YINGYONG SHUXUE

应用数学

（第一册）

主编 李开友 张富勤 刘 青

西南交通大学出版社
SWJUP
Http://press.swjtu.edu.cn

应 用 数 学

（第一册）

主编　李开友　张富勤　刘　青

主审　裴　俊　杨武松

编写者　（按姓氏笔画为序）

王太英　李开友　刘　青

吕祥凤　张富勤　周洪萍

黄　恂

内容简介

本书根据技术应用型人才对数学知识的实际要求，坚持“以应用为目的，以够用和必需为度”，力求做到“打好基础，突出应用，强化能力”．本书分两册出版，第一册内容有：函数的极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、数学实验.

本书可供高职高专院校、成人业余大学、成人函授大学、五年制大专学生使用，也可供普通专科学生使用．

图书在版编目（CIP）数据

应用数学. 第 1 册 / 李开友，张富勤，刘青主编. —成都：西南交通大学出版社，2008.7
ISBN 978-7-81104-996-1

Ⅰ. 应… Ⅱ. ①李…②张…③刘… Ⅲ. 应用数学 Ⅳ. 029

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 096268 号

应 用 数 学

（第一册）

主编 李开友 张富勤 刘青

*

责任编辑 张宝华
封面设计 翼虎书装
西南交通大学出版社出版发行
（成都市二环路北一段 111 号 邮政编码：610031 发行部电话：028-87600564）
http: //press.swjtu.edu.cn
成都蜀通印务有限责任公司印刷

*

成品尺寸：185 mm×260 mm 印张：12.25
字数：304 千字 印数：1—5 000 册
2008 年 7 月第 1 版 2008 年 7 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-81104-996-1
定价：19.80 元

前　　言

本教材是按教育部制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》以及高等职业教育工科类专业的特点和实际需要精心编写的．

应用数学课程根据技术应用型人才对数学知识的实际要求，突出数学知识的基础性地位和工具性作用，坚持“以应用为目的，以够用和必需为度”，力求做到“打好基础，突出应用，强化能力”．本教材是编者们根据教学改革的实际，为适应高职数学教学的需要，结合多年的教学经验编写的．

在教材的编写中遵循了强化数学概念，注重实际应用，培养实践能力的原则，突出了数学工具的作用，淡化了数学理论的推导，不追求过分复杂的运算和变换．对欲讨论的问题，大多从生活中的实例引入，以展示数学应用的广泛性，使读者初步了解建立数学模型的方法．对数学概念注意根据问题的实际背景来建立，以培养学生的综合数学素质和应用能力．

本教材强调了数学与计算机应用的结合，书中的数学实验简要介绍了“mathematica 软件”，以及教材编写组研制的“数学运算可视化系统”的使用方法．教师应安排适当时间组织实验教学，以便使学生掌握用计算机来进行数学的运算、绘图等问题．

本教材注意了与高中阶段的数学教学内容的衔接，教材在附录中给出了“初等数学课程运算中的常用公式和重要结论”，以便于读者查阅．针对高等职业教育的实际，本教材对传统高等数学课程的教学内容进行了整合，削枝强干．

本教材由李开友、张富勤、刘青主编．参加本教材编写的人员是：李开友副教授负责第一模块第一节、第二节、数学实验、附录的编写；张富勤副教授负责各模块的小结、自检题、阅读材料、第一模块第八节的编写；刘青副教授负责全书的绘图、第二模块第五节至第十一节的编写；周洪萍副教授负责第一模块第三节至第七节的编写；黄恂高级讲师负责第二模块第一节至第四节的编写；吕祥凤副教授负责第三模块第一节至第四节、第七节的编写；王太英副教授负责第三模块第五、六、八、九、十节的编写．本教材由裴俊副教授、杨武松副教授主审．

由于编者水平有限和时间仓促，错误之处在所难免，恳请使用本教材的广大师生批评指正，以便修订提高．

编　者

2008 年 3 月

目　　录

第一模块　函数的极限与连续

本书的主要内容是微积分学的基本知识．函数是微积分学的研究对象，同时也是微积分中最基本的概念，而极限是贯穿整个微积分的一个重要概念，是微积分中基本推理的工具，又因连续是函数的一个重要性态，是微积分学研究的主要对象，因此本模块将叙述函数的一些基本知识，介绍函数的极限与连续的基本知识，并为以后的学习打下基础．

第一节　函　数

在中学，我们已经学习过函数的基本知识，现在，为了以后的学习，把有关函数的内容重新作一叙述和整理．

一、函数的概念

1. 区间与邻域

在微积分学中，经常要用区间或邻域来表示一个实数集合的子集，下面将介绍有关区间和邻域的相关知识．

（1）区间：有限区间

闭区间：$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$；

开区间：$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$；

半开半闭区间：$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$，$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$.

无限区间：

$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$；$(a,+\infty)=\{x\mid x>a\}$；

$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\}$；$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$；

$(-\infty,+\infty)$ 表示实数集合 **R**.

（2）邻域：开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的 δ **邻域**，记为 $U(x_0,\delta)$，x_0 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径（见图 1－1）．

将点 x_0 的 δ 邻域内挖去点 x_0 得到的集合 $\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}$ 称为点 x_0 的 δ 去心邻域，记为 $U(\hat{x}_0,\delta)$（见图 1－2）．

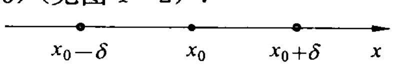


图 1－1

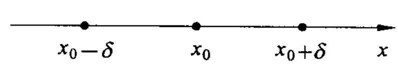


图 1－2

2. 函数的定义

定义 1.1　设 D 为实数集合 **R** 的一个非空子集，若存在确定的对应法则 f，使得对于数

集 D 中的任意一个数 x，按照 f 都有唯一确定的实数 y 与之对应，则称 f 是定义在数集 D 上的**函数**（见图 1—3），记为

$$y = f(x)$$

其中，x 称为自变量，y 称为因变量，f 称为对应法则，数集 D 称为函数的定义域，数集 M 称为函数的值域．

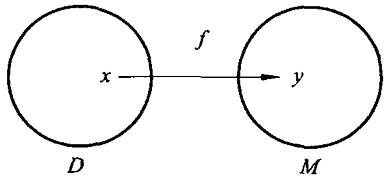


图 1—3

3. 函数的两要素

函数由定义域和对应法则所确定，函数的定义域 D 和对应法则 f 是函数的**两要素**．当且仅当函数的两要素都相同时，才表示同一函数．函数与自变量、因变量用什么字母表示无关．

求函数定义域的步骤：① 列不等式（组）；② 解不等式（组）；③ 表示定义域．

列不等式的依据：函数的表达式有意义，自变量要有实际意义．

函数表达式有意义需要考虑的因素：① 分式的分母不能等于零；② 开偶次方时的被开方式要大于或等于零；③ 对数的真数要大于零；④ 三角类函数及反三角类函数要满足其定义域的要求．

例 1　确定函数 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$ 的定义域．

解　要使函数的表达式有意义，需

$$x^2 - 3x + 2 > 0$$

解此不等式得　$x>2$　或　$x<1$

函数的定义域为　$(-\infty,1) \cup (2, +\infty)$

例 2　确定函数 $f(x) = \sqrt{3 + 2x - x^2} + \ln(x - 2)$ 的定义域．

解　要使函数的表达式有意义，需

$$\begin{cases} 3 + 2x - x^2 \geqslant 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases}$$

解此不等式得　$2<x\leqslant 3$

函数的定义域为　$(2, 3]$

4. 函数值与函数的值域

若对于确定的 $x_0 \in D$，通过对应法则 f，函数 y 有唯一确定的值 y_0 与之相对应，则称 y_0 为 $y = f(x)$ 在 x_0 处的函数值，记为 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$．

全体函数值构成的集合 $\{y \mid y = f(x), x \in D\}$，称为函数的值域，记作 M.

例 3　设函数 $f(x) = x^3 - 2x + 3$，求 $f(2)$，$f\left(-\dfrac{1}{a}\right)$，$f(t^2)$，$[f(b)]^2$（其中 $a\neq 0$).

解　$f(2) = 2^3 - 2\times 2 + 3 = 7$；

$$f\left(-\frac{1}{a}\right)=\left(-\frac{1}{a}\right)^3-2\left(-\frac{1}{a}\right)+3=-\frac{1}{a^3}+\frac{2}{a}+3=\frac{3a^3+2a^2-1}{a^3};$$

$$f(t^2)=(t^2)^3-2(t^2)+3=t^6-2t^2+3;$$

$$[f(b)]^2=(b^3-2b+3)^2=b^6-4b^4+6b^3+4b^2-12b+9.$$

二、函数的表示法

1. 函数的表示方法

解析法：函数的对应法则由数学式子给出．

列表法：把函数的自变量的全部或部分取值与它们所对应的函数值列成一个表格来给出对应法则．

图像法：函数的对应法则以图像的形式给出．

平面点集 $\{(x,y)\,|\,y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的图像．

2. 分段函数

定义 1.2　在定义域内的不同范围具有不同的表达式的函数叫做**分段函数**．

分段函数指的是用几个表达式合起来表示一个函数，而不能理解为几个函数．

例 4　某城市出租车起步价为 4 元（不超过 2 千米），超过 2 千米后，每千米加价 1.6 元，试写出车费 y（单位：元）与行车距离 x（单位：千米）之间的函数关系式．

解　因为当 $0<x\leqslant 2$ 时，$y=4$；而当 $x>2$ 时，超过路程为 $x-2$，此时

$$y=4+1.6(x-2)$$

于是

$$y=\begin{cases}4, & 0<x\leqslant 2\\ 4+1.6(x-2), & x>2\end{cases}$$

例 5　已知

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x<0\\ 1, & x\geqslant 0\end{cases}$$

求（1）$f(x)$ 的定义域；（2）$f(-1)$，$f(1)$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$；（3）作函数的图像．

解　（1）$f(x)$ 的定义域是

$$\{x\,|\,x<0\}\cup\{x\,|\,x\geqslant 0\}=\{x\,|\,-\infty<x<+\infty\}=(-\infty,+\infty)$$

（2）$f(-1)=\dfrac{1}{-1}=-1, f(1)=1, f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$．

（3）函数的图像如图 1—4 所示.

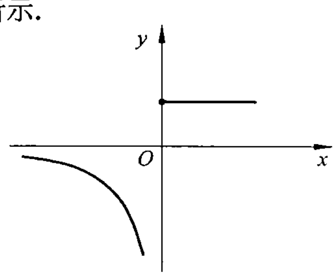


图 1—4

三、反函数

定义 1.3 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 M，若对于 M 中的每一个 y，都有唯一确定的 $x\in D$，使

$$f(x)=y$$

成立，则 x 也是 y 的函数，称此函数为 $y=f(x)$ 的**反函数**，记为

$$x=f^{-1}(y)$$

此时称 $y=f(x)$ 为直接函数．

习惯上把 $y=f(x)$ 的反函数记为：$y=f^{-1}(x)$．

求函数 $y=f(x)$ 的反函数的步骤是：

(1) 先在方程 $y=f(x)$ 的定义域 D 内解出 x，得到 $x=f^{-1}(y)$；

(2) 若 x 是唯一的，再将 $x=f^{-1}(y)$ 中的 x 与 y 互换，得到反函数 $y=f^{-1}(x)$．

例 6 求函数 $y=\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$ 的反函数．

解 由 $y=\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$ 解得

$$x=\ln\frac{y}{1-y}$$

交换 x，y 的位置，即得所求的反函数

$$y=\ln\frac{x}{1-x}$$

其定义域为 (0，1).

应当指出，函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 之间存在如下关系：

$$f^{-1}(f(x))=x \quad 和 \quad f(f^{-1}(x))=x$$

且反函数的定义域是原来直接函数的值域，反函数的值域是原来直接函数的定义域．

互为反函数的两个函数的图像之间的关系是：函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称．

四、函数的一些基本性态

1. 函数的奇偶性

设函数 $y=f(x)$，对于定义域 D 内任意 x，都有 $-x\in D$，

(1) 若 $f(-x)=f(x)$，则称函数为**偶函数**；

(2) 若 $f(-x)=-f(x)$，则称函数为**奇函数**．

奇函数的图像关于坐标原点 O 对称，偶函数的图像关于 y 轴对称．

例 7 判别下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$； (2) $f(x)=\dfrac{1}{2}(a^x-a^{-x})$；

(3) $f(x)=x^3-\sin x$； (4) $f(x)=x^3-1$．

解 (1) 因为

$$f(-x)=\frac{1}{1+(-x)^2}=\frac{1}{1+x^2}=f(x)$$

所以 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 是偶函数.

(2) 因为

$$f(-x)=\frac{1}{2}(a^{-x}-a^{-(-x)})=\frac{1}{2}(a^{-x}-a^{x})=-\frac{1}{2}(a^{x}-a^{-x})=-f(x)$$

所以 $f(x)=\dfrac{1}{2}(a^x-a^{-x})$ 是奇函数.

(3) 因为

$$f(-x)=(-x)^3-\sin(-x)=-x^3+\sin x=-(x^3-\sin x)=-f(x)$$

所以 $f(x)=x^3-\sin x$ 是奇函数.

(4) 因为

$$f(-x)=(-x)^3-1=-x^3-1$$

所以 $f(-x)\neq-f(x)$，且 $f(-x)\neq f(x)$，所以 $f(x)=x^3-1$ 是非奇非偶函数.

2. 函数的单调性

(1) 增、减函数的定义:

设函数 $f(x)$，对于区间 (a, b) 内的任意两点 x_1，x_2:

如果当 $x_1<x_2$，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内**单调递增**，(或称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内为**增函数**).

如果当 $x_1<x_2$，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内**单调递减**，(或称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内为**减函数**).

增函数与减函数统称为**单调函数**.

若函数在区间 (a,b) 内是单调递增或单调递减的，则称此区间 (a,b) 为函数 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 增、减函数的图像的特点:

当 x 自左向右变化时，增函数 $y=f(x)$ 的图像沿 x 轴的正方向是上升的（见图 1－5）；减函数 $y=f(x)$ 的图像沿 x 轴的正方向是下降的（见图 1－6）.

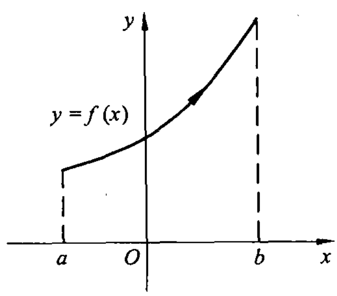


图 1－5

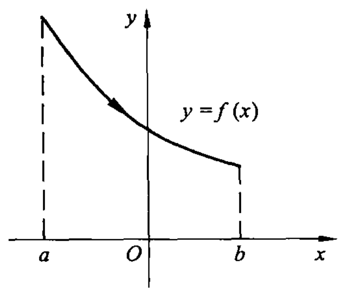


图 1－6

3. 函数的周期性

(1) 周期函数的定义:

若对于函数 $y=f(x)$，存在一个常数 $T(T\neq0)$，使得对于在定义域内的一切值 x，都有 $f(x+T)=f(x)$ 成立，则称函数 $y=f(x)$ 为**周期函数**，T 为**周期**.

显然，如果 T 为函数 $f(x)$ 的周期，则 $kT(k\in\mathbf{Z})$ 也都是 $f(x)$ 的周期.

习惯上，函数 $y=f(x)$ 的周期是指使 $f(x+T)=f(x)$ 成立的 T 中的最小正数．

(2) 三角函数的周期：

$y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 的周期为 2π；

$y=\tan x$ 与 $y=\cot x$ 的周期为 π.

正弦函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 与余弦函数 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$ 的周期都为

$$T=\frac{2\pi}{\omega}$$

(3) 周期函数的图像的特点：

周期为 T 的函数，只要画出它在任意一个区间 $[a, a+T)$ 上的图像，然后将此图像一个周期一个周期地向左、向右平移，就可得到整个函数的图像．周期函数的图像是重复出现的．

4. 函数的有界性

(1) 有界函数的定义：

设函数 $y=f(x)$ 在区间(a,b)内有定义，如果存在一个常数 $M>0$，使得 (a, b) 内的任何 x 都有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称函数 $y=f(x)$ 在(a,b)内是**有界函数**．反之，称 $y=f(x)$ 在区间(a,b)内是**无界函数**．

注：上述区间可以是函数 $y=f(x)$ 的整个定义域，也可以是定义域的一部分，如不指明区间，就是指函数 $f(x)$ 在整个定义域内有界．

如，$y=\sin x$ 在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界函数；$y=\frac{1}{x}$在 (0，2) 内是无界函数，$y=\frac{1}{x}$在 (1，2) 内是有界函数．

(2) 有界函数的图像的特点：

有界函数的图像一定介于两条水平直线 $y=-M$ 与 $y=M$ 之间．

无界函数的图像一定是沿 y 轴方向向上或向下无限延伸的．

习　题　1—1

1. 指出下列各组函数中哪一组是同一个函数．

(1) $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ 与 $g(x)=x+1$；　(2) $f(x)=\sqrt{x^2}$ 与 $g(x)=x$；

(3) $f(x)=\ln x^2$ 与 $g(x)=2\ln x$；　(4) $f(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}$ 与 $g(x)=\sin x$．

2. 求下列函数的定义域．

(1) $y=\frac{\sqrt{x+1}}{x}$；　(2) $y=\sqrt{3x-x^2}$；

(3) $y=\sqrt{x-2}+\ln(3-x)$；　(4) $y=\sqrt{1-x^2}+\cos(\pi x)$；

(5) $y=\arcsin(2x+1)$．

3. 判别下列函数的奇偶性．

(1) $f(x)=x^3+2x$；　(2) $f(x)=a^x+a^{-x}$；

(3) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；　　(4) $f(x)=\lg\dfrac{1+x}{1-x}$；

(5) $f(x)=\sin x+\cos x$．

4. 求下列函数的反函数．

(1) $y=x^2(-\infty<x<0)$；　(2) $y=2^x+1$；　(3) $y=1+\sqrt{x}$．

5. 设 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，求 $f(-2)$，$f(0)$，$f(1)$，$f(2x+1)$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$．

6. 设

$$f(x)=\begin{cases}2+x, & x\leqslant 0\\ 2^x, & x>0\end{cases}$$

求 $f(\Delta x)-f(0)$（Δx 表示一个数）．

7. 已知 $f(x)$ 是一个二次多项式，且 $f(x+1)-f(x)=8x+3$，$f(0)=0$，求 $f(x)$ 的表达式．

8. 已知

$$f(x)=\begin{cases}1-x, & -1\leqslant x\leqslant 0\\ 2^x, & 0<x<2\end{cases}$$

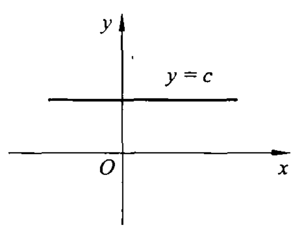
求：(1) 函数 $f(x)$ 的定义域；　(2) $f(-1),f(0),f(1)$．

第二节　初等函数

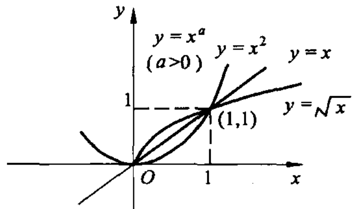
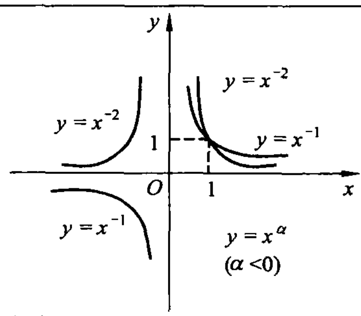
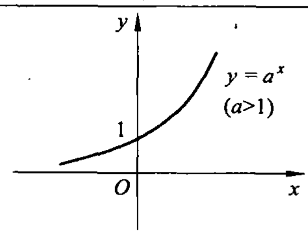
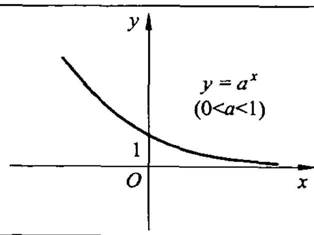
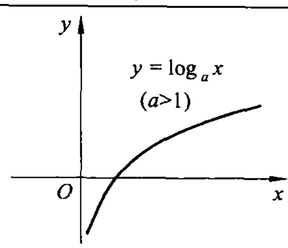
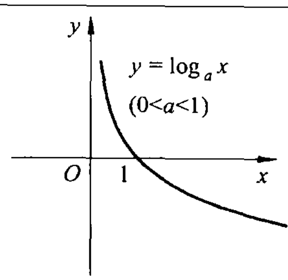
这一节，将在初等数学的基础上进一步讨论函数的基本运算，并介绍初等函数的概念．

一、基本初等函数

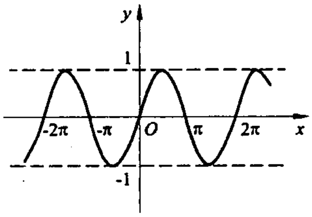
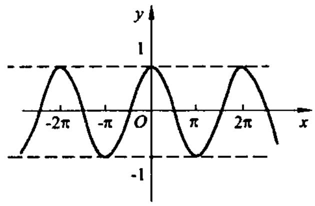
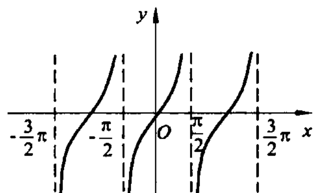
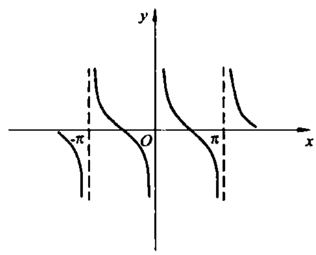
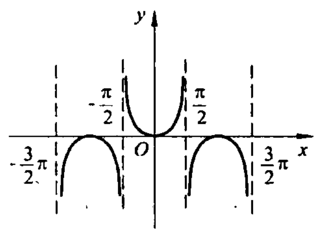
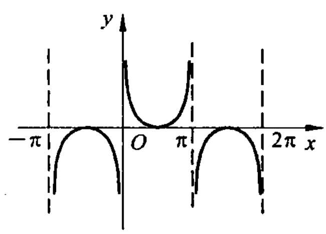
常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为**基本初等函数**．这些函数在中学的初等数学中都已学过，现将它们的解析式、函数图像、基本性质列表．

函数名称	解析式	函数图像	基本性质
常量函数	$y=c$		垂直于 y 轴的直线

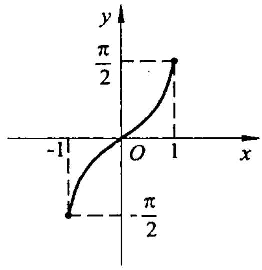
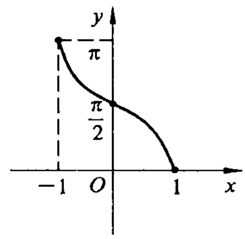
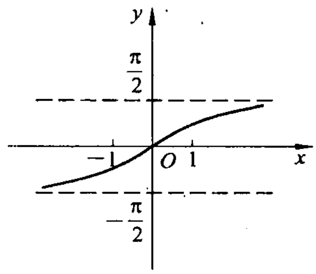
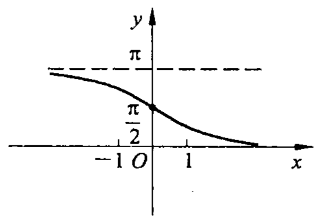
续表

函数名称	解析式	函数图像	基本性质
幂函数	$y=x^{\alpha}$ （α 为实常数）		过点（0，0）和（1，1） 在（0，$+\infty$）内是增函数
			过点（1，1），不过点（0，0） 在（0，$+\infty$）内是减函数
指数函数	$y=a^x$ （$a>0$，$a\neq1$）		定义域：$-\infty<x<+\infty$ 值　域：$0<y<+\infty$ 过点（0，1） 在定义域内是增函数 以 x 轴为渐近线
			定义域：$-\infty<x<+\infty$ 值　域：$0<y<+\infty$ 过点（0，1） 在定义域内是减函数 以 x 轴为渐近线
对数函数	$y=\log_a x$ （$a>0$，$a\neq1$）		定义域：$0<x<+\infty$ 值　域：$-\infty<y<+\infty$ 过点（1，0） 在定义域内是增函数 以 y 轴为渐近线
			定义域：$0<x<+\infty$ 值　域：$-\infty<y<+\infty$ 过点（1，0） 在定义域内是减函数 以 y 轴为渐近线

续表

函数名称	解析式	函数图像	基本性质
三角函数	$y=\sin x$		定义域：$-\infty<x<+\infty$ 值　域：$-1\leqslant\sin x\leqslant1$ 奇函数，图像关于原点对称 函数以 2π 为周期
	$y=\cos x$		定义域：$-\infty<x<+\infty$ 值　域：$-1\leqslant\cos x\leqslant1$ 偶函数，图像关于 y 轴对称 函数以 2π 为周期
	$y=\tan x$		定义域：$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$ 值　域：$-\infty<\tan x<\infty$ 奇函数，图像关于原点对称 函数以 π 为周期
	$y=\cot x$		定义域：$x\neq k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$ 值　域：$-\infty<\cot x<+\infty$ 奇函数，图像关于原点对称 函数以 π 为周期
	$y=\sec x$ $\left(\sec x=\frac{1}{\cos x}\right)$		定义域：$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$ 值　域：$-\infty<\sec x<+\infty$ 偶函数，图像关于 y 轴对称 函数以 2π 为周期
	$y=\csc x$ $\left(\csc x=\frac{1}{\sin x}\right)$		定义域：$x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 值　域：$-\infty<\csc x<+\infty$ 奇函数，图像关于原点对称 函数以 2π 为周期

续表

函数名称	解析式	函数图像	基本性质
反三角函数	$y=\arcsin x$		定义域：$-1\leqslant x\leqslant +1$ 值　域：$-\frac{\pi}{2}\leqslant \arcsin x\leqslant \frac{\pi}{2}$ 奇函数，图像关于原点对称 函数在定义域内是增函数
	$y=\arccos x$		定义域：$-1\leqslant x\leqslant 1$ 值　域：$0\leqslant \arccos x\leqslant \pi$ 非奇非偶函数 函数在定义域内是减函数
	$y=\arctan x$		定义域：$-\infty\leqslant x\leqslant +\infty$ 值　域：$-\frac{\pi}{2}<\arctan x<\frac{\pi}{2}$ 奇函数，图像关于原点对称 函数在定义域内是增函数
	$y=\operatorname{arccot} x$		定义域：$-\infty\leqslant x\leqslant +\infty$ 值　域：$0<\operatorname{arccot} x<\pi$ 非奇非偶函数 函数在定义域内是减函数

二、复合函数

定义 1.4　设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_u，函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 M_u，若 $M_u\subseteq D_u$，则 y 通过变量 u 成为 x 的函数，这个函数称为由函数 $y=f(u)$ 和函数 $u=\varphi(x)$ 构成的复合函数，记为

$$y=f(\varphi(x))$$

其中变量 u 称为中间变量．

例 8　求函数 $y=u^2$ 与 $u=\cos x$ 构成的复合函数．

解　将 $u=\cos x$ 代入 $y=u^2$ 中，即为所求的复合函数

$$y=\cos^2 x$$

其定义域为 $(-\infty，+\infty)$.

若函数 $u=\varphi(x)$ 的值域 M_u 不完全包含于 $y=f(u)$ 的定义域 D_u 中，且它们的交集 M_u