JS

丁保荣 主编

本书是《初中数学竞赛教程（综合分册）》配套用书

# 初中数学竞赛解题手册

CHUZHONG SHUXUE JINGSAI JIETI SHOUCE

## 综合分册

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

本书是《初中数学竞赛教程综合分册》配套用书

# 初中数学竞赛解题手册

## 综合分册

主　编　丁保荣

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

初中数学竞赛解题手册. 综合分册/丁保荣主编. —杭州：浙江大学出版社，2009.3

ISBN 978-7-308-06637-2

Ⅰ.初… Ⅱ.丁 Ⅲ.数学课—初中—解题 Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 033757 号

**初中数学竞赛解题手册(综合分册)**

丁保荣 主编

---

**责任编辑** 沈国明

**文字编辑** 夏晓冬

**封面设计** 刘依群

**出版发行** 浙江大学出版社

（杭州天目山路 148 号 邮政编码 310028）

（网址：http://www.zjupress.com）

**排　　版** 杭州大漠照排印刷有限公司

**印　　刷** 杭州浙大同力教育彩印有限公司

**开　　本** 787mm×960mm 1/16

**印　　张** 28.5

**字　　数** 514 千

**版 印 次** 2009 年 4 月第 1 版 2009 年 5 月第 2 次印刷

**书　　号** ISBN 978-7-308-06637-2

**定　　价** 40.00 元

---



浙江大学出版社发行部邮购电话（0571）88925591

# 前　言

陈省身先生曾预言:“中国将在21世纪成为数学大国。”成为数学大国不是一件容易的事,不可能一蹴而就,这需要坚持不懈的努力。我们编写《初中数学竞赛教程》和《初中数学竞赛解题手册》这套书,目的就是进一步普及数学知识,使数学为更多的青少年所喜爱,帮助他们取得好的成绩;使喜爱数学的同学得到更好的发展,通过这套书学到更多的知识和方法。

《初中数学竞赛解题手册》包括三部分内容:

一、演练题的详解。《初中数学竞赛教程》中[赛场演练]的竞赛真题只提供答案,而在《初中数学竞赛解题手册》中给出相应的详细解答,为家长辅导或学生自学提供便利。

二、热点赛题精讲。将有关竞赛热点分27个专题,每个专题提供一批典型赛题并有详解。如果说“教程”中的讲解是帮你学习方法,演练题作为巩固训练,那么“手册”中的这部分内容可让你学会读题。阅读是很重要的学习方法,阅读能力是重要的学习能力。阅读能打开你的思路,开阔你的视野。一个个巧妙的解答一定会深深地吸引你。

三、全真赛卷热身。这些是近年来优秀的竞赛原卷,既可以让你了解相关竞赛试题的内容和形式,也可让你做测试训练,了解自己的水平。

愿通过这套书的学习,让你从整体上把握初中数学竞赛内容,能较快较好地掌握数学竞赛的解题技能技巧,提高解题能力和数学素养。另外对于中考命题中出现的新题、难题自然可以技高一筹,应对自如了。

参加本书编写的有方利生、何星天、金旭颖、朱晓燕、凌任涛、徐善海、董烈佳、陈志强、张敬君、张小梅、张喜凤等人。

丁保荣

# 目　录
CONTENTS

## 一、《竞赛教程》中演练题的详细解答

## 二、热点赛题精讲

## 三、全真赛卷热身

# 一　《竞赛教程》中演练题的详细解答

## 第 1 讲　整数的基本性质

### 一、选择题

1. (希望杯竞赛题) 三人中每两个人的平均年龄加上余下一人的年龄分别是 47, 61, 60,那么这三个人中最大年龄与最小年龄的差是 (　　)

A. 28　　B. 27　　C. 26　　D. 25

2. (1997 年学习报竞赛题) 有 1997 盏亮着的电灯,各由一个拉线开关控制着,现按其顺序编号为 1, 2, …, 1997,然后将编号为 2 的倍数的灯线拉一下;再将编号为 3 的倍数的灯线拉一下;最后将编号为 5 的倍数的灯线拉一下,三次拉完后亮着的灯的盏数为 (　　)

A. 1464　　B. 533　　C. 999　　D. 998

3. (1998 年江苏省竞赛题) 从 1 开始的自然数中,把能表示成两个整数的和与它的差的乘积的数从小到大排列,在这种排列中,第 1998 个数是 (　　)

A. 2662　　B. 2664　　C. 2665　　D. 2666

4. (2005 年河南省竞赛题) 探索规律: $3^1 = 3$,个位数字是 3; $3^2 = 9$,个位数字是 9; $3^3 = 27$,个位数字是 7; $3^4 = 81$,个位数字是 1; $3^5 = 243$,个位数字是 3; $3^6 = 729$,个位数字是 9, …,那么 $3^{2005}$ 的个位数字是 (　　)

A. 3　　B. 9　　C. 7　　D. 1

5. (第 17 届希望杯竞赛题) 三角形的三边长 $a$, $b$, $c$ 都是整数,且 $[a, b, c] = 60$, $(a, b) = 4$, $(b, c) = 3$ (注: $[a, b, c]$ 表示 $a$, $b$, $c$ 的最小公倍数, $(a, b)$ 表示 $a$, $b$ 的最大公约数),则 $a + b + c$ 的最小值是 (　　)

A. 30　　B. 31　　C. 32　　D. 33

6. (第 17 届希望杯竞赛题) 若 $a$, $b$, $c$ 都是大于 1 的自然数,且 $a^0 = 252b$,则 $a$ 的最小值是 (　　)

A. 42　　B. 24　　C. 21　　D. 15

### 二、填空题

7. (希望杯竞赛题) 3 个质数 $a$, $b$, $c$ 的乘积等于这 3 个质数的和的 5 倍,则 $a^2 + b^2 + c^2 =$ ________.

8. (1999 年重庆市竞赛题) 一个自然数与 13 的和是 5 的倍数,与 13 的差是 6 的倍数,

则满足条件的最小自然数是________.

9.（第17届五羊杯竞赛题）在1～2005的所有正整数中，共有________个整数$x$，使$3^{3x+1}$和$x^3$被5除的余数相同.

10.（第17届希望杯竞赛题）$2^{m+2006}+2^m$（$m$是正整数）的末位字数是________.

11.（第18届五羊杯竞赛题）如果$n$为正偶数，并且$(n-1)^2$整除$n^{2006}-1$，那么$n$的最大值为________.

12.（第18届五羊杯竞赛题）设$a_1=12\times8$，$a_2=102\times98$，$a_3=1002\times998$，$a_4=10002\times9998$，…，又设$S=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{20}$，那么$S$的各位数字和为________.

13.（第4届中国趣味数学决赛题）下面的算式中，每个汉字代表一个数字（0～9），不同汉字代表不同数字，则美＋妙＋数＋学＋花＋园＝________.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 美 | 妙 | 数 | 学 |
| × | | | | 花 | 园 |
| | 数 | 学 | 真 | 美 | 妙 |
| 4 | 2 | 3 | 8 | 0 | |
| 5 | 好 | 好 | 好 | 美 | 妙 |

## 三、解答题

14.（1998年重庆市竞赛题）按下面规则扩充新数：已知有$a$，$b$两数，可按规则$c=ab+a+b$扩充一个新数，而$a$，$b$，$c$三个数中任取两个数，按规则又可扩充一个新数，…，每扩充一个新数叫做一次操作. 现有数1和4，求按上述规则经过三次扩充得到的最大新数.

15.（1998年希望杯竞赛题）23个不同的正整数的和是4845，问：这23个数的最大公约数可能达到的最大的值是多少?写出你的结论，并说明理由.

16.（第17届希望杯竞赛题）

（1）求证：奇数的平方被8除余1；

（2）请你进一步证明：2006不能表示为10个奇数的平方之和.

17.（第21届江苏省初中数学竞赛题）已知$k$，$a$，$b$为正整数，$k$被$a^2$，$b^2$整除所得的商分别为$m$，$m+116$.

（1）若$a$，$b$互质，求证：$a^2-b^2$与$a^2$，$b^2$都互质；

（2）当$a$，$b$互质时，求$k$的值；

（3）若$a$，$b$的最大公约数为5，求$k$的值.

18.（首届华杯赛试题）一个六位数$\overline{3434ab}$能同时被8和9整除，已知$a+b=c$，求$c$的最小值.

19.（首届华杯赛试题）观察下列数列，求出第90个数除以3的余数：10，13，23，

36，59，95，154，….

20. （第 13 届日本奥数决赛题）平太给大介出了一道计算题（$A$，$B$ 各代表两位数中各位上的数字，相同的字母代表相同的数字）：$\overline{AB}\times\overline{BA}=\square$.

大介："得数是 2872."

平太："不对."

大介："个位的数字对吗？"

平太："对."

大介："其他数位的数字有对的吗？"

平太："这是保密的.但你调换一下四位数 2872 中 4 个数字的位置，就能得出正确答案."

请求出正确答案.

**答案与解析**

**1.** A　设三个人的年龄分别为 $x_1,x_2,x_3$，

则
$$x_1+x_2+2x_3=47\times 2 \quad ①$$
$$x_2+x_3+2x_1=61\times 2 \quad ②$$
$$x_3+x_1+2x_2=60\times 2 \quad ③$$

由 ①＋②＋③ 得 $x_1+x_2+x_3=84$，分别代入 ① 和 ② 得 $x_1-x_3=28$.

**2.** D　注意重复整除数，如 60，第一次拉后不亮，第二次拉后亮，第三次拉后又不亮.

**3.** B　提示：在寻求规律时注意重复，如 $5^2-2^2=11^2-10^2=21$.

**4.** A　$3^{2005}=3^{501\times4+1}$ 的个位数字为 3.

**5.** B　因为 $(a,b)=4$，所以 $a,b$ 都是 4 的倍数.因为 $(b,c)=3$，所以 $b,c$ 都是 3 的倍数.从而 $a=4a_1,b=12b_1,c=3c_1,a_1,b_1,c_1$ 都是正整数.又因为 $[a,b,c]=60$，所以 $a,b,c$ 中至少有一个被 5 整除，即 $a_1,b_1,c_1$ 中至少有一个被 5 整除.在 $a_1=b_1=1,c_1=5$ 时，$a+b+c=4+12+15=31$ 最小.

**6.** A　$252=2^2\times3^2\times7$，当 $b=7,c=2$ 时，$a$ 的最小值是 $2\times3\times7=42$.

**7.** 78　因为 $abc=5(a+b+c)$，而 $a,b,c$ 为质数，所以不妨设 $a=5,bc-b-c+1=6$，$(b-1)(c-1)=6$，易知 $b=2,c=7$，所以 $a^2+b^2+c^2=5^2+2^2+7^2=78$.

**8.** 37　由题意得 $x+13=5k,x-13=6a,k>2,a\geqslant 0$.易知 $x$ 为不小于 13 的奇数，且与 13 的和是 5 的倍数，显然 13,17,27 不符合，所以 $x=37$ 时成立.

**9.** 401　列表如下：

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 1 | 2 | 4 | 3 | 1 | 2 | 4 | 3 | 1 | 2 | 4 | 3 | 1 | 2 | 4 | 3 | 1 | 2 | 4 | 3 | 1 |
| $B$ | 1 | 3 | 2 | 4 | 0 | 1 | 3 | 2 | 4 | 0 | 1 | 3 | 2 | 4 | 0 | 1 | 3 | 2 | 4 | 0 | 1 |

其中$A$,$B$分别表示$3^{3x+1}$和$x^3$被5除的余数.显然$A$按周期4变化,$B$按周期5变化,两种余数合起来按周期20变化,在一个周期中有4次余数相同:$x=1,12,18,19$.而$2005\div20=100\cdots5$,所以题目答案为$100\times4+1=401$个.

**10.** 0　$2^{2006}+1=(2^2)^{1003}+1=(2^2+1)(2^{2\times1002}-2^{2\times1001}+\cdots+1)$被$2^2+1=5$整除.所以$2^{m+2006}+2^m=2^m(2^{2006}+1)$被$2\times5=10$整除,末位数字是0.

**11.** 1004　因为$n^{2006}-1=(n-1)(n^{2005}+n^{2004}+n^{2003}+\cdots+n+1)$,所以$(n-1)^2$整除$n^{2006}-1$意味着$n-1$整除$n^{2005}+n^{2004}+\cdots+n+1=(n^{2005}-1)+(n^{2004}-1)+\cdots+(n^2-1)+(n-1)+2006$.但$n-1$整除$n^k-1$,$k=1,2,\cdots,2005$,所以$n-1$整除2006.又$n$为正偶数,故$n$的最大值为1004.

**12.** 21　$a_1=(10+2)(10-2)=10^2-2^2$,$a_2=(100+2)(100-2)=10^4-2^2$,$a_3=10^6-2^2$,$\cdots$,$a_{20}=10^{40}-2^2$,从而$S=(10^2+10^4+10^6+\cdots+10^{40})-20\times2^2=\overbrace{1010\cdots100}^{20个10}-80=\overbrace{1010\cdots1}^{19个10}0020$,故$S$的各位数字和为$19+2=21$.

**13.** 39　$42380=5\times8476$,并且42380不被6,7,8,9整除,所以花$=5$,美妙数学$=8476$."园"×"学"的个位为"妙",即"园"×6的个位为4,所以"园"$=9$.美+妙+数+学+花+园$=8+4+7+6+5+9=39$.

**14.** 第一次只能得到$1\times4+4+1=9$.因为要求最大新数,所以第二次取4和9,得到$4\times9+4+9=49$,同理可得第三次扩充的最大数是499.

**15.** 设这23个彼此不同的正整数为$a_1,a_2,\cdots,a_{23}$,并且它们的最大公约数是$d$,则$a_1=db_1,a_2=db_2,a_3=db_3,\cdots,a_{23}=db_{23}$,依题意,有$4845=a_1+a_2+\cdots+a_{23}=d(b_1+b_2+\cdots+b_{23})$.因为$b_1,b_2,b_3,\cdots,b_{23}$也是彼此不等的正整数,所以$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{23}\geqslant1+2+\cdots+23=276$.因此$4845=d(b_1+b_2+\cdots+b_{23})\geqslant275d$,所以$d\leqslant\frac{4845}{275}\leqslant17\frac{51}{92}$.又因为$4845=19\times17\times15$,因此$d$的最大值可能是17.当$a_1=17,a_2=17\times2,a_3=17\times3,\cdots,a_{22}=17\times22,a_{23}=17\times32$时,得$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{23}=17(1+2+3+\cdots+22)+17\times32=17\times253+17\times32=17\times285=4845$,而$(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{23})=17$,所以$d$的最大值等于17.

**16.** (1)奇数可写成$2n+1$的形式,其中$n$为整数.$(2n+1)^2=4n(n+1)+1$.$n$与$n+1$中必有一个为偶数,所以$4n(n+1)$被8整除,奇数$2n+1$的平方被8除余1.

(2)由(1)可知,每个奇数的平方和除以8余1,8个奇数的平方和被8整除,10个奇数

的平方和除以 8 余 2. 但 2006 除以 8 余 6. 因此 2006 不能表示成 10 个奇数的平方和.

**17.** (1) 设 $s$ 为 $a^2-b^2$ 与 $a^2$ 的最大公约数,则 $a^2-b^2=su,a^2=sv,u,v$ 为正整数. 于是 $a^2-(a^2-b^2)=b^2=s(v-u)$,可见 $s$ 是 $b^2$ 的约数. 因为 $a,b$ 互质,所以 $a^2,b^2$ 互质. 同理可证 $a^2-b^2$ 与 $b^2$ 互质.

(2) 因为 $k=ma^2=(m+116)b^2$,所以 $m(a^2-b^2)=116b^2,a>b$. 又因为 $a,b,m$ 都是正整数,所以 $a^2-b^2$ 整除 $116b^2$. 因为 $a^2-b^2$ 与 $b^2$ 互质,所以 $a^2-b^2$ 整除 116,即 $(a+b)(a-b)$ 整除 116. 而 $116=2^2\times 29$,$a+b$ 与 $a-b$ 具有相同的奇偶性,且 $a+b>a-b>0$,所以 $\begin{cases}a+b=29\\a-b=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a+b=2\times 29\\a-b=2\end{cases}$. 解得 $\begin{cases}a=15\\b=14\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=30\\b=28\end{cases}$. 因为 $a,b$ 互质,所以 $a=15,b=14$. $m=\dfrac{116b^2}{a^2-b^2}=2^4\times 7^2$. 故 $k=ma^2=2^4\times 7^2\times 15^2=176400$.

(3) 若 $a,b$ 的最大公约数为 5,设 $a=5a_1,b=5b_1$,则 $a_1,b_1$ 互质. 同(2)有 $m(a^2-b^2)=116b^2$,即 $m(25a_1^2-25b_1^2)=116(25b_1^2)$,所以 $m(a_1^2-b_1^2)=116b_1^2$,且 $a_1,b_1$ 互质. 根据(2)有 $m=2^4\times 7^2,a_1=15,b_1=14$,所以 $k=ma^2=m(5a_1)^2=25ma_1^2=5^2\times(2^4\times 7^2)\times(3\times 5)^2=4410000$.

**18.** 由 $n=\overline{3434ab}$ 是 9 的倍数可知 $3+4+3+4+a+b=14+a+b$ 是 9 的倍数,故 $a+b=4$ 或 13. 由 $n$ 是 8 的倍数可知 $\overline{4ab}$ 是 8 的倍数,从而 $\overline{ab}$ 是 8 的倍数. 易得 $a=4$,$b=0$ 符合条件,且使 $a+b=c$ 取最小值 4.

**19.** 数列中每个数除以 3 的余数按 1,1,2,0,2,2,1,0 的顺序周期出现,而 $90\div 8=11\cdots 2$,故所求余数等于数列中第 2 个数除以 3 的余数,即为 1.

**20.** 因为答案个位是 2,所以 $B\times A$ 只可能是 $1\times 2,2\times 6,3\times 4,4\times 8,6\times 7,8\times 9$,$12\times 21=252,26\times 62=1612,34\times 43=1462,48\times 84=4032,67\times 76=5092,89\times 98=8722$. 其中只有 $89\times 98=8722$ 的 4 个数字与 2872 全相同,因此正确答案是 8722.

# 第 2 讲 有 理 数

## 一、选择题

1. (第 9 届希望杯竞赛题) 有以下两个串数:1,3,5,7,…,1993,1995,1997,1999 和 1,4,7,10,13,…,1993,1996,1999,同时出现在这两个串数中的数共有 (    )

   A. 333 个  B. 334 个  C. 335 个  D. 336 个

2. (1997 年黄冈市竞赛题) 若有理数 $a,b,c$ 满足 $a+b+c=0,abc=2,c>0$,则 (    )

   A. $ab<0$  B. $|a|+|b|\geqslant 2$

   C. $|a|+|b|\geqslant 4$  D. $0<|a|+|b|\leqslant 1$

3.（第 11 届希望杯竞赛题）已知 $a=-\frac{1999\times1999-1998}{1998\times1998+1998}$，$b=\frac{2000\times2000-2000}{1999\times1999+1999}$，$c=-\frac{2001\times2001-2001}{2000\times2000+2000}$，则 $abc$ 的值等于（　　）

A. $-1$　　B. 3　　C. $-3$　　D. 1

4.（2002 年重庆市竞赛题）乘积 $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{199^2}\right)\left(1-\frac{1}{2000^2}\right)$ 等于（　　）

A. $\frac{1999}{2000}$　　B. $\frac{2001}{2000}$　　C. $\frac{1999}{4000}$　　D. $\frac{2001}{1000}$

5.（第 17 届希望杯竞赛题）设 $a$ 是有理数，用 $[a]$ 表示不超过 $a$ 的最大整数，如 $[1.7]=1$，$[-1]=-1$，$[0]=0$，$[-1.2]=-2$，则在以下四个结论中，正确的是（　　）

A. $[a]+[-a]=0$　　B. $[a]+[-a]$ 等于 0 或 1

C. $[a]+[-a]\neq0$　　D. $[a]+[-a]$ 等于 0 或 $-1$

6.（2001 年美国犹他州竞赛题）将 $a=3^{22}$，$b=4^{14}$，$c=9^{10}$，$d=8^{10}$ 由大到小的排列顺序是（　　）

A. $a>c>d>b$　　B. $a>c>b>d$

C. $a>d>b>a$　　D. $a>b>c>d$

E. $c>a>d>b$　　F. $c>d>a>b$

## 二、填空题

7.（第 17 届希望杯竞赛题）设 $a=3^{50}$，$b=4^{40}$，$c=5^{30}$，则 $a$，$b$，$c$ 中最大的是________，最小的是________。

8.（第 17 届希望杯竞赛题）计算，结果表示为循环小数：$\left(20.05-2\frac{1}{198}\right)\div7=$________。

9.（第 18 届五羊杯竞赛题）计算，结果表示为循环小数：$\left(2\frac{7}{45}-2.07\right)\div14=$________。

10.（1998 年江苏省竞赛题）代数式 $|x+1|+|x-2|+|x-3|$ 的最小值是________。

11.（1999 年希望杯竞赛题）计算：$2-2^2-2^3-2^4-2^5-2^6-2^7-2^8-2^9+2^{10}=$________。

12.（1997 年重庆市竞赛题）满足 $|5x+6|=6x-5$ 的 $x$ 的值是________。

13.（第 8 届希望杯竞赛题）计算：$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1997}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{1996}\right)-$

$\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{1997}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1996}\right)=$ ________.

14. (2006 年江苏省竞赛题) ※ 表示一种运算，$x※y=\frac{1}{xy}+\frac{1}{(x+1)(y+a)}$，如果 $2※1=\frac{2}{3}$，则 $100※99=$ ________.

15. (第 11 届华杯赛试题) 计算：$\left\{1-\left[\frac{3}{16}-(-0.25)^2\right]\times(-2)^4\right\}\div\left[3\times\left(-\frac{3}{8}\right)+5\div(-2)^3\right]=$ ________.

16. (第 18 届五羊杯竞赛题) 若 $P=\frac{20052005}{20062006}-\frac{20042004}{20052005}$，$Q=\frac{20042004}{20052005}-\frac{20032003}{20042004}$，$R=\frac{1}{2005}-\frac{1}{2006}$，则 $P,Q,R$ 的大小关系是________. (注：写出 $P,Q,R$ 两两的大小关系)

17. (第 17 届希望杯竞赛题) 计算：$1\frac{1}{2}-2\frac{5}{6}+3\frac{1}{12}-4\frac{19}{20}+5\frac{1}{30}-6\frac{41}{42}+7\frac{1}{56}-8\frac{71}{72}+9\frac{1}{90}=$ ________.

18. (第 18 届希望杯竞赛题)

$$\frac{1+2+3+4+5+\cdots+2005+2006}{\left(1-\frac{1}{1004}\right)\left(1-\frac{1}{1005}\right)\left(1-\frac{1}{1006}\right)\left(1-\frac{1}{1007}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2005}\right)\left(1-\frac{1}{2006}\right)}=$$

________.

19. (第 17 届希望杯竞赛题) 一个圆周上依次放有 1,2,3,…,20，共 20 个号码牌，随意选定一个号码牌(如 8)，从它开始，先把它拿掉，然后每隔一个拿掉一个(如依次拿掉 8,10,12,…)，并一直循环下去，直到剩余两个号码牌时停止，则最后剩余的两个号码的差的绝对值是________或________.

20. (2005 年河南省竞赛题) 一个正方体上相对的两个面上的数字之和都等于 $-2$，现将两个同样的正方体拼在一起，组成的几何体上看得见的五个面上的数字如图 2 - 2 所示，则看不见的七个面上的数字之和为________.

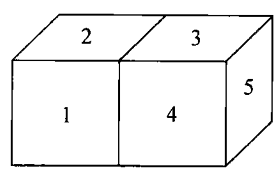

图 2 - 2

## 三、解答题

21. (首届华杯赛试题) 已知 $\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\cdots+\frac{1}{99\times100}=c$，求 $c$ 的值.

22. （第 2 届香港华杯赛试题）如果 $|a-2|+(ab-c)^2=0$，求 $\frac{1}{ab}+\frac{1}{(a+1)(b+1)}+\frac{1}{(a+2)(b+2)}+\cdots+\frac{1}{(a+2006)(b+2006)}$ 的值.

23. （第 11 届希望杯竞赛题）有理数 $a,b,c$ 均不为零，且 $a+b+c=0$，设 $x=\frac{|a|}{b+c}+\frac{|b|}{a+c}+\frac{|c|}{a+b}$，试求代数式 $x^{19}-99x+2000$ 的值.

24. （1999 年北京市迎春竞赛题）若 $a,b,c$ 为整数，且 $|a-b|^{19}+|c-a|^{99}=1$，试求 $|c-a|+|a-b|+|b-c|$ 的值．

25. （1998 年上海市竞赛题）某环形道路上顺次排列有四所中学：$A_1,A_2,A_3,A_4$，它们顺次有彩电 15 台，8 台，5 台，12 台，为了使各校的彩电台数相同，允许一些中学向相邻学校调出彩电，问：怎样调配才能使调出的彩电总台数最少？并求出调出彩电的最小总台数.

26. （第 2 届香港华赛试题）甲、乙、丙三人以不变的速度从 $A$ 地向 $B$ 地出发. 已知乙比丙迟了 10 分钟出发，出发后 20 分钟乙追上丙；甲比乙迟了 10 分钟出发，出发后 30 分钟甲追上乙. 问：甲出发后多久便可追上丙？

**答案与解析**

**1.** B　$1997\div2\div3$ 的整数为 333. 而这两串数中除第一个数外，后面每三个数就有一个数相同. 所以 $333+1=334$.

**2.** B　因为 $a+b+c=0$，所以 $a+b=-c\cdots$① 又因为 $abc=2$，$c>0$，所以 $a$ 与 $b$ 同时为负且只能是 $-1$，所以 $c=2$. 由 ① 可知 $|a+b|=|-c|=2$，易知 $|a|+|b|\geqslant|a+b|=2$.

**3.** A　因为 $a=-\frac{1999\times1999-1999}{1998\times1998+1998}=-\frac{1999\times(1999-1)}{1998\times(1998+1)}=-1$，同理可求 $b=-1$，$c=-1$. 所以 $abc=-1$.

**4.** D　因为 $1-\frac{1}{2^2}=\frac{3}{2^2}$，$1-\frac{1}{3^2}=\frac{4\times2}{3^2}$，$1-\frac{1}{4^2}=\frac{3\times5}{4^2}$，$1-\frac{1}{5^2}=\frac{4\times6}{5^2}$，…，$1-\frac{1}{1999^2}=\frac{1998\times2000}{1999^2}$，$1-\frac{1}{2000^2}=\frac{1999\times2001}{2000^2}$，所以原式 $=\frac{3}{2^2}\times\frac{4\times2}{3^2}\times\frac{3\times5}{4^2}\times\frac{4\times6}{5^2}\times\cdots\times\frac{1998\times2000}{1999^2}\times\frac{1999\times2001}{2000^2}=\frac{2001}{4000}$.

**5.** D　不妨设 $a\geqslant0$. 在 $a$ 为整数时，$[a]+[-a]=a+(-a)=0$. 在 $a$ 不为整数时，$[a]+[-a]=[a]+(-[a]-1)=-1$.

**6.** A　由已知可得 $a>c, d>b$，这样选项中 B 错（$b>d$），C 错（$c>a$），D 错（$b>d$），E 错（$c>a$），F 错（$c>a$）.

**7.** $b, c$　因为 $3^{50}=(3^5)^{10}=243^{10}, 4^{40}=(4^4)^{10}=256^{10}, 5^{30}=(5^3)^{10}=125^{10}$，又 $256^{10}>243^{10}>125^{10}$，所以 $4^{40}>3^{50}>5^{30}$，即 $b>a>c$.

**8.** $2.\dot{5}7864\dot{3}$　原式 $=(20.0\dot{5}-2.\dot{0}0\dot{5})\div 7=(20.0\dot{5}\dot{5}-2.0\dot{0}\dot{5})\div 7=18.\dot{0}\dot{5}\div 7=18.\dot{0}5050\dot{5}\div 7=2.\dot{5}7864\dot{3}$.

**9.** $0.00\dot{5}$　原式 $=\left(\frac{7}{45}-0.0\dot{7}\right)\div 14=\left(\frac{1}{45}-0.0\dot{1}\right)\div 2=\left(\frac{1}{45}-\frac{1}{90}\right)\div 2=\frac{1}{90}\div 2=\frac{1}{180}=0.00\dot{5}$. 另解：原式 $=(2.1\dot{5}-2.0\dot{7})\div 14=0.0\dot{7}\div 14=0.0\dot{1}\div 2=0.00\dot{5}$.

**10.** 4　根据绝对值的几何意义可知，当 $x=2$ 时，$|x+1|+|x-2|+|x-3|$ 有最小值，即 $|2+1|+|2-2|+|2-3|=3+1=4$.

**11.** 6　因为 $2^{n+1}-2^n=2^n(2-1)=2^n$，所以 $2^{10}-2^9=2^9$，$2^9-2^8=2^8$，…，$2^3-2^2=2^2$，$2^2+2=6$，故原式 $=6$.

**12.** 11　因为当 $5x+6\geqslant 0$ 时，$x\geqslant -\frac{6}{5}$，所以 $|5x+6|=5x+6$，所以 $5x+6=6x-5$，所以 $x=11$. 当 $5x+6<0$ 时，$x<-\frac{6}{5}$，所以 $|5x+6|=-5x-6$，所以 $-5x-6=6x-5$，所以 $x=-\frac{1}{11}$，综上所述，$x=11$.

**13.** $\frac{1}{1997}$　原式 $=\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1997}\right)-1\right]\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1996}\right)$

$$-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{1997}\right)\left[\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{1996}\right)-1\right]$$

$$=-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1996}\right)+\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{1997}\right)$$

$$=\frac{1}{1997}.$$

**14.** $\frac{2}{9999}$　因为 $x※y=\frac{1}{xy}+\frac{1}{(x+1)(y+a)}$，所以 $2※1=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{(2+1)(1+a)}=\frac{2}{3}$. 解得 $a=1$. 所以 $100※99=\frac{1}{100\times 99}+\frac{1}{101\times 100}=\frac{2}{9999}$.

**15.** $\frac{4}{7}$　原式 $=\left\{1-\left[\frac{3}{16}-\left(\frac{1}{4}\right)^2\right]\times 2^4\right\}\div\left[-\frac{9}{8}-\frac{5}{8}\right]=[1-(3-1)]\div\left(-\frac{7}{4}\right)$

$$=(-1)\div\left(-\frac{7}{4}\right)=\frac{4}{7}.$$

**16.** $P=R<Q$　注意到$\overline{abcdabcd}=\overline{abcd}\times1001$，可知$P=\frac{2005}{2006}-\frac{2004}{2005}=\left(1-\frac{1}{2006}\right)-\left(1-\frac{1}{2005}\right)=\frac{1}{2005}-\frac{1}{2006}=R$，$Q=\frac{2004}{2005}-\frac{2003}{2004}=\left(1-\frac{1}{2005}\right)-\left(1-\frac{1}{2004}\right)=\frac{1}{2004}-\frac{1}{2005}=\frac{2005-2004}{2004\times2005}=\frac{1}{2004\times2005}>R$.所以$P,Q,R$的大小关系是$P=R<Q$.

**17.** $1\frac{9}{10}$　原式$=5-\frac{5}{6}-\frac{19}{20}-\frac{41}{42}-\frac{71}{72}+\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\frac{1}{56}+\frac{1}{90}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)=2-\frac{1}{10}=1\frac{9}{10}$.

**18.** 4026042　$\left(1-\frac{1}{1004}\right)\left(1-\frac{1}{1005}\right)\left(1-\frac{1}{1006}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2006}\right)=\frac{1003}{1004}\times\frac{1004}{1005}\times\frac{1005}{1006}\times\cdots\times\frac{2005}{2006}=\frac{1003}{2006}=\frac{1}{2}$.原式$=2(1+2+3+\cdots+2006)=2007\times2006=4026042$.

**19.** 8,12　共需拿掉3次.以最小的为首，以最大的为尾.若不考虑首尾之间，则第一、二、三次拿掉后，相邻两数差的绝对值分别是2,4,8.若考虑首尾之间，则每次首与尾必拿掉其中一个，则第一、二、三次拿掉后，首尾两数差的绝对值分别是18,16,12.所以绝对值为8或12.

**20.** $-27$　每个正六方体六个面的数字之和为$-6$，所以12个面上的数字之和为$-12$，看得见的五个面上的数字之和为15，所以看不见的七个面上的数字之和为$-27$.

**21.** $c=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{100}=\frac{49}{100}$.

**22.** $|a-2|+(ab-2)^2=0\Rightarrow|a-2|=0$且$(ab-2)^2=0\Rightarrow a=2,b=1$.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{2007\times2008}\\&=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2007}-\frac{1}{2008}\right)=\frac{2007}{2008}.\end{aligned}$$

**23.** 易知$a,b,c$中必有一正两负或两正一负.不妨设$a>0,b<0,c<0$或$a<0,b>0,c>0$，所以$x=\frac{a}{b+c}-\frac{b}{a+c}-\frac{c}{a+b}=-1+1+1=1$或$x=-\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}=1-1-1=-1$，所以当$x=1$时，$x^{19}-99x+2000=1-99+2000=1902$.当$x=-1$时，$x^{19}-99x+2000=-1+99+2000=2098$.