




普通高等教育“十一五”国家级规划教材

# 高等代数与解析几何

第二版 / 下册 © 主编 陈志杰

 高等教育出版社

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

# 高等代数与解析几何

第二版/下册

主编 陈志杰

编者 陈志杰 韩士安 瞿森荣

温玉亮 陈咸平

高等教育出版社

## 内 容 提 要

本书是《高等代数与解析几何》的修订版,主要有两大基本特色,一是把几何的观念和代数的方法结合起来组织教与学,二是引入相关数学软件来实践代数与几何中的一些基本问题,并提供网上互动式多功能服务站。修订主要有以下几个方面:1. 为了降低学习难度,根据第一版使用的经验和反馈,把第一章里有关线性流形和子空间的内容删除,这些概念放到第三章中出现。2. 将第一版使用的有向体积定义作为几何意义放在评注中,把几何空间的直线与平面的内容集中放到新设的第四章。3. 考虑到计算多重积分的需要,在第六章第8节补充了有关空间区域到坐标平面投影的求法,并给出了例题和习题。4. 对习题的顺序和配备也作了调整,增加了部分入门级的基本题,较难的题排在后面打上星号,可以根据不同的教学需求进行选择。

本书分上、下两册。下册包括:几何空间的常见曲面、线性变换、线性空间上的函数、坐标变换与点变换、一元多项式的因式分解、多元多项式、多项式矩阵与若尔当典范形、若尔当典范形的讨论与应用。

本书可作为高等学校数学类专业高等代数与解析几何课程的教材,也可以作其他相关专业的教学参考书。

### 图书在版编目(CIP)数据

高等代数与解析几何. 下册/陈志杰主编. — 2版. — 北京:高等教育出版社,2008.12  
ISBN 978 7 04-024897-5

I. 高… II. 陈… III. ①高等代数 高等学校—教材  
②解析几何—高等学校—教材 IV. O15 O182

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 176670 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800 810-0598
邮政编码	100120	网 址	<a href="http://www.hep.edu.cn">http://www.hep.edu.cn</a>
总 机	010-58581000		<a href="http://www.hep.com.cn">http://www.hep.com.cn</a>
		网上订购	<a href="http://www.landracom.com">http://www.landracom.com</a>
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		<a href="http://www.landracom.com.cn">http://www.landracom.com.cn</a>
印 刷	北京市大天乐印刷有限公司	畅想教育	<a href="http://www.widedu.com">http://www.widedu.com</a>
		版 次	2001 年 2 月第 1 版
开 本	787×960 1/16		2008 年 12 月第 2 版
印 张	24	印 次	2008 年 12 月第 1 次印刷
字 数	440 000	定 价	29.90 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 24897-00

# 目 录

<b>第七章 几何空间的常见曲面</b> . . . . .	<b>1</b>
§1 立体图与投影 . . . . .	1
§2 空间曲面与曲线的方程 . . . . .	7
§3 旋转曲面 . . . . .	14
§4 柱面与柱面坐标 . . . . .	27
§5 锥面 . . . . .	33
§6 二次曲面 . . . . .	37
§7 直纹面 . . . . .	47
§8 曲面的交线与曲面围成的区域 . . . . .	53
<b>第八章 线性变换</b> . . . . .	<b>61</b>
§1 线性空间的基变换与坐标变换 . . . . .	61
§2 基变换对线性变换矩阵的影响 . . . . .	65
§3 线性变换的特征值与特征向量 . . . . .	68
§4 可对角化线性变换 . . . . .	76
§5 线性变换的不变子空间 . . . . .	79
<b>第九章 线性空间上的函数</b> . . . . .	<b>82</b>
§1 线性函数与双线性函数 . . . . .	82
§2 对称双线性函数 . . . . .	88
§3 二次型 . . . . .	100
§4 对称变换及其典范形 . . . . .	107
*§5 反称双线性函数 . . . . .	114
*§6 酉空间 . . . . .	117
*§7 对偶空间 . . . . .	122

<b>第十章 坐标变换与点变换</b> . . . . .	<b>126</b>
§1 平面坐标变换 . . . . .	126
§2 二次曲线方程的化简 . . . . .	130
*§3 平面的点变换 . . . . .	147
*§4 变换群与几何学 . . . . .	160
*§5 二次曲线的正交分类与仿射分类 . . . . .	161
*§6 二次超曲面方程的化简 . . . . .	166
<b>第十一章 一元多项式的因式分解</b> . . . . .	<b>172</b>
§1 一元多项式 . . . . .	172
§2 整除的概念 . . . . .	177
§3 最大公因式 . . . . .	185
*§4 不定方程与同余式 . . . . .	194
§5 因式分解定理 . . . . .	201
§6 重因式 . . . . .	209
§7 多项式的根 . . . . .	212
§8 复系数与实系数多项式 . . . . .	218
§9 有理系数多项式 . . . . .	222
<b>第十二章 多元多项式</b> . . . . .	<b>229</b>
§1 多元多项式 . . . . .	229
§2 对称多项式 . . . . .	234
*§3 结式 . . . . .	242
*§4 吴消元法 . . . . .	250
*§5 几何定理的机器证明 . . . . .	268
<b>第十三章 多项式矩阵与若尔当典范形</b> . . . . .	<b>281</b>
§1 多项式矩阵 . . . . .	281
§2 不变因子 . . . . .	288
§3 矩阵相似的条件 . . . . .	291
§4 初等因子 . . . . .	295
§5 若尔当典范形 . . . . .	300
§6 矩阵的极小多项式 . . . . .	306

---

<b>*第十四章 若尔当典范形的讨论与应用</b> . . . . .	<b>312</b>
§1 若尔当典范形的几何意义 . . . . .	312
§2 简单的矩阵方程 . . . . .	320
§3 矩阵函数 . . . . .	326
§4 矩阵的广义逆 . . . . .	333
§5 矩阵特征值的范围 . . . . .	341
<b>习题答案</b> . . . . .	<b>347</b>
<b>附录一 名词索引</b> . . . . .	<b>368</b>
<b>附录二 Maple 函数名索引</b> . . . . .	<b>372</b>
<b>附录三 Mathematica 函数名索引</b> . . . . .	<b>373</b>
<b>参考文献</b> . . . . .	<b>374</b>

## 第七章 几何空间的常见曲面

本章将研究几何空间中的常见曲面,也可以说是比较容易写出方程的曲面.它们是旋转面、柱面、锥面和二次曲面.为了展示曲面,必须把空间的图形绘制在平面上,这就需要使用合适的投影方法.因此在第1节我们讲解了画立体图的基本原理.然后分别介绍了上述常见曲面的方程及性质.我们尽可能多附一些图形,而且这些图形都是按正投影精确绘制的.在上机实习中还介绍了如何用 Maple 作出各种曲面的图形.这样既使读者对各类曲面有一个直观的形象,也为读者将来绘制立体图提供一些实例.

本章假定空间中已经取定一个直角标架  $[O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}]$ .

### §1 立体图与投影

在第四章 §1 里已经介绍了如何用斜二测投影画平面的立体图.我们知道,为了把 3 维的物体实现在平面上,一般总是用投影的方法.人用一只眼睛观察物体或者用照相机摄影都可以看成是从一个中心点出发向平面的投影.我们看到的照片和风景画里的图形都是符合这个规则的.因此中心投影是最符合我们的直观的.可是经过中心投影后,平行线可能变得不平行,物体的相对大小关系也不再保持.对空间图形的研究带来不便.而当眼睛与物体的距离变成无穷大时,中心投影成了平行投影.经过平行投影后,平行线仍保持平行,物体经平行移动后仍能保持原来的形状,这样就克服了中心投影的缺点.此外,平行投影的计算公式也比中心投影简单,因此除非有特殊的要求,在科研或工程中总是采用平行投影代替中心投影.如果平行投影的视线方向与像平面正交,则称为**正投影**,否则称为**斜投影**.如图 7-1 所示.

第四章 §1 介绍的斜二测投影是一种斜投影.球面经过斜投影后成了一个椭圆(如图 7-2).使人产生失真的感觉.图 7-3 是用斜二测投影画的一个球.其中与坐标平面  $yOz$  平行的截面仍被投影成圆.而球面的轮廓则是一个椭圆.这是斜投影的缺点.但在画平面或直线图形时不会产生这个问题.因此在画质量要求较高的曲面图形时一般不采用斜投影.

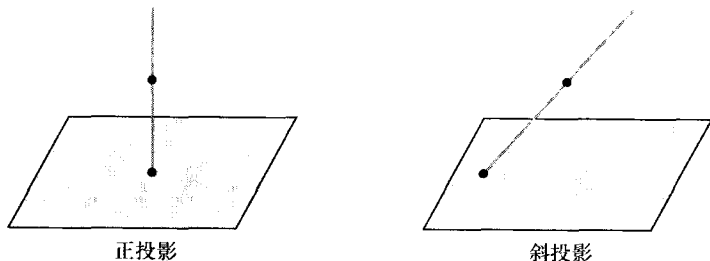


图 7-1

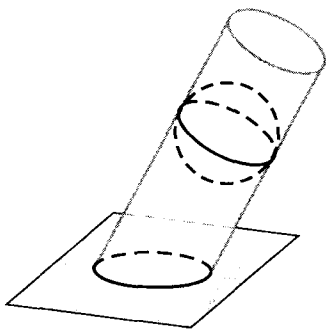


图 7-2

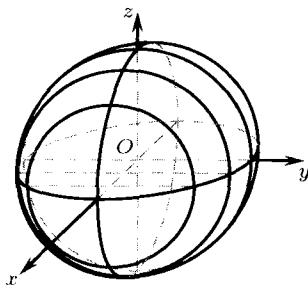


图 7-3

以下我们只讨论正投影.

设在空间已经有了一个直角标架. 只要确定视线的方向, 正投影就完全确定了. 确定视线方向的方式是很多的. 在数学软件 Maple 的 3 维图形显示中采用了视角  $(\theta, \phi)$  的刻画方式, 其意义如图 7-4 所示, 其中  $OM$  表示视线的方向.

最简单的正投影就是第五章例 4.2 所示的沿  $x$  轴方向的投影  $\mathcal{P}$ . 这时对应的视角是  $(0, \frac{\pi}{2})$ . 现在我们要推导任意视角下的变换公式.

**命题 1.1** 设空间正投影的视角为  $(\theta, \phi)$  (如图 7-4), 把投影平面上的直角坐标记为  $(X, Y)$ , 则 3 维欧几里得空间的坐标为  $(x, y, z)$  的点经正投影后得到的像点的坐标为

$$\begin{aligned} X &= -x \sin \theta + y \cos \theta, \\ Y &= -x \cos \phi \cos \theta - y \cos \phi \sin \theta + z \sin \phi. \end{aligned} \quad (1.1)$$

**证明:** 我们先通过正交变换把  $OM$  方向变成  $x$  轴的方向. 另一方面为了保持立体感, 必须使原来的  $z$  轴方向经变换后仍然投影到  $z$  轴上去, 也就是说必须使原来的  $z$  轴始终保持在  $xOz$  坐标平面内. 我们通过以下两个旋转的复合得到所需的正交变换.



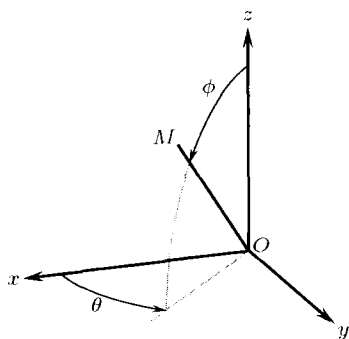


图 7-4

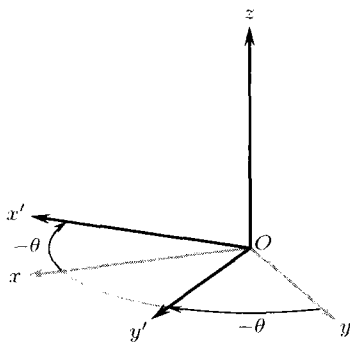


图 7-5

(1) 以  $z$  轴的正向为轴旋转  $-\theta$  角 (旋转的正向是用右手法则确定的, 即当大拇指作为轴的正向时, 其余四个手指的转向就是旋转的正向). 把这个旋转变换记为  $\mathcal{R}_1$ , 其矩阵为 (参见图 7-5 及 7-6(i)):

$$R_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

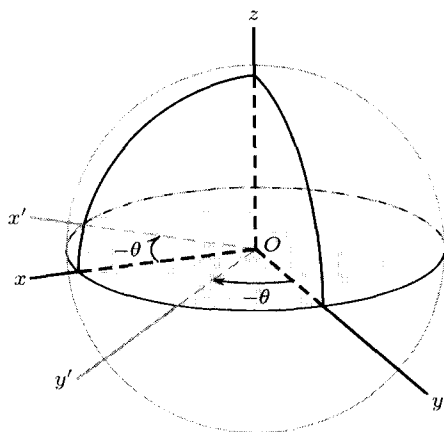


图 7-6 (i)

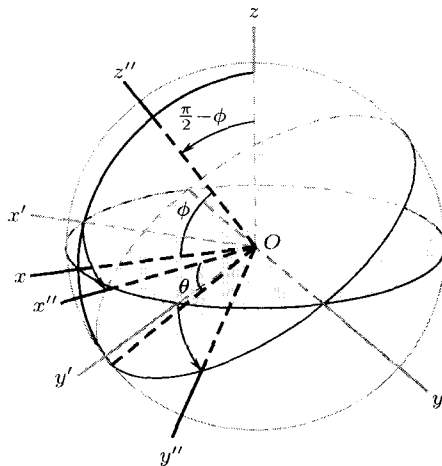


图 7-6 (ii)

(2) 再以  $y$  轴的正向为轴旋转  $\frac{\pi}{2} - \phi$  角 (参见图 7-6(ii)), 把这个旋转变换记

为  $\mathcal{R}_2$ , 其矩阵为

$$R_2 = \begin{pmatrix} \sin \phi & 0 & \cos \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos \phi & 0 & \sin \phi \end{pmatrix}.$$

请注意原来的 3 个坐标轴  $Ox, Oy, Oz$  分别被变换成了  $Ox'', Oy'', Oz''$ . 图 7-6(ii) 中的  $Ox$  方向相对于  $Ox'', Oy'', Oz''$  的位置与图 7-4 所示的视线的位置完全相同. 因此沿着  $Ox$  的方向向  $yOz$  平面作正投影就能得到视角为  $(\theta, \phi)$  的正投影.

因此只要在作正交变换  $\mathcal{R}_2\mathcal{R}_1$  后再作一个沿  $x$  轴方向的投影变换 (如第五章的例 4.2) 就能得到视角为  $(\theta, \phi)$  的正投影变换. 为了与习惯一致, 我们也可以把最后的投影变换改成到欧几里得空间平面的线性映射  $\mathcal{P}' : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , 使得  $Y$  轴的方向代表竖直向上的方向. 最终得到从 3 维欧几里得空间到 2 维欧几里得平面的线性映射  $\mathcal{P}'\mathcal{R}_2\mathcal{R}_1$ . 其矩阵为

$$\begin{aligned} P'R_2R_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \phi & 0 & \cos \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos \phi & 0 & \sin \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\cos \phi \cos \theta & -\cos \phi \sin \theta & \sin \phi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

空间中一个坐标为  $(x, y, z)$  的点经过正投影后成为平面中的坐标为

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\cos \phi \cos \theta & -\cos \phi \sin \theta & \sin \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -x \sin \theta + y \cos \theta \\ -x \cos \phi \cos \theta - y \cos \phi \sin \theta + z \sin \phi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

的点.  $\square$

再介绍一些常用的视角. 在机械制图中常常使用的是前视图、上视图与左视图. 前视图以  $y$  轴作为投影方向, 因此视角是  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , 上视图以  $z$  轴作为投影方向, 因此视角是  $(0, 0)$ , 左视图以  $x$  轴作为投影方向, 因此视角是  $(0, \frac{\pi}{2})$ . 画直观图时常常使用的正投影有正等测投影和正二等测投影两种.

正等测投影使用的视角是  $(45^\circ, 54.7^\circ)$ , 即  $\cos \phi = \frac{\sqrt{3}}{3}$ . 这时 3 个单位向量的投影分别为

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right), \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right), \quad \left(0, \frac{\sqrt{6}}{3}\right).$$

从而这 3 个投影的长度相等, 都是  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ . 所以被称为“等测”. 实际作图时加以放大, 以轴向的实际尺寸作为投影的尺寸.

正二等测投影使用的视角是  $(20.7^\circ, 70.5^\circ)$ , 即  $\tan \theta = \frac{\sqrt{7}}{7}$ ,  $\cos \phi = \frac{1}{3}$ . 这时 3 个单位向量的投影分别为

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{14}}{12}\right), \quad \left(\frac{\sqrt{14}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{12}\right), \quad \left(0, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right).$$

从而第 2 与第 3 个投影的长度相等, 都是  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ , 所以被称为“二等测”. 第一个投影的长度恰好等于另两个投影的一半. 实际作图时加以放大, 以  $y, z$  轴向的实际尺寸作为这两个轴向投影的尺寸, 以  $x$  轴向的实际尺寸的一半作为  $x$  轴向的投影的尺寸.

用正等测图形作图时, 首先是取定原点  $O$ , 过  $O$  作竖直向上的  $z$  轴, 再作指向左下方的  $x$  轴以及指向右下方的  $y$  轴,  $x$  轴和  $y$  轴都与  $z$  的负方向成  $60^\circ$  角. 如图 7-7 所示.

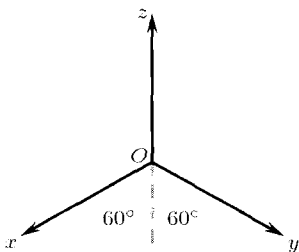


图 7-7

用类似方法可作正二等测投影图. 由于  $x$  轴与  $y$  轴的投影的斜率分别是

$$\frac{-\frac{\sqrt{14}}{12}}{-\frac{\sqrt{2}}{4}} = \frac{7}{3\sqrt{7}} \approx \frac{7}{8}, \quad \frac{-\frac{\sqrt{2}}{12}}{\frac{\sqrt{14}}{4}} = -\frac{1}{3\sqrt{7}} \approx -\frac{1}{8},$$

因此我们可以利用上述斜率的近似值绘出 3 个坐标轴, 如图 7-8 所示.

有时为了直观的需要, 可以把视角取为  $(69.3^\circ, 70.5^\circ)$ , 画出的坐标轴恰与图 7-8 的轴成镜射对称. 作图方法完全相同. 如图 7-9. 不过要注意使 3 个轴构成右手系.

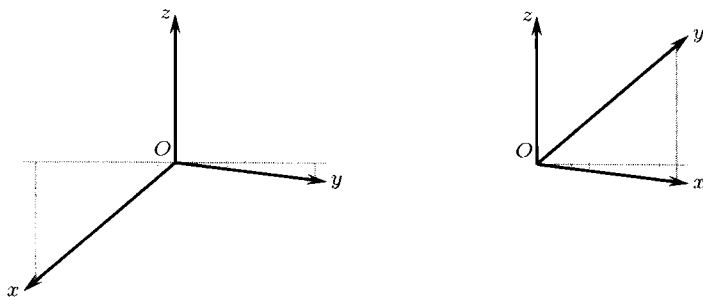


图 7 8

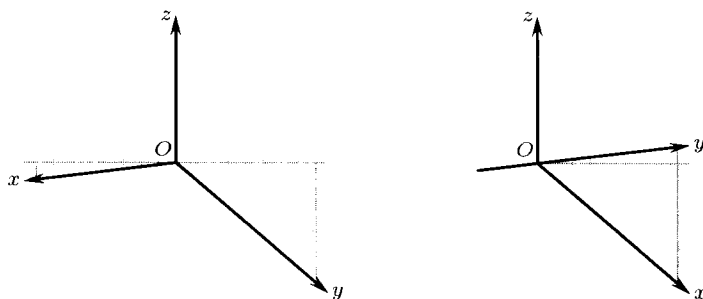
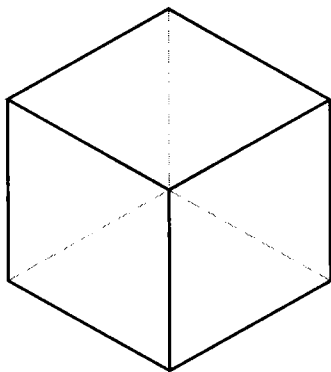
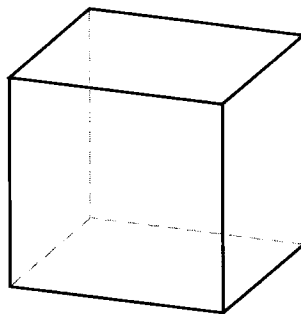


图 7-9

Maple 的默认视角取为  $(45^\circ, 45^\circ)$ . 图 7-10 显示了一个立方体在 3 种视角下的投影图.

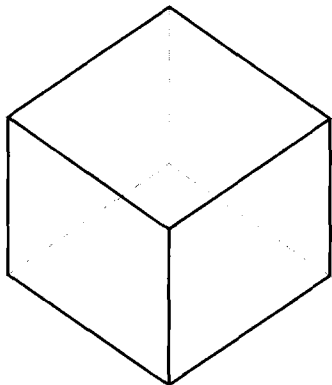


$\theta = 45^\circ, \phi = 54.7^\circ$



$\theta = 20.7^\circ, \phi = 70.5^\circ$

图 7-10 (i)



$$\theta = 45^\circ, \phi = 45^\circ$$

图 7-10 (ii)

## 习 题 7-1

1. 试分别用正等测投影及正二等测投影画出边长等于 2, 3, 4 的长方体以及正四面体.

## §2 空间曲面与曲线的方程

在解析几何中研究的空间曲面  $S$  一般都可以被描述为一个 3 元函数的零点集, 即满足以下方程的点的集合:

$$F(x, y, z) = 0.$$

这个方程称为曲面  $S$  的一般方程. 曲面的方程必须满足以下条件: 对于任意的点  $M_0 \in S$ , 如果  $M_0$  的坐标是  $(x_0, y_0, z_0)$ , 则  $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ ; 反之, 如果三元组  $(x_0, y_0, z_0)$  满足方程  $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ , 则以此三元组作为坐标的点  $M_0$  必在曲面  $S$  上. 简而言之就是: 曲面上的点满足方程, 满足方程的点在曲面上.

如果函数  $F(x, y, z)$  是多项式, 那么由方程  $F(x, y, z) = 0$  定义的曲面称为代数曲面 (algebraic surface), 否则称为超越曲面 (transcendental surface). 多项式  $F(x, y, z)$  的次数称为代数曲面的次数. 解析几何研究的是一次与二次代数曲面. 高次代数曲面是代数几何的研究对象, 而超越曲面则是微分几何的研究对象.

曲面也可以用如下的参数方程来描述:

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v); \end{cases}$$

其中参数  $u, v$  的定义域是平面的某个区域, 称为曲面的参数方程. 用计算机作图就必须利用参数方程. 方程  $z = f(x, y)$  也可看成参数方程的特殊形式.

**例 2.1** 求球心在原点  $O$ , 半径等于  $R$  的球面的方程.

**解:** 因为点  $P(x, y, z)$  在球面上的充分必要条件是  $|\overrightarrow{OP}|^2 = R^2$ , 由向量的长度公式可得

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

我们再求球面的参数方程. 如图 7-11, 过  $P$  点作坐标平面  $xOy$  的垂线, 设垂足为  $M$ . 把从  $x$  轴正向到  $OM$  的角记为  $\theta$ , 从  $z$  轴正向到  $OP$  的角记为  $\phi$ . 则球面的参数方程是

$$\begin{cases} x = R \sin \phi \cos \theta, \\ y = R \sin \phi \sin \theta, \\ z = R \cos \phi, \end{cases} \quad 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi. \quad \square$$

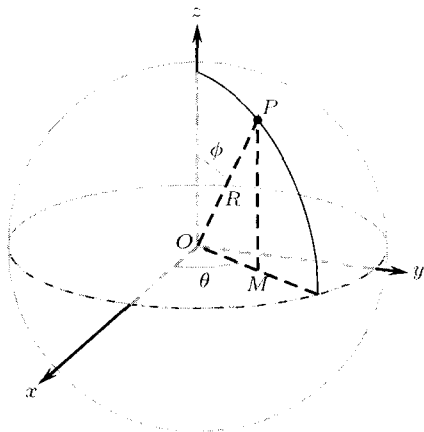


图 7-11

从例 2.1 可以看出, 球面上除去南北极 (即球面与  $z$  轴的交点) 外所有的点都对应唯一的一对参数  $(\theta, \phi)$ . 因此  $(\theta, \phi)$  被称为球面的曲线坐标 (*curvilinear coordinates*). 请注意地球上的经纬度就是一个曲线坐标, 不过它用的是  $(\theta, 90^\circ - \phi)$ , 其中  $\theta$  的取值范围是  $-180^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ , 角度的负值分别对应于西经和南纬.

因为空间中除原点外的任意一点  $P$  总是位于以原点为球心, 以  $R = |\overrightarrow{OP}|$  为半径的球面上, 而球面上的点 (除去南北极) 又对应唯一的曲线坐标  $(\theta, \phi)$ . 因此除去  $z$  轴外, 空间的点  $P$  由有序三元实数组  $(R, \theta, \phi)$  唯一确定. 我们把

$(R, \theta, \phi)$  称为空间中的点  $P$  的球面坐标 (spherical coordinates), 其中  $R \geq 0$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ ,  $0 \leq \phi \leq \pi$ . 点  $P$  的球面坐标  $(R, \theta, \phi)$  与直角坐标  $(x, y, z)$  的关系为

$$\begin{cases} x = R \sin \phi \cos \theta, & R \geq 0, \\ y = R \sin \phi \sin \theta, & 0 \leq \theta < 2\pi, \\ z = R \cos \phi, & 0 \leq \phi \leq \pi. \end{cases}$$

类似于例 2.1, 以  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  为球心, 以  $R$  为半径的球面的方程是

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2,$$

展开后得

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0x - 2y_0y - 2z_0z + (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2) = 0.$$

这个方程的特点是: (i) 平方项系数相等, 都是非零实数; (ii) 不含乘积项  $xy, xz, yz$ . 那么反过来如何呢?

**例 2.2** 方程

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0$$

确定的曲面是怎样的?

**解:** 经配方后可得

$$(x + b_1)^2 + (y + b_2)^2 + (z + b_3)^2 + (c - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2) = 0.$$

因此当  $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 > c$  时, 这是一个球心在  $(-b_1, -b_2, -b_3)$ , 半径为  $\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - c}$  的球面; 当  $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = c$  时, 退化成一个点  $(-b_1, -b_2, -b_3)$ ; 当  $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 < c$  时, 方程的零点集是空集, 称它表示一个虚球面.  $\square$

空间的曲线一般可以被表示成含两个方程的联立方程组的零点集:

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

即空间中的曲线可以看成是两个曲面的交线. 这样的方程组称为曲线的一般方程.

曲线的参数方程则是只含一个参数的方程组:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \quad a \leq t \leq b.$$

**例 2.3**  $xOy$  平面上以原点为圆心, 以  $R$  为半径的圆可以被看成是球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  与坐标平面  $z = 0$  的交线, 因此它的方程是

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ z = 0. \end{cases} \quad \square$$

**例 2.4** 一个质点一方面绕  $z$  轴作匀速圆周运动, 一方面又平行于  $z$  轴的正向作匀速直线运动, 求这个质点运动的轨迹方程.

**解:** 如图 7-12, 设质点运动的起点是  $A(a, 0, 0)$ , 质点作圆周运动的角速度是  $\omega$ , 质点作匀速直线运动的速度是  $v$ . 如果经  $t$  秒后质点运动到了  $P$  点,  $P$  点在  $xOy$  平面上的投影是  $M$ . 则

$$\theta = \angle AOM = \omega t, \quad \overrightarrow{MP} = vt \vec{k}.$$

因而

$$\overrightarrow{OP} = a \cos \omega t \vec{i} + a \sin \omega t \vec{j} + vt \vec{k}.$$

写成坐标形式就是

$$\begin{cases} x = a \cos \omega t, \\ y = a \sin \omega t, \\ z = vt, \end{cases} \quad -\infty < t < +\infty.$$

也可把角度  $\theta$  作为参数, 可得

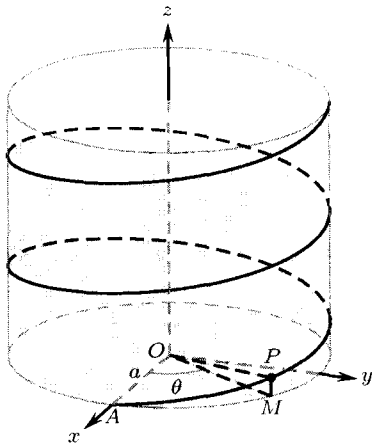


图 7-12



$$\begin{cases} x = a \cos \theta, \\ y = a \sin \theta, \\ z = b\theta, \end{cases} \quad -\infty < \theta < +\infty.$$

这条曲线称为圆柱螺旋线.

把参数方程中的参数  $\theta$  消去后可以得到曲线的一般方程

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ y = a \sin \frac{z}{b}. \end{cases}$$

可是仔细研究这个方程组可以发现, 这两个曲面的交线包含两支曲线. 即除了原来的曲线外还增加了一条与原曲线沿  $x$  轴方向成镜面对称的曲线, 其参数方程是

$$\begin{cases} x = -a \cos \theta, \\ y = a \sin \theta, \\ z = b\theta, \end{cases} \quad -\infty < \theta < +\infty.$$

这是由于消去参数时产生了增根所致. 如果采取另一种消去参数的方式, 可以避免这个问题:

$$\begin{cases} x = a \cos \frac{z}{b}, \\ y = a \sin \frac{z}{b}. \end{cases} \quad \square$$



### 上机实验

不论是在 Maple 中使用函数 plot3d 还是在 Mathematica 里使用函数 Plot3D (参见第四章 §1 的上机实验) 作曲面图形, 都需要把曲面的方程  $F(x, y, z) = 0$  化成函数  $z = f(x, y)$  的形式, 再利用参数指定自变量  $x, y$  的变化范围. Maple 或 Mathematica 的作图过程是这样的: 把区间  $[a, b]$  与  $[c, d]$  分成若干等分, 计算格点  $(x_i, y_j)$  上的函数值  $z_{ij} = f(x_i, y_j)$ , 再用直线段把  $(x_i, y_j, z_{ij})$  与相邻的点  $(x_{i\pm 1}, y_{j\pm 1}, z_{i\pm 1, j\pm 1})$  连接, 构成一个网. 把被遮盖的部分隐去, 再按光线照射的角度加以着色, 就可得到曲面的图像. 在一般的情况下通过改变视角, 可以得到相当逼真的图形. 可是这种方式并不总是有效的. 例如为了画例 2.1 的球面, 需要把方程化成  $z = \pm \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$  的形式, 把上下两个半球合起来才能得到一个球. 而且网格的方向是沿  $x, y$  方向的, 极不自然. 图 7-13 的半球就是在 Maple 里用以下语句作出来的:

```
>plot3d(sqrt(400-x^2-y^2),x=-20..20,y=-20..20,scaling=constrained);
```

为了使球面的图形反映球面的特征, 应该使用球面坐标或参数方程的形式.



Maple 里使用球面坐标作图的函数有