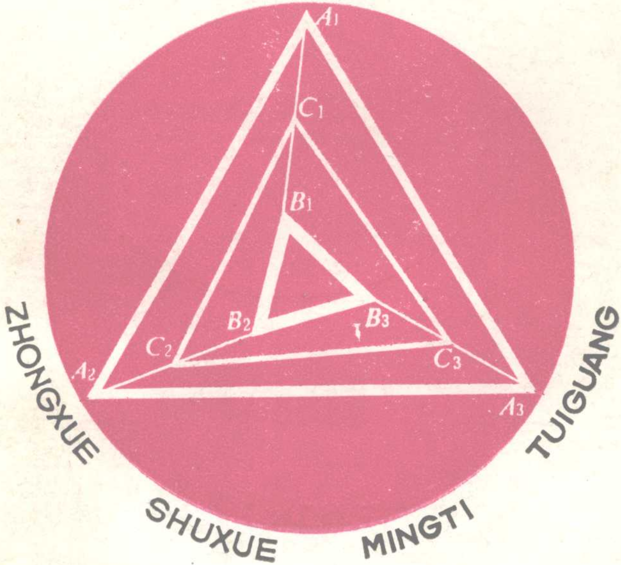
中学数学自学与研究丛书
ZHONGXUE SHUXUE ZIXUE YU YANJIU CONGSHU

中学数学命题推广

高文生 编



辽宁教育出版社

中学数学自学与研究丛书

中学数学命题推广

高文生　编

辽宁教育出版社

一九八六年·沈阳

中学数学命题推广

高文生　编

辽宁教育出版社出版　辽宁省新华书店发行
（沈阳市南京街6段1里2号）沈阳新华印刷厂印刷

字数：170,000　开本：787×1092 1/32　印张：8 1/4
印数：1—5,800
1986年9月第1版　　1986年9月第1次印刷

责任编辑：杨　力　　责任校对：王淑芬
封面设计：赵多良　　插　　图：韩　梅

统一书号：7371·266　　定价：1.00 元

出版说明

为了满足中学师生和广大自学者的需要，我们根据教育部中学教学大纲的精神，组织编写了这套《中学数学自学与研究丛书》。

这套丛书的内容大致包括：初等数学知识的综合性研究；中学数学教学的经验总结；数学史、数学逻辑和数学方法论的介绍；还有数学教学中的一些补充性的专题等。

这套丛书的编辑出版，是对中学数学知识进行系统的归纳和研究的一种尝试。我们热切希望数学界和教育界人士，以及广大读者不吝赐教，并为我们提供新的选题，使这套丛书进一步充实和完善。

序

数学是一门重要的基础学科，在科学技术飞速发展的今天，没有比较扎实的数学基础，想精通其它任何一门自然科学都是很难想象的.

学习数学，要演算大量的习题．但在解题过程中如果不去把握题与题之间的内在联系，而只是逐一地求解或死记硬背，都是不能学好数学的.

如何在解题过程中培养出一定的分析问题和解决问题的能力？如何把握住命题之间的联系，从而能举一反三使各类问题能迎刃而解呢？将类似的命题相互比较，弄清条件、结论及证明方法上的递进关系，掌握命题从简到繁的演化过程，主动地推广一些命题是一种值得提倡的学习方法.

所谓推广，即是在不改变命题条件的情况下发掘出更深刻的结论；或是改变命题的条件从特殊情况下转到一般情况下去寻求类似的或更深刻的结论．对于后者由于所考虑的方向不同，对于同一命题往往能得出许多推广命题.

在这本小册子中，我们仅从中学数学的内容简略地介绍了推广命题的思想方法．为了叙述方便起见，文中的例题均以小节的形式出现，原始命题标以“例”，推广命题则标以“【推广 1】”……．可以认为每一例题均独立成章．在阅读过

程中，越过一些章节而看后面的内容并不会感到困难。

为启发推广命题的思想，在每一章节之后仅配置了少量的习题，读者应将更多的精力放到推广平时遇到的命题。

在编写过程中，参阅了较多的文献资料，受到不少启发，尤其值得一提的是在编写过程中学友吴振奎同志热情的指导和无私的帮助起了很大的推动作用。在此，仅向这些文献的著者与吴振奎同志致以衷心的谢意。

由于笔者水平有限，错误和不当之处在所难免，欢迎读者批评指正。

高 文 生

1984年10月

目　　录

引　子

在数学中，各概念和定理间的联系是显而易见的，但各类命题却经常给人留下纷繁杂乱的印象。如何在处理习题过程中理出一个头绪，使我们对数学概念有一个更加全面和系统的了解呢？这就要求我们对各种概念、定理、公式及命题有一个综合对比和联想的过程，推广一个命题也就触类旁通了更多的概念，甚至能将其它学科的知识也联系起来。

【例】正三角形一边中点到另外两边的距离之和为定值。

这一命题极为简单，我们不去证明它，而是讨论它的推广。注意到命题条件中的"正三角形"和"一边中点"，将它们按不同的想法"放宽"，就可以得到不同的推广命题，现分述如下：

首先使"点"动起来，就得出：

【推广1】正三角形一边上任意一点到另外两边的距离之和为定值。

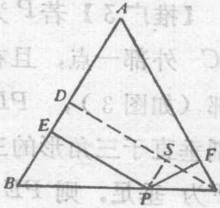


图 1

证明：如图1，$\triangle ABC$ 为正三角形，P 为BC 边上一点，PE、PF分别垂直于AB、AC垂足为E、F。

连$CD\perp AB$，垂足为D，连$PS\perp CD$，垂足为S．则四边形$PEDS$为平行四边形，$\therefore PE=SD$，又$\triangle PFC\cong\triangle CSP$，$\therefore PF=CS$，则$PF+PE=CS+SD=CD$．即$P$点到$AB$与$AC$的距离之和为定值（正三角形的高）．〔证讫〕

其次，我们让点从边上进入到三角形的内部，就得出：

【推广 2】正三角形内部一点到各边的距离之和为定值．

证明：如图2，$\triangle ABC$为正三角形，PD、PE、PF分别垂直于三角形各边，连PA、PB、PC，并记三角形BC边上的高为h，三角形的面积

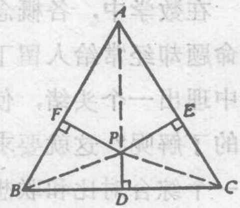


图 2

为S，则$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}h\cdot BC=S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PCA}=\frac{1}{2}(PD+PE+PF)\cdot BC$，即$P$点到三边距离之和为定值$h$．〔证讫〕

上面我们看到点在边上和三角形内部的情况，当然也就会想到如果点在三角形外部又会怎样呢？

【推广 3】若P为正三角形ABC外部一点，且在内角A的内部（如图3），PD、PE、PF分别垂直于三角形的三边，D、E、F为垂足．则$PE+PF-PD$为定值．

略证：连PA、PB、PC，则PD、PE、PF分别为$\triangle PBC$、

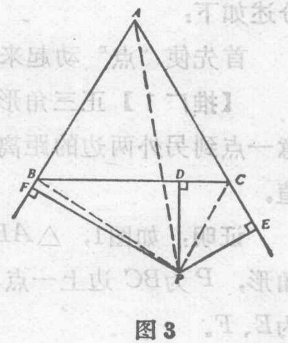


图 3

$\triangle PAC$、$\triangle PAB$的高，又由 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PCA}-S_{\triangle PBC}$ 即可证得 $PE+PF-PD$ 为定值.〔证讫〕

【推广 4】若 P 为正三角形 ABC 外部一点，且在内角 C 之对顶角内部，PD、PE、PF 分别垂直于三角形的三条边，D、E、F 为垂足（见图 4），则 $PF-PD-PE$ 为定值.

略证：连 PA、PB、PC，注意到这时有 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle PAB}-S_{\triangle PCA}-S_{\triangle PBC}$ 即可证得结论.〔证讫〕

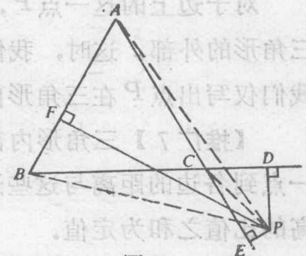


图 4

当然还可以得到当点 P 在一边延长线上的结论，我们把这一个结果留给读者思考. 现在回头再来看变动“正三角形”会有什么结果.

【推广 5】等腰三角形底边上任意一点到两腰的距离之和为定值.

这里的证明与〔推广 1〕完全相同，不再重复. 很容易看出这一推广是放宽“正三角形”中“正”的结果，进一步放宽这个条件，在任意三角形中也可得到类似的命题：

【推广 6】三角形一边上的任意一点到另外两边的距离与这两边上的高的比值之和为定值.

略证：如图 5，PE、PF 分别垂直于 AC、AB，E、F 为垂足，连 PA，并设 AC、AB 边上的高分别为 h_b、h_c，由 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle PCA}+S_{\triangle PAB}$

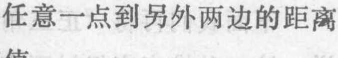


图 5

可得 $\dfrac{S_{\triangle PCA}}{S_{\triangle ABC}}+\dfrac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{\frac{1}{2}PE\cdot AC}{\frac{1}{2}h_b\cdot AC}+\dfrac{\frac{1}{2}PF\cdot AB}{\frac{1}{2}h_c\cdot AB}$

$$=\frac{PE}{h_b}+\frac{PF}{h_c}=1.$$ 〔证讫〕

对于边上的这一点P，仍可使其进入三角形的内部或到三角形的外部，这时，我们也还能得出类似的结论．下面，我们仅写出点P在三角形内部的命题：

【推广7】三角形内部任意一点到各边的距离与这些边上的高的比值之和为定值．

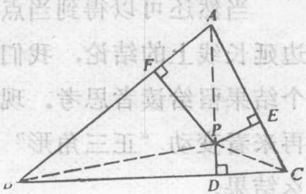


图6

略证：如图6，连PA、PB、PC，并设BC、CA、AB边上高分别为h_a、h_b、h_c，则由$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PCA}+S_{\triangle PAB}$即可得到$\dfrac{S_{\triangle PBC}}{S_{\triangle ABC}}+\dfrac{S_{\triangle PCA}}{S_{\triangle ABC}}+\dfrac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{PD}{h_a}+\dfrac{PE}{h_b}+\dfrac{PF}{h_c}=1.$ 〔证讫〕

下面我们再将"正三角形"放宽到正多边形，一般来说，这一种推广应经过正方形、正五边形、……的几个试探性步骤．这里，由于比较直观，我们直接给出命题：

【推广8】正多边形中任意一点到各边的距离之和为定值．

这一命题的证明，仍是作出P点与各顶点的连线，利用面积的关系式即可得出．当然我们可以想到点在某一边上时

命题仍成立，但点到了多边形的外部这一定值的叙述就复杂多了．另外我们还注意到利用面积证明的过程中，只利用了边相等，没有用到正多边形其它性质，这样就可以轻易地得到：

【推广 9】边长相等的凸多边形中任意一点到各边的距离之和为定值．

到这里可以提出这样的问题：边长相等时得到的命题变成各角相等行不行呢？经过长方形的试探，结论是能成立的．这样，我们又可以将结论推广到角相等的多边形：

【推广10】各角相等的凸多边形中任意一点到各边的距离之和为定值．

略证：如图 7，$A_1A_2\cdots A_n$ 为各角相等的多边形，作一个与$A_1A_2\cdots A_n$边数相同且足够大的正多边形$B_1B_2\cdots B_n$，使 $A_1A_2\cdots A_n$ 完全在 $B_1B_2\cdots B_n$ 的内部且 $B_1B_2 \parallel A_1A_2$．

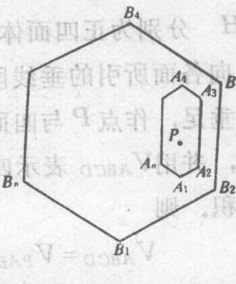


图 7

由 $B_1B_2\cdots B_n$ 的作法，不难得出两个多边形的所有对应边都平行．由〔推广 8〕P点到正多边形 $B_1B_2\cdots B_n$ 各边的距离之和为定值，设这一定值为D．再用 $P(A_n)$ 表示点P到 $A_1A_2\cdots A_n$ 各边距离之和，用 m_k 表示平行线 A_kA_{k+1} 与 B_kB_{k+1}之间的距离($k=1,2,\cdots,n$，且A_{n+1}、B_{n+1} 即是 A_1、B_1)，则很容易得出：

$$P(A_n)=D-(m_1+m_2+\cdots+m_n),$$

即P点到各边的距离之和是一个与位置无关的定值．〔证讫〕

往下来，应有的想法是，结论对任意的凸多边形能否成立，这一次答案是否定的．因为我们无法规定多边形各边上的高，这也就体现出了多边形与三角形区别．那么，我们的推广是否就此结束了呢？没有结束，我们还有一种方法就是将平面几何的命题类比到空间中去，从而得出一组立体几何的命题．还是让我们从最简单的情况开始，将正三角形类比成正四面体，从而将命题推广成：

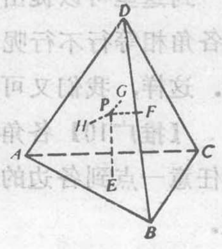


图 8

【推广11】正四面体内部任意一点到各面的距离之和为定值．

略证：如图 8，PE、PF、PG、PH 分别为正四面体 $ABCD$ 内一点 P 向各面所引的垂线段，E、F、G、H 为垂足，作点 P 与四面体各顶点的连线，并用 V_{ABCD} 表示四面体 $ABCD$ 的体积．则

$$V_{ABCD}=V_{PABC}+V_{PBCD}+V_{PCDA}+V_{PDAB}.$$

若用 h 表正四面体的高可进而得出

$$h=PE+PF+PG+PH,$$

即点 P 到各面距离之和为定值．〔证讫〕

上面我们已经看到平面几何的命题也可以推广到空间中，在一般情况下是正三角形推广到正四面体；任意三角形推广到任意的四面体；正多边形推广到正多面体…….并且命题的证明过程也极为类似，由于这些以后还要说到，所以这里不再多说．转回来将我们的原始命题继续推广，只是由于下面一些命题证明过程与前面极为相似就不再一一列出

了，读者不难发现它们是从那几个命题演变过来的．

【推广12】任意四面体中任意一点到各面的距离与这些面上的高的比值之和为定值．

【推广13】正多面体中任意一点到各面的距离之和为定值．

【推广14】各面面积相等的凸多面体中任意一点到各面的距离之和为定值．

以上我们从正三角形条件出发，逐渐推广到n边形，从平面出发推广到了立体，其实，我们还可以原命题的等式出发应用算术—几何平均值不等式而得出一系列的不等式．例如从〔推广2〕正三角形内部一点到各边的距离之和为定值$h(=3r)$可以有：

【推广15】若正三角形内一点P到三边的距离分别为x、y、z，且记一边长为a，内切圆半径为r，则有

① $x\cdot y\cdot z\leqslant r^3$；

② $xy+yz+zx\leqslant 3r^2$；

③ $x^2+y^2+z^2\geqslant\dfrac{a^2}{4}$．

利用〔推广7〕三角形内部一点到各边的距离与对应高的比之和为定值，可以得出：

【推广16】若三角形ABC三边的长为a、b、c，面积为S，且其内部一点到三边的距离为x、y、z，则有：

① $ax+by+cz=2S$；

② $x^2+y^2+z^2\geqslant\dfrac{4S^2}{a^2+b^2+c^2}$（等号当且仅当$x:y:z=$

$a:b:c$时成立）。

证明：①利用面积法易得结论，现仅证②：

利用 $(a^2+b^2+c^2)\lambda^2-2(ax+by+cz)\lambda+x^2+y^2+z^2$

$=(a\lambda-x)^2+(b\lambda-y)^2+(c\lambda-z)^2\geqslant 0$

可有判别式$\Delta\leqslant 0$，即

$4(ax+by+cz)^2-4(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\leqslant 0$，

从而 $x^2+y^2+z^2\geqslant\dfrac{4S^2}{a^2+b^2+c^2}$。〔证讫〕

利用完全相同的办法，还可以证明在n边形中成立的类似命题：

【推广17】若凸多边形各边长为a_i，其内部一点P到各边的距离为$x_i(i=1,2,\cdots,n)$，且多边形的面积为S，则有以下不等式成立：

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\geqslant\frac{4S^2}{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}.$$

对应于〔推广11〕，还可以得出：

【推广18】若正四面体内部一点P到四面的距离为x_1、x_2、x_3、x_4，且正四面体棱长为a，内切球半径为r，则

① $x_1+x_2+x_3+x_4=4r$；

② $x_1x_2x_3x_4\leqslant r^4$；

③ $x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4\leqslant 6r^2$；

④ $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\geqslant\dfrac{a^2}{6}$。

对应于〔推广12〕，可以得出：

【推广19】若四面体四个面的面积分别为S_1、S_2、S_3、S_4，

体积为V，其内部一点P到四个面的距离分别为 x_1、x_2、x_3、x_4，则有

① $S_1x_1+S_2x_2+S_3x_3+S_4x_4=3V$；

② $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\geqslant\dfrac{9V^2}{S_1^2+S_2^2+S_3^2+S_4^2}$.

除上面这些命题以外，如果我们将“距离”再变动一下，又可以得到一系列的命题．下面，仅举一例：

【推广20】在四面体$S-ABC$内部取一点P，过P引直线SP、AP、BP、CP分别交对面于 S'、A'、B'、C'，则

① $\dfrac{PS'}{SS'}+\dfrac{PA'}{AA'}+\dfrac{PB'}{BB'}+\dfrac{PC'}{CC'}=1$；

② $\dfrac{PS'}{SS'}\cdot\dfrac{PA'}{AA'}\cdot\dfrac{PB'}{BB'}\cdot\dfrac{PC'}{CC'}\leqslant\dfrac{1}{256}$；

③ $\dfrac{PS}{PS'}+\dfrac{PA}{PA'}+\dfrac{PB}{PB'}+\dfrac{PC}{PC'}\geqslant12$.

从上面的推广过程，我们已经可以看到对命题展开适当的联想，就可以得出许多与其相关联的推广命题，这无疑对我们更深刻地理解数学内容的相互联系会有极大的好处．

现在，我们简单地叙述一下推广一个命题的几个基本的想法．我们知道，任何命题都包括条件和结论．将条件和结论进行一般化处理就可以得到推广的命题．下面，我们将这一思想分别介绍一下：

最重要的一种就是从命题条件所包含的各要素出发，针对具体情况分别进行试探．当条件中包含有“数”时，例如项数、多边形的边数可以考虑使其增长到任意正整数，对系

数、指数则可考虑将其从整数换成有理数、实数、复数；当条件中包含有“点”时，可以考虑从特殊点（例如线段中点）变成定比分点，从内点变成外点，从线上点变到平面上的点再变成空间中的点；当命题中包含“直线”时可考虑增加其维数变成平面上和空间中的命题等等来推广命题.

我们可以从结论出发，看一看在条件不变的情况下还能得出哪些结论.

从横的方向来看，可以去寻求逆命题和充要条件.

从解题的方法来看，可以寻求一题多解和多题一法，当然这一联想也在于要寻求变换条件的推广，要知道，为了达到推广命题的目的往往需要寻找到某种特定的方法.

推广命题的一些常见思路见以下树图，图中箭头指向即推广方向．当然在推广某一命题时可能只用到一条推广线索，也可能要交错用几条线索，在以后的具体实例中都可见到.