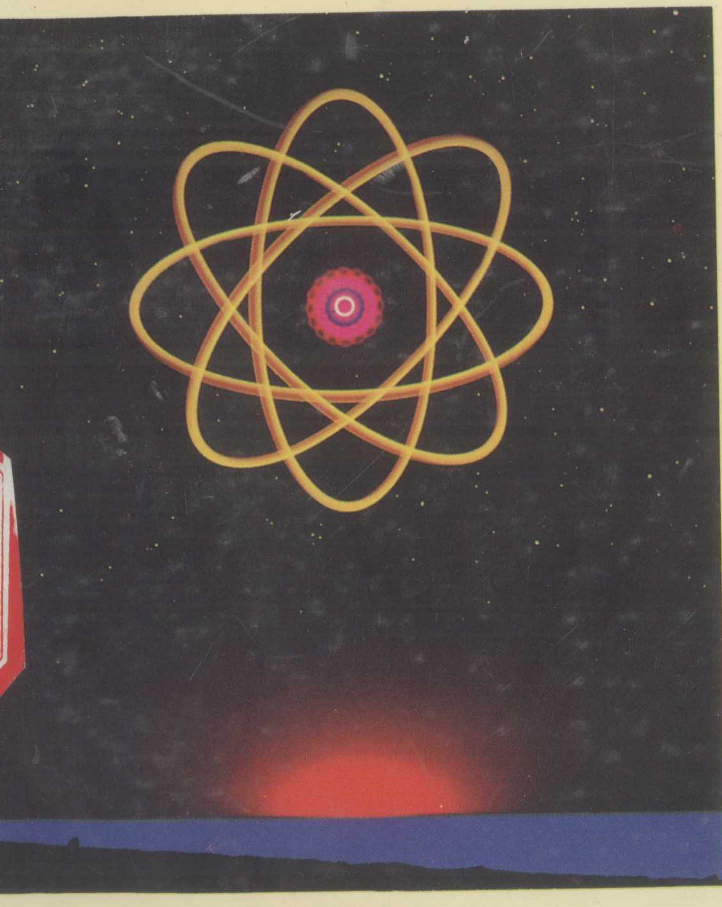
实迭代

ITERATION
OF REAL
FUNCTIONS

走向数学丛书

张景中 李 浩 著



实 迭 代

Iteration of Real Functions

张景中　李　浩　著

Zhang Jingzhong　Li Hao

责任编辑：孟实华

湖南教育出版社出版发行

湖南省新华书店经销　湖南省新华印刷三厂印刷

787×1092 毫米　32 开　印张：4.875　字数：100,000

1991 年 12 月第 1 版　1991 年 12 月第 1 次印刷

印数：1—1100

ISBN7－5355－1379－4／G · 1374

定价：2.50元

前　　言

王　元

从力学、物理学、天文学直到化学、生物学、经济学与工程技术，无不用到数学.一个人从入小学到大学毕业的十六年中，有十三、四年有数学课.可见数学之重要与其应用之广泛.

但提起数学，不少人仍觉得头痛，难以入门，甚至望而生畏.我以为要克服这个鸿沟，还是有可能的.近代数学难于接触，原因之一大概是由于其符号、语言与概念陌生，兼之近代数学的高度抽象与概括，难于了解与掌握.我想，如果知道讨论的对象的具体背景，则有可能掌握其实质.显然，一个非数学专业出身的人，要把数学专业的教科书都自修一遍，这在时间与精力上都不易做到.若停留在初等数学水平上，哪怕做了很多难题，似亦不会有助于对近代数学的了解.这就促使我们设想出一套“走向数学”小丛书，其中每本小册子尽量用深入浅出

的语言来讲述数学的某一问题或方面，使工程技术人员，非数学专业的大学生，甚至具有中学数学水平的人，亦能懂得书中全部或部分含义与内容. 这对提高我国人民的数学修养与水平，可能会起些作用. 显然要将一门数学深入浅出地讲出来，决非易事. 首先要对这门数学有深入的研究与透彻的了解. 从整体上说，我国的数学水平还不高，能否较好地完成这一任务还难说. 但我了解很多数学家的积极性很高，他们愿意为“走向数学”丛书撰稿. 这很值得高兴与欢迎.

承蒙国家自然科学基金委员会、中国数学会数学传播委员会与湖南教育出版社支持，得以出版这套“走向数学”丛书，谨致以感谢.

目　　录

一 什么是迭代

说起来很简单：同一个运算多次重复，就叫做迭代.

比方说，给了一个数 x，加上 1，得到结果 $x+1$，这就是对 x 施行了一种运算，叫做“加 1”运算. 在 $x+1$ 的基础上再加 1，也就是再作一次加 1 运算，得到 $x+2$. 这 $x+2$，就是加 1 运算的 2 次迭代. 还可以 3 次迭代，得 $x+3$，…，n 次迭代，得 $x+n$.

如果你不对 x 加 1，而是乘以 2，也是作一种运算. 乘 2 运算一次，得 $2x$，两次，得 $4x$，三次，$8x$，…，n 次得 $2^n x$.

你也可以对 x 作更复杂一点的运算. 比如取 x 的正弦 $\sin x$，两次就是 $\sin(\sin x)$，三次就是 $\sin\sin\sin x$，迭代 n 次，可写作

$$\underbrace{\sin\sin\cdots\sin x}_{n\text{个}}, \qquad (1\cdot 1)$$

或者 $\sin^{[n]}x$. 当然，也可以不加方括号，干脆写成 $\sin^n x$. 但这容易和 $\sin x$ 的 n 次方幂混淆. 所以还是加上[ ]好.

加 1 运算，乘 2 运算，即使作 n 次，结果也很容易写出来. 取正弦运算迭代 n 次，就很难表达. 不过，要是具体给了一个 x

的值，比如 $x_0=1$，用计算器马上可以求出

$$x_1=\sin x_0=\sin 1=0.8414709\cdots \tag{1·2}$$

再按一下“sin”键，得

$$x_2=\sin\sin x_0=\sin\sin 1=\sin 0.8414709\cdots=0.7456241\cdots \tag{1·3}$$

又按一下：

$$x_3=\sin x_2=\sin 0.7456241\cdots=0.678430477\cdots \tag{1·4}$$

这样按下去，你会发现当 n 很大时，$\sin^{[n]}1$ 会很接近于 0. 不过减少得相当慢. 按上 100 次，才变到 0.168…. 不久我们将证明

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\sin^{[n]}x=\sqrt{3}, \tag{1·5}$$

这就不是计算器能告诉我们的了！

你一定体会得到：有了电子计算器——其实也就是电子计算机，作运算的迭代是多么方便. 手指一按，迭代一次. 如果是微机而不是计算器，只要给出运算的程序，要它迭代多少次，便是多少次. 它还可以把迭代结果打印出来，画成曲线图，…，等等. 正因为如此，自从有了电子计算机，对迭代的研究，便一年年兴旺发达起来.

是不是什么运算都可以迭代呢？

不是的. 有些运算无法迭代. 例如：把两个数 x 和 y 加起来得到 $x+y$，这个运算无法迭代. 因为这种“加运算”是二元运算，必须施行于一对数上，而结果却不是一对数，它是一个数. 运算的作用域(定义域)和值域不同，是不好迭代的. 要迭代，就要求运算的取值域在定义域内(或至少与定义域有公共部份). 这种运算，实际上是集合到自身的映射. 于是，就有

定义 1.1 设 $f:M\to M$ 是集合 M 到自身的一个映射. 即

对任一个 $x \in M$ 有确定的 $y=f(x) \in M$. 约定，对任意的 $x \in M$：

$$\left.\begin{aligned} f^0(x) &= x \\ f^1(x) &= f(x) \\ f^2(x) &= f(f(x)) \\ f^{n+1}(x) &= f(f^n(x)) \end{aligned}\right\} \tag{1·6}$$

把映射 $f^n(x)$ 叫做 $f(x)$ 的 n 次迭代，并称 n 为 f^n（关于 f 的）迭代指数.

如果 f^n 有唯一确定的逆映射，便记之为 f^{-n}. 这样，迭代指数可以取一切整数. 但对于不可逆的映射 f，迭代指数只能取非负整数.

在定义中，集合 M 是很一般的. 它的元素可以是实数，复数，数组、数列，甚至曲线和曲面. 不过，在本书中，M 一般是实数轴上的区间，f 也就是定义在区间上的函数. 迭代，也就是函数的自复合.

当 $f(x)=x+1$ 时，有 $f^n(x)=x+n$，$f^{-n}(x)=x-n$；

当 $f(x)=2x$ 时，有 $f^n(x)=2^n x$，$f^{-n}(x)=2^{-n}x$；

当 $f(x)=\sin x$ 时，有 $f^n(x)=\underbrace{\sin\sin\cdots\sin}_{n\text{个}}x$，但 $f^{-n}(x)$ 就没有确定的意义了.

上面三个迭代函数，也就是一开始我们举的三个例子. 下面我们再看几个例：

例 1.1 有一个方法可以很快地求得正数 a 的平方根的很精确的近似值：

设 x_0 是一个与 $\sqrt{a}$ 较接近的数，取

$$x_1=\frac{1}{2}\left(x_0+\frac{a}{x_0}\right),\quad x_2=\frac{1}{2}\left(x_1+\frac{a}{x_1}\right),\quad \cdots$$

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right) \tag{1·7}$$

这种方法其实是在作函数 $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right)$ 的迭代. 如果开始时 x_0 和 $\sqrt{a}$ 相差不大，$f^n(x_0)=x_n$ 当 n 增大时迅速接近 $\sqrt{a}$. 这是因为，当 $x>0$ 时：

$$f(x)-\sqrt{a}=\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}-2\sqrt{a}\right)=\frac{1}{2x}(x-\sqrt{a})^2\geqslant 0 \tag{1·8}$$

这个不等式告诉我们：

1° 从任一点 x_0 出发，只要迭代一次，得到的 $x_1=f(x_0)$ 总不小于 $\sqrt{a}$；

2° 再迭代下去，$x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n\geqslant x_{n+1}\geqslant\sqrt{a}$，而且误差 $|x_n-\sqrt{a}|$ 一次比一次至少减半. 因为

$$\begin{aligned}|x_{n+1}-\sqrt{a}|&=|f(x_n)-\sqrt{a}|\\&=\left|\left(\frac{x_n-\sqrt{a}}{2x_n}\right)(x_n-\sqrt{a})\right|\\&\leqslant\frac{1}{2}|x_n-\sqrt{a}|,\end{aligned} \tag{1·9}$$

从而 $x_n\to\sqrt{a}$；

3° 当 $|x_n-\sqrt{a}|$ 很小时，因

$$|x_{n+1}-\sqrt{a}|\leqslant\left|\frac{1}{2x_n}(x_n-\sqrt{a})^2\right|\leqslant\frac{1}{2\sqrt{a}}|x_n-\sqrt{a}|^2 \tag{1·10}$$

所以 $|x_{n+1}-\sqrt{a}|$ 比 $|x_n-\sqrt{a}|$ 小得多.

实际计算，如求 $\sqrt{2}$ 的近似值，取 $x_0=1$，$x_3=\frac{577}{408}\doteq 1.414216$，已精确到 5 位有效数字了！

用迭代的手段步步逼近，精益求精，是在计算机上解许多科技问题的重要基本方法. 这也是大家重视迭代的原因之一.

例 1.2 一杯糖水，喝掉$\frac{2}{3}$，补充 10 克糖；加满水，再喝$\frac{2}{3}$，再补充 10 克糖；…，这样喝 10 次、补充 10 次，杯里还有 a 克糖，问杯内原有糖多少？

解 设原有糖 x 克，喝一次补充一次，糖的数量成为

$$f(x)=\frac{1}{3}x+10(\text{克}) \tag{1·11}$$

问题成为：已知 $f^{10}(x)=a$ 求 x.

有个办法可很快地找出 $f^{10}(x)$的表达式：

设在另一个盆里有糖 $x-15$ 克. 每当杯里喝一次、补充一次，同时从盆里拿走$\frac{2}{3}$的糖，那么，杯里的糖与盆里的糖数量间有什么关系呢？

一开始，盆里的糖比杯里少 15 克.

操作一次之后，杯里有糖$\left(\frac{1}{3}x+10\right)$克，盆里有糖$\frac{1}{3}(x-15)$克. 因为

$$\left(\frac{1}{3}x+10\right)-\frac{1}{3}(x-15)=15. \tag{1·12}$$

所以盆里的糖依然比杯里少 15 克.

但 x 是任意的，因而无论操作多少次，盆里的糖仍比杯里少 15 克.

操作 10 次，杯里糖是 a 克，盆里糖量好算，是$\left(\frac{1}{3}\right)^{10}(x-15)$克. 盆里比杯里少 15 克，得

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{10}(x-15)+15=a. \tag{1·13}$$

从这个等式不难解出 x.

找初值 x，不是这个例子的目的. 醉翁之意不在酒. 我们是

想说明：为了计算函数 $f(x)$ 的迭代 $f^n(x)$，有时可以找一个比较容易求迭代的函数 $g(x)$ 作为桥梁，从 $g^n(x)$ 过渡到 $f^n(x)$. 在这个例子里，

$$f(x)=\frac{1}{3}x+10,\ g(x)=\frac{1}{3}x \tag{1·14}$$

而 $f(x)$ 与 $g(x)$ 之间有关系：

$$\left.\begin{aligned}
&f(x)=\frac{1}{3}(x-15)+15=g(x-15)+15\\
&f(f(x))=g(f(x)-15)+15\\
&\qquad\quad\ =g(g(x-15))+15\\
&\cdots\cdots\\
&f^n(x)=g^n(x-15)+15=\left(\frac{1}{3}\right)^n(x-15)+15
\end{aligned}\right\} \tag{1·15}$$

这就把计算 $f^n(x)$ 的问题化成了计算 g^n 的问题. 这种转化手法很有用，下一章要专门讨论它.

例 1.3 设 $f(x)$ 是[0，1]上的函数，

$$f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{1}{2} & \left(0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}\right)\\ 2(1-x) & \left(\dfrac{1}{2}<x\leqslant 1\right)\end{cases} \tag{1·16}$$

试在[0，1]上找五个不同的点 x_0，x_1，x_2，x_3，x_4，使得 $f(x_0)=x_1$，$f(x_1)=x_2$，$f(x_2)=x_3$，$f(x_3)=x_4$，$f(x_4)=x_0$.

解 考虑到，若 $x\in\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$，则 $f(x)\in\left[\frac{1}{2},\ 1\right]$，若 $x\in\left[\frac{1}{2},\ 1\right]$，则 $f(x)$ 可能落在[0，1]的任一点. 这就不妨设想 $x_0\in\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$，而 x_1，x_2，x_3，x_4 均在 $\left[\frac{1}{2},\ 1\right]$ 内.（当然，这是试着来！）

把 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上的表达式的 n 次迭代写出来：

$$f^n(x)=(-2)^n\left(x-\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3}$$

（当 x，$f(x)$，…，$f^{n-1}(x)$ 都在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上时）

于是 x_0 与 x_1 之间有关系

$$\begin{cases} x_0+\frac{1}{2}=x_1 & \left(x_0\in\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) \\ (-2)^4\left(x_1-\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3}=x_0 & \end{cases} \tag{1·17}$$

由此解出 $x_0=\frac{2}{15}$，$x_1=\frac{19}{30}$，再算出 $x_2=f(x_1)=\frac{11}{15}$，$x_3=f(x_2)=\frac{8}{15}$，$x_4=\frac{14}{15}$. 易验证确有 $f(x_4)=x_0$. 所以要求的 5 个数是 $\left\{\frac{2}{15}, \frac{19}{30}, \frac{11}{15}, \frac{8}{15}, \frac{14}{15}\right\}$.

怎样迅速求出 f 在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上的迭代表示式是 $(-2)^n\cdot\left(x-\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3}$ 呢？可以按例 1.2 中提供的思想，取 $g(x)=-2x$，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有关系：

$$\begin{aligned} f(x)&=2(1-x)=(-2)\left(x-\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3} \\ &=g\left(x-\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3} \end{aligned} \tag{1·18}$$

两端同时迭代得：

$$f^n(x)=g^n\left(x-\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3}=(-2)^n\left(x-\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3} \tag{1·19}$$

另一种窍门是：首先断定 $f^n(x)$ 是一次式，其次断定这个一次式中 x 的系数是 $(-2)^n$. 再根据 $f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}$ 得 $f^n\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}$.
所以若

$$f^n(x)=(-2)^n x+b \tag{1·20}$$

则 $$f^n\left(\frac{2}{3}\right)=(-2)^n\frac{2}{3}+b=\frac{2}{3} \tag{1·21}$$

得 $b=\frac{2}{3}-(-2)^n\frac{2}{3}$，

故 $f^n(x)=(-2)^n x+\frac{2}{3}-(-2)^n\frac{2}{3}=(-2)^n\left(x-\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3}$.

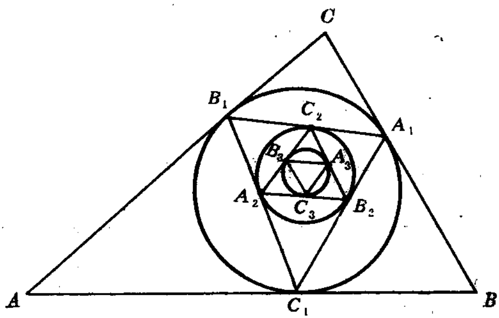


图 1.1

例 1.4 作$\triangle ABC$的内切圆，设三切点为$A_1B_1C_1$. 又作$\triangle A_1B_1C_1$的内切圆，得三个切点A_2、B_2、C_2. 如此作下去. 设$\triangle A_nB_nC_n$的内切圆三切点为A_{n+1}、B_{n+1}、C_{n+1}，而且A_{n+1}在边B_nC_n上，B_{n+1}在边A_nC_n上，C_{n+1}在边A_nB_n上. 那么，当n趋于无穷时，$\triangle A_nB_nC_n$的三个角变化趋势如何？

解 这实际上是个迭代问题. 不过基本变量不是一个，而是三个：三角形的三个角.

设$\triangle ABC$的三个角为$\angle A=x$，$\angle B=y$，$\angle C=z$，而$\triangle A_1B_1C_1$的三个角为$\angle A_1=x_1$，$\angle B_1=y_1$，$\angle C_1=z_1$，则从平面几何常识可知

$$
\begin{cases}
x_1=\dfrac{1}{2}(y+z) \\
y_1=\dfrac{1}{2}(x+z) \\
z_1=\dfrac{1}{2}(x+y)
\end{cases}
\tag{1·22}
$$

依此可以写出 $x_n=\angle A_n, y_n=\angle B_n, z_n=\angle C_n$ 与切点三角形的三个角 $x_{n+1}=\angle A_{n+1}$，$y_{n+1}=\angle B_{n+1}$，$z_{n+1}=\angle C_{n+1}$之间的关系：

$$
(x_{n+1}, \ y_{n+1}, \ z_{n+1})=\left(\frac{1}{2}(y_n+z_n), \ \frac{1}{2}(x_n+z_n), \ \frac{1}{2}(x_n+y_n)\right)
\tag{1·23}
$$

如果 x，y，z 三数中最大者与最小者之差为 a，易求出$\frac{1}{2}(y+z)$，$\frac{1}{2}(x+z)$，$\frac{1}{2}(x+y)$中最大者与最小者之差为$\frac{a}{2}$，从而 x_n，y_n，z_n 中最大者与最小者之差为$\frac{a}{2^n}$. 另一方面，总有

$$
x_n+y_n+z_n=\pi
\tag{1·24}
$$

可见当 $n\to+\infty$时，$(x_n, \ y_n, \ z_n)\to\left(\frac{\pi}{3}, \ \frac{\pi}{3}, \ \frac{\pi}{3}\right)$. 也就是说：切点三角形再取切点三角形，一次次作下去，得到的三角形越来越接近于正三角形.

这几个例子虽都很简单浅显，但也表明，与迭代有关的问题是多种多样的，涉及的技巧别具一格而饶有兴趣.

例 1.4 涉及以数组为变元的迭代，只不过聊备一格，不是本书要着重介绍的内容. 另外几例，例 1.1 涉及迭代的极限，例 1.2 涉及迭代的表达，例 1.3 涉及周期轨的概念，后面都将作更详细的讨论.

二　寻求迭代的表达式

把函数 $f(x)$ 的 n 次迭代写成 $f^n(x)$，并不能使人满意. 因为记号 $f^n(x)$ 只告诉我们要迭代多少次，而没有告诉我们迭代这么多次之后得到什么结果.

有些最简单的函数，迭代后的结果可以清楚地写出来. 如：

例 2.1　若 $f(x)=x+a$，则 $f^n(x)=x+na$

例 2.2　若 $f(x)=cx$，则 $f^n(x)=c^nx$

例 2.3　若 $f(x)=x^k$，则 $f^n(x)=x^{k^n}$

例 2.4　若 $f(x)=\dfrac{x}{1+bx}$，则 $f^n(x)=\dfrac{x}{1+nbx}$

例 2.5　若 $f(x)=ax+b$，则当 $a\neq 1$ 时有

$$f^n(x)=a^nx+\frac{1-a^n}{1-a}\cdot b.$$

这几个例子中，前三个很显然，可以硬算出来. 后两个勉强也能硬算出来. 但硬算毕竟不是好办法. 大多数的函数，迭代起来没有这么方便，得另想办法扩大战果.

数学家早已发现，用“相似法”可以写出更多函数的迭代表达式.

事情是这样的：如果有一个可逆函数 h，使

$$f(x)=h^{-1}\circ g\circ h(x) \tag{2·1}$$

（这里"$\circ$"表示复合运算. 例如：$f\circ g(x)$就是 $f(g(x))$. 用记号"$\circ$"比用括号方便. 多个函数复合时，用"$\circ$"要方便得多.）

则 $$f^2(x)=f\circ f(x)=h^{-1}\circ g\circ h\circ h^{-1}\circ g\circ h(x)$$
$$=h^{-1}\circ g^2\circ h(x) \tag{2·2}$$

这是因为 $h\circ h^{-1}(x)=x$ 之故. 一般地，

$$f^n(x)=h^{-1}\circ g^n\circ h(x) \tag{2·3}$$

这一来，便把 f 的 n 次迭代问题化为 g 的 n 次迭代问题了. 这个方法叫相似法，或共轭法.

例如，取 $g(x)=x+a$, $h(x)=\frac{1}{x}$，则 $h(x)$的反函数$h^{-1}(x)=\frac{1}{x}$. 令

$$h^{-1}\circ g\circ h(x)=\frac{1}{\frac{1}{x}+a}=\frac{x}{1+ax}=f(x) \tag{2·4}$$

马上知道例 2.4 的结果是对的：

$$f^n(x)=h^{-1}\circ g^n\circ h(x)=\frac{1}{\frac{1}{x}+na}=\frac{x}{1+nax} \tag{2·5}$$

这自然比直接把 $f(x)=\frac{x}{1+ax}$迭代 n 次要方便.

再看一个例子：取 $g(x)=cx$，$h(x)=x+a$，则 $h^{-1}(x)=x-a$，令

$$h^{-1}\circ g\circ h(x)=c(x+a)-a=cx+a(c-1)=f(x) \tag{2·6}$$

立刻得到：

$$f^n(x)=h^{-1}\circ g^n\circ h(x)=c^n(x+a)-a=c^nx+a(c^n-1) \tag{2·7}$$

若记 $a(c-1)=b$，则 $a=\dfrac{b}{c-1}$，$f(x)=cx+b$，而

$$f^n(x)=c^n x+\frac{c^n-1}{c-1}\cdot b \tag{2·8}$$

这表明例 2.5 的结果正确.

当然，除了硬算之外，还可以用别的方法得到 $f(x)=cx+b$ 的 n 次迭代. 在上一章例1.3中用的方法也可以在这里照搬：先肯定，由于函数 $f(x)=cx+b$ 是一次的，故 f^n 也是一次. 而且 $f^n(x)$ 一定有形式

$$f^n(x)=c^n x+B \tag{2·9}$$

问题是确定 B.

容易算出 $f(x)$ 有一个"不动点" $\dfrac{b}{1-c}$，只要 $c\neq1$.（若 $c=1$，$f(x)=x+b$，则 $f^n(x)=x+nb$）也就是：

$$f\left(\frac{b}{1-c}\right)=\frac{b}{1-c} \tag{2·10}$$

从而
$$f^n\left(\frac{b}{1-c}\right)=\frac{b}{1-c} \tag{2·11}$$

但按(2·9)，应有
$$c^n\left(\frac{b}{1-c}\right)+B=\frac{b}{1-c} \tag{2·12}$$

这就可以解出
$$B=\frac{1-c^n}{1-c}\cdot b \tag{2·13}$$

从而又一次证明了(2·8).

但这种手段过于依赖函数 $f(x)=cx+b$ 的特殊性，不足为法. 我们仍回到相似法. 如果函数 f、g 和 h 之间有(2·1)所表明的关系，即 h 可逆且有 $f=h^{-1}\circ g\circ h$，就说 f 与 g 相似，或共轭. 记作 $f\sim g$. 为了明确 f 与 g 是如何相似的，有时我们也说 f 经过 h 相似于 g，记作 $f\overset{h}{\sim}g$. 相似关系是一种等价关系，也就是说：

i) f 相似于自身，即 $f\sim f$；