,2,\cdots,19,20$ 的红卡片，从中任抽 1 张，把上面的数作为被加数；在另一个黄口袋中装着 10 张分别标有数 $1,2,\cdots,9,10$

的黄卡片，从中任抽 1 张，把上面的数作为加数. 这名儿童一共可以列出多少个加法式子?

3. 由 0 ~9 这 10 个数字可以组成多少个没有重复数字的三位数?

4. 乘积$(a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2+b_3+b_4)(c_1+c_2+c_3+c_4+c_5)$展开后共有多少项?

5. 一个口袋内装有 5 个小球，另一个口袋内装有 4 个小球，所有这些小球的颜色互不相同.

(1) 从两个口袋内任取 1 个小球，有多少种不同的取法?

(2) 从两个口袋内各取 1 个小球，有多少种不同的取法?

1.2 排列

1.2.1 排列的概念

看下面两个问题.

问题 1 北京、上海、广州 3 个民航站之间的直达航线，需要准备多少种不同的机票?

解 从每一个起点站到一个终点站要准备一种飞机票，如果把“一张飞机票”看成是“按照起点站排在前，终点站排在后的一种排法”，那么每一张飞机票就对应着一种排法. 这样，飞机票的种数就是从北京、上海、广州这 3 个站中，每次取出 2 个站，按照起点站在前、终点站在后的顺序的所有排法的种数.

完成上述排法可分为两个步骤:

第 1 步，先确定起点站，在 3 个站中，任选 1 个站为起点站，有 3 种方法;

第 2 步，再确定终点站，当选定起点站以后，终点站就只能在余下的两个站中去选，有 2 种方法.

根据乘法原理，在三个民航站中，每次取两个站，按起点站在前、终点站在后的顺序的排法，共有 $3\times2=6$ 种，即要准备 6 种不同的飞机票. 如图 1-3 所示.

问题 2 从 a，b，c，d 这 4 个字母中，每次取出 3 个按顺序排成一列，共有多少种不同的排法?

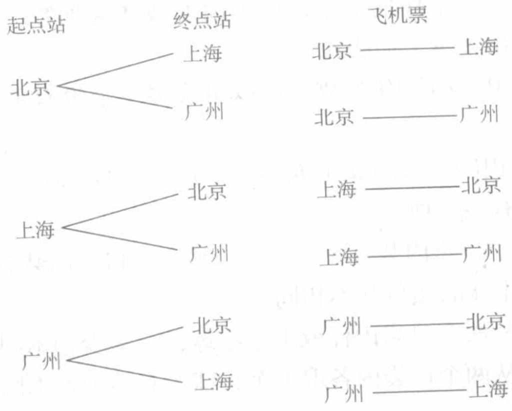

图 1-3

解 完成这个问题需分三个步骤：

第 1 步，先确定左边的字母，在 a，b，c，d 这 4 个字母中任取 1 个，有 4 种方法；

第 2 步，再确定中间的一个字母，当左边的字母确定后，中间的字母只能在余下的 3 个字母中去取，有 3 种方法；

第 3 步，最后确定右边的字母，当左边、中间的字母都确定后，右边的字母只能在余下的 2 个字母中去取，有 2 种方法.

根据乘法原理，从 4 个不同的字母中，每次取出 3 个按顺序排成一列，共有 $4\times3\times2=24$ 种不同的排法. 如图 1-4 所示.

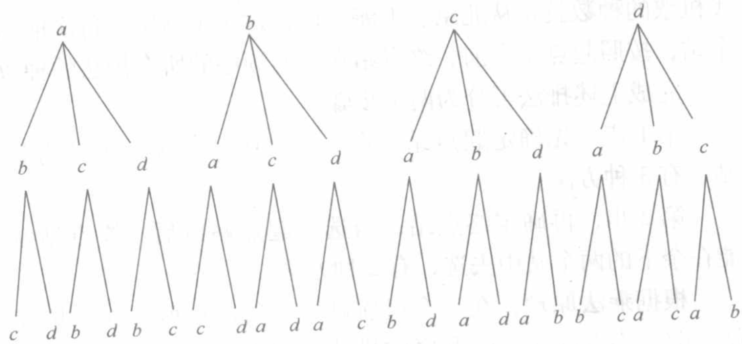

图 1-4

由此可写出所有的排法：

abc bac cab dab

abd	bad	cad	dac
acb	bca	cba	dba
acd	bcd	cbd	dbc
adb	bda	cda	dca
adc	bdc	cdb	dcb

一般地，从 n 个不同元素中，任取 $m(m\leqslant n)$ 个元素(这里的被取元素各不相同)按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个**排列**.

根据排列的定义，两个排列相同，当且仅当两个排列的元素完全相同，且元素的排列顺序也相同. 例如在问题 2 中，abc 与 abd 的元素不完全相同，它们是不同的排列；又如 abc 与 acb，虽然元素全都相同，但元素的排列顺序不同，它们也是不同的排列.

当 $m<n$ 时，所得排列叫做**选排列**；

当 $m=n$ 时，所得排列叫做**全排列**.

1.2.2 排列数的计算公式

从 n 个不同元素中，取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素的所有排列的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的**排列数**，通常用记号 A_n^m 表示.

上面的问题 1，是求从 3 个不同元素中取出 2 个元素的排列数，记为 A_3^2，已经算得 $\mathrm{A}_3^2=3\times2=6$；上面的问题 2，是求从 4 个不同元素中取出 3 个元素的排列数，记为 A_4^3，已经算得 $\mathrm{A}_4^3=4\times3\times2=24$.

求排列数 A_n^2 可以这样考虑：假定有排好顺序的两个空位，从 n 个不同元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中，任意取 2 个去填空，一个空位填一个元素，每一种填法就得到一个排列；反过来，任意一个排列总可以由这样的一种填法得到. 因此，所有不同填法的种数就是排列数 A_n^2. 如图 1-5 所示.

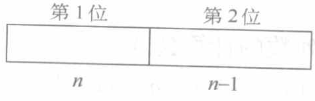

图 1-5

现在我们计算有多少种不同的填法. 完成填空这件事可分为两个步骤:

第 1 步, 先确定第 1 个位置的元素, 可以从 n 个元素中任选 1 个填空, 有 n 种方法;

第 2 步, 确定第 2 个位置的元素, 可以从剩下的 $n-1$ 个元素中任选 1 个填空, 有 $n-1$ 种方法.

于是, 根据乘法原理, 两个空位的填法种数为 $\mathrm{A}_n^2=n(n-1)$.

求排列数 A_n^3 可以按依次填 3 个空位考虑, 得到 $\mathrm{A}_n^3=n(n-1)(n-2)$.

同样, 求排列数 A_n^m 可以按依次填 m 个空位考虑: 假定有排好顺序的 m 个空位, 从 n 个不同元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中任意取 m 个去填空, 一个空位填一个元素, 每一种填法就对应一个排列, 因此, 所有不同填法的种数就是排列数 A_n^m. 如图 1-6 所示.

填空可分为 m 个步骤:

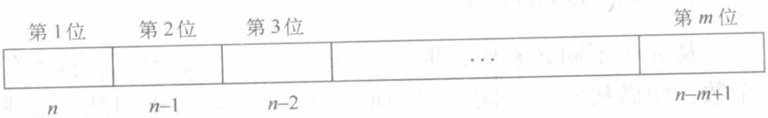

图 1-6

第 1 步, 第 1 位可以从 n 个元素中任选 1 个填上, 共有 n 种填法;

第 2 步, 第 2 位只能从剩下的 $n-1$ 个元素中任选 1 个填上, 共有 $n-1$ 种填法;

……

第 m 步, 当前面的 $m-1$ 个空位都填上后, 第 m 位只能从剩下的 $n-(m-1)$ 个元素中任选 1 个填上, 共有 $n-m+1$ 种填法.

根据乘法原理, 全部填满 m 个空位共有 $n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$ 种填法.

所以, 得到排列数的计算公式:

$\mathrm{A}_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$, 其中 m, $n\in\mathbf{N}^*$, 并且 $m\leqslant n$.

这就是说, 从 n 个不同元素中, 每次取出 m 个元素的排

列数 A_n^m，等于从 n 开始依次少 1 的 m 个连续自然数的乘积.

例如，$$A_5^2=5\times4=20,$$
$$A_8^3=8\times7\times6=336.$$

特别地，当 $m=n$ 时，可得全排列的排列数的计算公式：
$$A_n^n=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot3\cdot2\cdot1=n!.$$
也就是说，n 个不同元素全部取出的排列数 A_n^n 等于自然数 1 到 n 的连乘积，记作 $n!$，读作 n 的阶乘.

例如，$$A_5^5=5\times4\times3\times2\times1=120.$$

例 1 计算

（1）A_{16}^3； （2）A_6^6； （3）A_6^4.

解 （1）$A_{16}^3=16\times15\times14=3360.$

（2）$A_6^6=6!=720.$

（3）$A_6^4=6\times5\times4\times3=360.$

由于已知 $A_6^6=6!=720$，A_6^4 还可以这样计算：
$$A_6^4=\frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{2\times1}=\frac{6!}{2!}=\frac{720}{2}=360.$$

思考：

如果 $A_n^m=9\times8\times7$，那么 n 等于几？m 等于几？

一般地，有
$$A_n^m=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-m+1)$$
$$=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-m+1)\cdot(n-m)\cdot\cdots\cdot3\cdot2\cdot1}{(n-m)\cdot\cdots\cdot3\cdot2\cdot1}$$
$$=\frac{n!}{(n-m)!}.$$

思考：

$A_{n+1}^{n+1}=A_{n+1}^{n}$ 成立吗？

$A_{n+1}^{n+1}=(n+1)A_n^n$ 成立吗？

因此，排列数的计算公式还可以写成：
$$A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}.$$

例 2 某段铁路有 12 个车站，共需准备多少种普通客票？

解 因为 1 张车票对应着 2 个车站的一个排列，因此需要准备的车票种数就是从 12 个车站中任取 2 个的排列数：$A_{12}^2=12\times11=132.$

例 3 由数字 1，2，3，4 可以组成多少个无重复数字的三位数？

解 所求的三位数的个数等于从 1，2，3，4 四个数字中，每次取出 3 个数字组成三位数的排列数：$A_4^3=4\times3\times2=24.$

【习题 1-2】

1. 写出从 5 个元素 a，b，c，d，e 中任意取出 2 个、3 个元素的所有排列.

2. 计算

（1）A_{11}^4；（2）$9A_8^4-2A_8^5$；（3）A_8^8.

3. 一铁路沿线有 25 个车站，问需要准备多少种客车票？

4. 全国足球甲 A 联赛共有 14 个队参加，每队都要与其余各队在主、客场分别比赛 1 次，共进行多少场比赛？

5. 现有 7 名学生站成两排，其中 3 名女生站在前排，4 名男生站在后排，有多少种站法？

1.3 组合

1.3.1 组合的概念

先看下面两个问题.

问题 1 北京—上海—广州这条民航线上，有多少种不同的飞机票价？

解 这个问题与上一节中飞机票种数的问题不同，飞机票的种数与起点站、终点站的顺序有关，从北京到上海和从上海到北京，应当准备两种不同的飞机票；而飞机票价与起点站、终点站的顺序无关，只与两站之间的距离有关，从北京到上海和从上海到北京，飞机票价是一样的. 因此，票价的种数只有票的种数的一半，即$\frac{1}{2}A_3^2=3$ 种不同的票价.

可见这个问题与排列问题不同，它是从 3 个不同元素中每次取出 2 个，不管其顺序，组成一组，共有多少种不同的组数的问题. 对于这类问题，给出下面的定义：

从 n 个不同元素中，每次取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素，不管顺序如何，组成一组，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个**组合**.

从排列和组合的定义可以知道，排列与元素的顺序有关，