一题多解丛书

高中数学解题思考方法

刘嘉琨　明知白　薛川坪
蒋佩锦　卢　韦　张　环　编

学术书刊出版社

一题多解丛书

高中数学解题思考方法

刘嘉琨　明知白　薛川坪
蒋佩锦　卢　伟　张　环　编

学术书刊出版社

内 容 提 要

本书密切配合高中数学教材的内容，精选了代数、三角、立体几何和解析几何的一百多题，采取一题多解的形式，揭示数学中的基本概念、思考方法和解题技巧，以培养和提高学生学习数学的兴趣与解题的能力。

本书可供高中学生自学和复习使用，也可供高中数学教师作教学参考书用。

一题多解丛书

高中数学解题思考方法

刘嘉琨　明知白　薛川坪
蒋佩锦　卢　伟　张　环　编

学术书刊出版社出版（北京海淀区学院南路86号）
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
四季青印刷厂印刷

*

开本：787×1092 毫米 1/32　印张：7.75　字数：175 千字
1990年6月第1版　1990年6月第1次印刷
印数：1—13 700册　定价：3.80元
ISBN 7-80045-217-4/G·37

出版者的话

为了使广大的小学、中学学生从解答数学题的过程中，复习和巩固所学的基本知识、基本概念和基本技能，掌握解题思路，学会处理千变万化的数学题的方法，我们出版了“一题多解”丛书。这本《高中数学解题思考方法》是该丛书之一。

可以说，解答小学、中学的初级数学题的思维方法，也是将来学习高深的数学以及进行科学研究时，经常用到的基本思考方法。因此，掌握数学思维方法是学好数学的根本目的之一。

实践证明，“一题多解”是培养和训练数学思维能力的一种重要手段。

我们衷心希望“一题多解”丛书，能成为广大小、中学生的良师益友。

目　　录

一、代　　数

【问题1】 已知 $(x+2)^2+\frac{y^2}{4}=1$，试求 x^2+y^2 的最大值与最小值。

分析：此题属于有约束条件的二次函数的最值问题，一是用代数方法解，令 $u=x^2+y^2$，从已知条件得出 $y^2=f(x)$，代入 x^2+y^2 中，再求 u 的最值；二是利用椭圆 $(x+2)^2+\frac{y^2}{4}=1$ 的参数方程求解，即在圆系 $x^2+y^2=k$ 中，求出与椭圆相交的半径最大与最小的圆。

解法一 由 $(x+2)^2+\frac{y^2}{4}=1$ 得

$$y^2=4-4(x+2)^2=-4x^2-16x-12,$$

将它代入到 x^2+y^2 中，消去 y^2，得

$$x^2+y^2=-3x^2-16x-12$$

$$=-3\left(x+\frac{8}{3}\right)^2+\frac{28}{3} \qquad ①$$

由已知条件知，

$$(x+2)^2\leqslant 1,$$

即

$$-3\leqslant x\leqslant -1 \qquad ②$$

这就是说，函数①的定义域是②。因此，

当 $x=-\frac{8}{3}$ 时，函数 x^2+y^2 有最大值 $\frac{28}{3}$；

当 $x=-1$ 时，函数 x^2+y^2 有最小值 1。

解法二　可给椭圆的参数方程是

$$\begin{cases} x=-2+\cos\theta, \\ y=2\sin\theta, \end{cases}$$

其中参数$\theta\in(0,2\pi)$，于是，

$$\begin{aligned} x^2+y^2&=(-2+\cos\theta)^2+(2\sin\theta)^2 \\ &=\cos^2\theta-4\cos\theta+4+4(1-\cos^2\theta) \\ &=-3\cos^2\theta-4\cos\theta+8 \\ &=-3\left(\cos\theta+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{28}{3} \end{aligned}$$

由此可知：

当$\cos\theta=-\dfrac{2}{3}$时，x^2+y^2的最大值是$\dfrac{28}{3}$；

当$\cos\theta=1$时，x^2+y^2的最小值是1。

【问题2】　设函数$f(x)=\log_3\left(x^2-4mx+4m^2+m+\dfrac{1}{m-1}\right)$，其中$m$是实数，又用$M$表示集合$\{m\mid m>1\}$。

（1）求证：当$m\in M$时，则$f(x)$对所有实数x都有意义；反之，当$f(x)$对所有实数x都有意义，则$m\in M$；

（2）当$m\in M$时，求函数$f(x)$的最小值；

（3）求证：对每一个$m\in M$，函数$f(x)$的最小值不小于1。

分析：本题给出的函数$f(x)$是二次函数与对数函数的复合函数并含有参数m。已指定m的取值范围是实数集M，要求讨论函数的定义域与最小值问题。此题可从二次函数、对数函数的定义域、单调性入手。

解法一　(1)证：当$m\in M$时，则$m>1$，即$m-1>0$。于是

$$x^2-4mx+4m^2+m+\frac{1}{m-1}$$

$$=(x-2m)^2+m+\frac{1}{m-1}\geqslant m+\frac{1}{m-1}>0 \qquad ①$$

因此当 $m\in M$ 时，函数 $f(x)=\log_3\left(x^2-4mx+4m^2+m+\frac{1}{m-1}\right)$ 对一切实数 x 都有意义。

反之，因 $f(x)$ 对一切实数 x 都有意义，故

$$x^2-4mx+4m^2+m+\frac{1}{m-1}>0,$$

即
$$(x-2m)^2+m+\frac{1}{m-1}>0,$$

$\because (x-2m)^2$ 非负，$\therefore m+\frac{1}{m-1}>0$，即 $m+\frac{1}{m-1}>0$，即 $\frac{m^2-m+1}{m-1}>0$ 或 $\frac{\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}{m-1}>0$。

由于上式左端的分子总是正数，所以它的分母 $m-1>0$，即 $m>1$，从而 $m\in M$。

(2)因为以 3 为底的对数函数是增函数，所以，从①式得

$$f(x)=\log_3\left[(x-2m)^2+m+\frac{1}{m-1}\right]$$

$$\geqslant\log_3\left(m+\frac{1}{m-1}\right)。$$

又因为 $f(2m)=\log_3\left(m+\frac{1}{m-1}\right)$，

所以，当 $m\in M$ 时，$f(x)$ 的最小值是 $\log_3\left(m+\frac{1}{m-1}\right)$。

（3）当$m\in M$时，有$m>1$， 所以 $m+\dfrac{1}{m-1}-3$

$$=\frac{m^2-m+1-3m+3}{m-1}=\frac{m^2-4m+4}{m-1}$$

$$=\frac{(m-2)^2}{m-1}\geqslant 0.$$

即 $m+\dfrac{1}{m-1}\geqslant 3$.

上式两端取以3为底的对数得

$$\log_3\left(m+\frac{1}{m-1}\right)\geqslant\log_3 3=1.$$

根据(2)的结果可知：对每一个$m\in M$，$f(x)$的最小值都不小于1.

解法二 (1)设 $u=x^2-4mx+4m^2+m+\dfrac{1}{m-1}$，因为

x^2项的系数$a=1>0$，其判别式 $\Delta=\dfrac{4(m^2-m+1)}{1-m}$，

当$m\in M$时，$m>1$，恒有$\Delta<0$，所以对于$x\in R$都有 $u>0$，故$f(x)$都有意义；反之，若对于所有的$x\in R$，$f(x)$都有意义，则有$u>0$恒成立，则有$\Delta<0$，应有$1-m<0$，$m>1$，所以$m\in M$.

（2） 同解法一.

（3） 当$m\in M$时，有$m>1$，所以

$$m+\frac{1}{m-1}=(m-1)+\frac{1}{m-1}+1$$

$$\geqslant 2\sqrt{(m-1)\cdot\frac{1}{m-1}}+1=3,$$

上式两端取以3为底的对数得

$$\log_3\left(m+\frac{1}{m-1}\right)\geqslant\log_3 3=1.$$

根据(2)可知：对于每一个$m\in M$，$f(x)$的最小值都不小于1。

【问题3】 在$y=\log_3 x$的图象上，取横坐标为a，$a+2$，$a+4$（$a>1$）的三点A、B、C，设ΔABC面积为S，求证：$S<0.54$（已知$\lg 2=0.3010$，$\lg 3=0.4771$）。

分析：由已知ΔABC的面积S是a的函数，即$S=f(a)$，如图1-1所示，可利用面积关系求$f(a)$，求证$S<0.54$实质是求$f(a)$的值域。

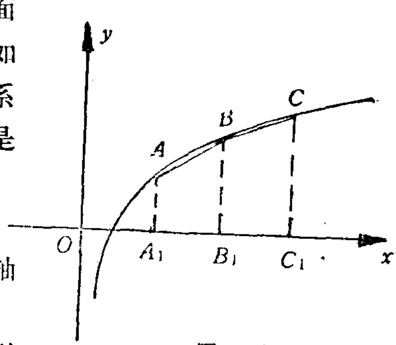

图 1-1

证法一 过A, B, C作x轴的垂线，垂足分别为A_1，B_1，C_1。设梯形AA_1B_1B，梯形BB_1C_1C，梯形AA_1C_1C的面积分别为S_1, S_2, S_3，则

$$S=S_1+S_2-S_3$$

$$=\frac{1}{2}[\log_3 a+\log_3(a+2)]\cdot 2+\frac{1}{2}[\log_3(a+2)$$

$$+\log_3(a+4)]\cdot 2-\frac{1}{2}[\log_3 a+\log_3(a+4)]\cdot 4$$

$$=\log_3\frac{(a+2)^2}{a(a+4)}=-\log_3\frac{a(a+4)}{(a+2)^2}$$

$$= -\log_3\left[1-\frac{4}{(a+2)^2}\right].$$

因为$a>1$，所以$(a+2)^2>9$，故

即 $$-\frac{4}{9}<-\frac{4}{(a+2)^2}<0.$$

$$\frac{5}{9}<1-\frac{4}{(a+2)^2}<1.$$

$\because \log_3 x$是增函数，$\therefore \log_3\frac{5}{9}<\log_3\left[1-\frac{4}{(a+2)^2}\right]$

<0，

故 $S<-\log_3\frac{5}{9}=2-\frac{1-\lg 2}{\lg 3}\approx 0.535$，即$S<0.54$.

证法二 由 $S=\log_3\frac{(a+2)^2}{a(a+4)}=\log_3\left[1+\frac{4}{a(a+4)}\right]$

$$=\log_3\left[1+\frac{4}{(a+2)^2-4}\right].$$

因为$a>1$，所以 $(a+2)^2-4>5$，故

$$0<\frac{4}{(a+2)^2-4}<\frac{4}{5},$$

即 $$1<1+\frac{4}{(a+2)^2-4}<\frac{9}{5}$$

$\because \log_3 x$ 是增函数，$\therefore$ $0<\log_3\left[1+\frac{4}{(a+2)^2-4}\right]$

$$<\log_3\frac{9}{5}$$

故 $S<\log_3\frac{9}{5}\approx 0.535$，即

$S<0.54$.

说明 求函数 $S=\log_3\frac{(a+2)^2}{a(a+4)}$ 的值域，首先要对 $\frac{(a+2)^2}{a(a+4)}$ 变形。若用判别式法求值域，则要特别注意 $a>1$ 的条件。

【问题 4】 设 $0<x<1$，$a>0$，$a\neq 1$，比较 $|\log_a(1-x)|$ 与 $|\log_a(1+x)|$ 的大小。

解法一 因为 $0<x<1$，所以

$$|\log_a(1-x)|=\left|\frac{\lg(1-x)}{\lg a}\right|=\frac{|\lg(1-x)|}{|\lg a|}$$

$$=-\frac{\lg(1-x)}{|\lg a|},$$

$$|\log_a(1+x)|=\left|\frac{\lg(1+x)}{\lg a}\right|=\frac{|\lg(1+x)|}{|\lg a|}$$

$$=\frac{\lg(1+x)}{|\lg a|},$$

于是，

$$|\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|=-\frac{\lg(1-x)}{|\lg a|}-\frac{\lg(1+x)}{|\lg a|}=-\frac{\lg(1-x)+\lg(1+x)}{|\lg a|}=-\frac{\lg(1-x^2)}{|\lg a|} \quad ①$$

$\because\ 0<x<1$，$\therefore\ 0<1-x^2<1$。

由对数性质知，$\lg(1-x^2)<0$，因此①式为正值，即 $|\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|>0$。

$\therefore |\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$，

解法二 $\frac{|\log_a(1-x)|}{|\log_a(1+x)|}=\left|\frac{\log_a(1-x)}{\log_a(1+x)}\right|$

$$=|\log_{1+x}(1-x)| \quad ①$$

$\because \quad 0<x<1$，$\therefore \quad 1+x>1$，$0<1-x<1$。

由对数函数的性质，得$\log_{1+x}(1-x)<0$，故

$$|\log_{1+x}(1-x)|=-\log_{1+x}(1-x)$$

$$=\log_{1+x}\frac{1}{1-x} \quad ②$$

$\because 0<1-x^2<1$，$\therefore 0<(1+x)(1-x)<1$，

$\therefore \quad \dfrac{1}{1-x}>1+x$。 $\quad \because 1+x>1$，

$$\therefore \quad \log_{1+x}\frac{1}{1-x}>\log_{1+x}(1+x)=1 \quad ③$$

由①、②和③知，

$$\frac{|\log_a(1-x)|}{|\log_a(1+x)|}>1,$$

$\therefore |\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$。

解法三 令$A=|\log_a(1-x)|^2-|\log_a(1+x)|^2$

$$=[\log_a(1-x)]^2-[\log_a(1+x)]^2$$

（绝对值性质）

$$=\log_a(1-x^2)\cdot\log_a\frac{1-x}{1+x}$$

（平方差公式及对数性质）

$$=\frac{1}{\lg^2 a}\cdot\lg(1-x^2)\cdot\lg\frac{1-x}{1+x}。$$

（对数换底）

$\because \quad 0<x<1$，$\therefore \quad 0<1-x^2<1$，$0<\dfrac{1-x}{1+x}<1$，

故 $\quad \lg(1-x^2)<0$，$\lg\dfrac{1-x}{1+x}<0$，于是$A>0$，即

$$|\log_a(1-x)|^2 > |\log_a(1+x)|^2,$$

$\because \quad |\log_a(1-x)| > 0,\quad |\log_a(1+x)| > 0,$

$\therefore \quad |\log_a(1-x)| > |\log_a(1+x)|.$

【问题5】 给定实数a，$a\neq 0$，且$a\neq 1$，设函数$y=\dfrac{x-1}{ax-1}\left(x\in R,\ 且\ x\neq\dfrac{1}{a}\right)$.证明：

（1） 经过这个图象上任意两个不同的点的直线不平行于x轴；

（2） 这个函数的图象关于直线$y=x$成轴对称图形。

分析：

证明(1)可以从证明这两点连线的斜率$k\neq 0$入手，也可以从证明任何一条与x轴平行的直线不可能与函数图象有两个或两个以上的交点入手。

证明(2)或者从几何方法考虑，利用轴对称的概念证明，或者从代数方法考虑利用反函数与原函数图象关于$y=x$对称性质，求出函数$y=\dfrac{x-1}{ax-1}\left(x\in R，且x\neq\dfrac{1}{a}\right)$的反函数并证明与原函数相同。

证法一 (1)设$M_1(x_1,\ y_1)$，$M_2(x_2,\ y_2)$是这个函数图象上任意两个不同的点，则$x_1\neq x_2$或$y_1\neq y_2$。

于是，$y_2-y_1=\dfrac{x_2-1}{ax_2-1}-\dfrac{x_1-1}{ax_1-1}$

$$=\frac{ax_1x_2-x_2-ax_1+1-(ax_1x_2-x_1-ax_2+1)}{(ax_2-1)(ax_1-1)}$$

$$=\frac{a(x_2-x_1)-(x_2-x_1)}{(ax_2-1)(ax_1-1)}$$

$$=\frac{(x_2-x_1)(a-1)}{(ax_2-1)(ax_1-1)},$$

因 $ax\neq 1$，故当$x_1\neq x_2$则$y_1-y_2\neq 0$。

从而直线M_1M_2的斜 $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\neq 0$，因此$M_1M_2$不平行于$x$轴。

(2) 设点$P(x', y')$是这个函数图象上任意一点，则点$P(x', y')$关于直线$y=x$的对称点P'的坐标为(y', x')

由$y'=\dfrac{x'-1}{ax'-1}$，且$x'\neq\dfrac{1}{a}$，可得 $y'(ax'-1)=x'-1$，

即
$$x'(ay'-1)=y'-1。$$

假如 $ay'-1=0$，则$y'=\dfrac{1}{a}$，于是，

$$\frac{1}{a}=\frac{x'-1}{ax'-1},$$

解之得$a=1$，与已知$a\neq 1$矛盾。

因此，$ay'-1\neq 0$。则$x'=\dfrac{y'-1}{ay'-1}$，即点$P'(y', x')$在已知函数的图象上。因此，这个函数的图象关于直线$y=x$成轴对称图形。

证法二 (1) 设$M_1(x_1, y_1)$，$M_2(x_2, y_2)$是这个函数的图象上任意两个不同的点，则$x_1\neq x_2$或$y_1\neq y_2$。假如直线M_1M_2平行于x轴，那么$y_1=y_2$，即

$$\frac{x_1-1}{ax_1-1}=\frac{x_2-1}{ax_2-1},$$

$$(x_1-1)(ax_2-1)=(x_2-1)(ax_1-1),$$

$$a(x_1-x_2)=x_1-x_2,$$

因为$x_1\neq x_2$，所以$a=1$，这与已知矛盾。因此M_1M_2

不平行于x轴。

（2） 先求所给函数的反函数，由

$y=\dfrac{x-1}{ax-1}$ $\left(x\in R,\ x\neq\dfrac{1}{a}\right)$，得，$y(ax-1)=x-1$，即

(＊) $$(ay-1)x=y-1。$$

假如 $ay-1=0$，则$y=\dfrac{1}{a}$，于是有

$$\frac{1}{a}=\frac{x-1}{ax-1},$$

即，$ax-a=ax-1$，由此得$a=1$，与已知矛盾。所以$ay-1\neq 0$。

因此由（＊）式知

$$x=\frac{y-1}{ay-1}。$$

这就表明函数$y=\dfrac{x-1}{ax-1}\left(x\in R,\ 且x\neq\dfrac{1}{a}\right)$的反函数是$y=\dfrac{x-1}{ax-1}\left(x\in R,\ 且x\neq\dfrac{1}{a}\right)$所以函数$y=\dfrac{x-1}{ax-1}\left(x\in R,\ 且x\neq\dfrac{1}{a}\right)$的图象关于直线$y=x$成轴对称图形。

证法三 （1）任取一条与x轴平行的直线l，则l的方程为$y=c$（c为常数）。以下讨论直线l与所给函数的图象是否相交以及相交情况。

由方程组
$$\begin{cases} y=\dfrac{x-1}{ax-1}, & ① \\ y=c & ② \end{cases}$$

解之得

$$(ca-1)x=c-1 \qquad ③$$

当$c=\frac{1}{a}$时，由③式得，$a=1$，这与已知矛盾。因此$c\neq\frac{1}{a}$。

当$c\neq\frac{1}{a}$时，由③式得$x=\frac{c-1}{ca-1}$。由此可知方程组有唯一解，从而直线l与所给函数的图象恰有一个交点。

综上述，平行于x轴的直线与所给函数的图象恰有一个交点。因此，经过这个函数图象上任意两个不同的点的直线不平行于x轴。

(2) 同证法一或证法二。

说明：这是一道高考试题，在证明中要在解方程时分情况讨论，很多考生忽视了这一点，推理不严密。

【问题6】 已知AX是$\angle NAM$内一条射线，$\angle XAM=30°$，$\angle NAX=45°$，P是AX上一点，$AP=1$，过P点作直线分别交AM、AN于M、N两点，求当M、N到AX的距离和最小时$\angle APN$的大小，并求此时MN的长。

分析：首先要找出距离和的函数表达式，而建立函数式的关键则是选好自变量。动直线MN绕P点旋转，点M、N到AX的距离随旋转角度而变化，因此应选取旋转角作自变量。

解法一（三角法） 设$\angle APN=\theta$，则$\angle ANP=135°-\theta$，$\angle AMP=\theta-30°$.（见图1-2）.又$AP=1$。

在$\triangle APN$中，由正弦定理得

$$\frac{PN}{\sin 45°}=\frac{1}{\sin(135°-\theta)}。$$