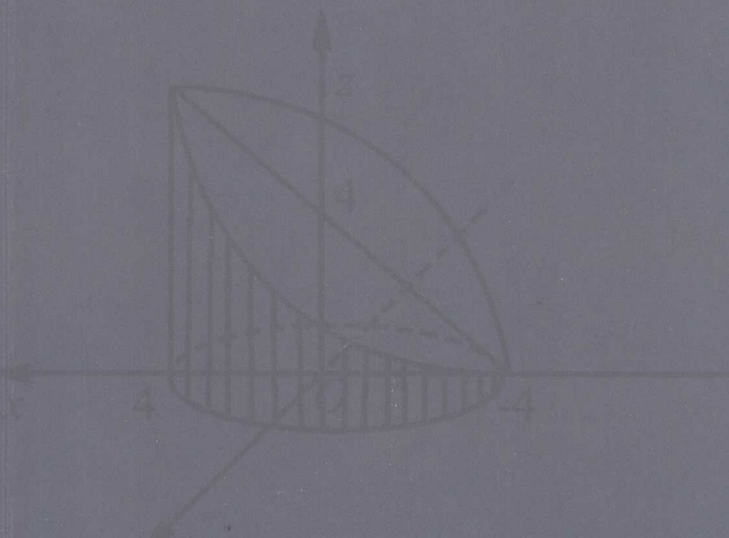
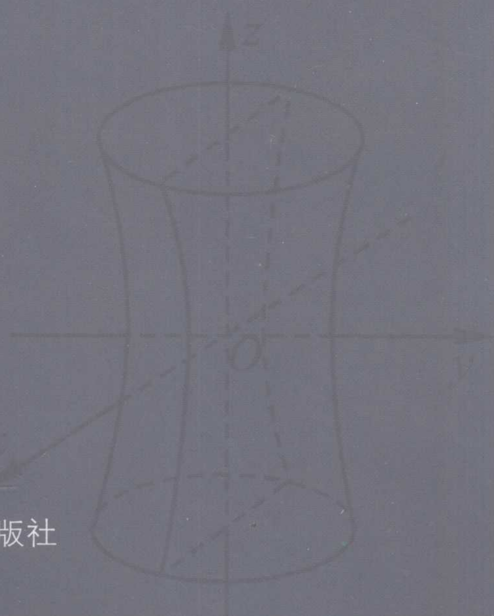
Kongjian Jiexi Jihe
Zonghe Xuexi yu Zhidao

空间解析几何

——综合学习与指导

欧宜贵　李文雅　主编





中国科学技术大学出版社

Kongjian Jiexi Jihe
Zonghe Xuexi yu Zhidao

空间解析几何

——综合学习与指导

主　编　欧宜贵　李文雅
副主编　刘金容　王　鑫

中国科学技术大学出版社

内 容 提 要

本书主要内容包含向量代数，平面与直线，常见二次曲面，二次曲面与二次曲线，正交变换和仿射变换，射影平面等. 在内容编排上由浅入深，从点到线、到面，循序渐进地介绍了空间解析几何的主要内容，同时涉及了现今流行的国内相关教材中的一些难题. 并且列有相当数量的模拟考题，供读者练习.

本书通过课程内容的精讲与点评、典型例题的精辟分析与归纳以及配套题目的训练提高，系统地讲解了如何利用代数与几何方面的基本理论和方法去解决课程中的各种问题，使学生在几何方面的知识得到系统的传授和有效的训练.

本书可选作高等院校数学、物理类专业空间解析几何课程的教材或参考书，也可作为科技工作者学习空间解析几何课程的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

空间解析几何：综合学习与指导/欧宜贵，李文雅主编. —合肥：中国科学技术大学出版社，2009. 1

ISBN 978-7-312-02427-6

Ⅰ. 空…　Ⅱ. ①欧…　②李…　Ⅲ. 立体几何：解析几何—高等学校—教学参考资料　Ⅳ. O182. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 199188 号

出版　中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号，230026
网址：http://press. ustc. edu. cn

印刷　安徽辉隆农资集团瑞隆印务有限公司

发行　中国科学技术大学出版社

经销　全国新华书店

开本　710 mm×960 mm　1/16

印张　13. 25

字数　267 千

版次　2009 年 1 月第 1 版

印次　2009 年 1 月第 1 次印刷

定价　22. 00 元

前　言

空间解析几何是高等院校数学、物理类等专业的重要基础课程.不仅数学、物理学等的许多后续课程要以此为基础,更重要的是,它的思想方法和几何直观性可为许多抽象的、高维的数学物理问题提供模型和背景.

数学的理论是美妙的,引人入胜;数学的方法是精巧的,丰富多彩;但学好数学却必须要付出艰辛的劳动和心血.在该课程的教学过程中,我们常常感受到,现在的学生虽然有良好的素质,但受应试教育的影响,对数学的学习显得较为机械,对教师的依赖性较强.他们往往能背出一些基本公式,却做不出略有变化的演算;他们往往能记住一些基本概念和定理,却给不出稍分层次的推理和分析;他们对数学知识只停留于形式的理解,并未达到实质的掌握;他们除了模仿例题做习题外,在怎样读书学习,特别是主动提出问题、思考问题,理解和掌握数学的思想方法,动手实践方面较为欠缺.为此,我们在教学过程中作了一些有益的尝试,并试图从数学思想、数学方法和数学技巧三位一体方面编写这样一本有血有肉的教材来弥补这一点.

本书紧密结合空间解析几何课程的主要内容,包括基本思想、主要方法、基本概念与性质作简明的介绍,对该课程的重点、难点进行了辅导与小结,通过对典型例题的分析与讨论,以及对某些概念作适当的延伸或拓展,帮助读者解题和进一步理解与掌握该课程的主要内容,把解决数学问题的能力提高到一个新的台阶.

本书共 7 章,前面 6 章每章内容由基本要求、主要内容、习题与解答、深入思考与加强提高 4 部分组成.第 7 章列有相当数量的模拟试题,供读者练习.

"基本要求"是根据各章的主要内容向读者提出几点学习要求,读者在学习与复习有关内容时应时刻注意并尽量达到这些基本要求.

"主要内容"是围绕着各章的基本内容、基础知识、基本思想方法简明扼要地介绍、小结和辅导,有些概念还作了适当的延伸和拓展,以便读者在学习或复习时进一步地深入理解和掌握该章的要领.

"习题与解答"是通过覆盖各章基本内容的大量习题的分析与讨论,为读者的解题能力、解题方法提供有益的借鉴与启迪.当然,数学的解题方法是多种多样的,我们在书中所列出的解法未必最佳,读者不可受此束缚,应独立思考,发挥自己的想象力、创造力,本书在此只是抛砖引玉,启发和引导读者多思考,以达到提高读者

分析问题与解决问题的能力.

"深入思考与加强提高"是写给读者复习、思考与提高用的一组复习题，读者最好独立完成，以它来检验自己的学习质量. 书后附有详细的解答，以供参考.

最后，值得一提的是本书基本上覆盖了大学空间解析几何教材中的重要内容，另外，在本书中，作者还自编了部分习题，并且参考了大量国内空间解析几何的教材，将一些难度较高的习题，由浅入深地作了叙述与解答.

限于编者的水平，书中恐有不妥与错误之处，敬请广大读者批评指正.

本教材受海南大学出版基金资助，资助号为：hdzbjc0805.

编者

2008 年 8 月于海南大学

目　　录

第 1 章　向量代数

基本要求

理解向量的有关概念与线性相关性.

掌握向量共线、共面的判别方法.

了解点与向量的坐标表示.

掌握向量的线性运算、向量的内积（又称数量积）、向量的外积（又称向量积）、混合积和二重外积等运算.

1.1　向量及其线性运算

1. 向量的有关概念

（1）向量的定义与表示法

既有大小又有方向的量称为向量(矢量). 常用符号 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\cdots$来表示向量. 一个向量 $\boldsymbol{a}$ 可以用一有向线段$\overrightarrow{AB}$来表示，有向线段的长度$|\overrightarrow{AB}|$表示向量 $\boldsymbol{a}$ 的大小，从始点 A 到终点 B 的指向表示$\boldsymbol{a}$ 的方向(如图 1.1)，在后面的内容里，我们更多的是用坐标(a_1,a_2,a_3)来表示一个向量 $\boldsymbol{a}$.

图 1.1

（2）向量的模

表示向量 $\boldsymbol{a}$ 大小的数，称为 $\boldsymbol{a}$ 的模，记为$|\boldsymbol{a}|$.

（3）零向量

模为零的向量，称为零向量，记为 $\boldsymbol{0}$.

（4）单位向量

模为 1 的向量，称为单位向量. 与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量记为$\boldsymbol{a}^o$.

（5）相等向量

模相等，方向相同的向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，称为相等向量，记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 即一个向量 $\boldsymbol{a}$ 能够由

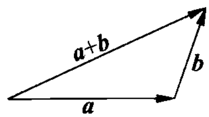
另一个向量 $\boldsymbol{b}$ 经平行移动得到，则称 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 相等.

(6) 反向量(或负向量)

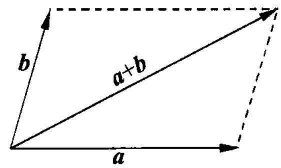
与向量 $\boldsymbol{a}$ 的模相等，方向相反的向量，称为 $\boldsymbol{a}$ 的反向量(或负向量)，记为 $-\boldsymbol{a}$.

2. 向量的加法与减法

(1) 向量加法的定义：三角形法则与平行四边形法则(如图 1.2).



三角形法则



平行四边形法则

图 1.2

(2) 向量的减法的定义：$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$.

(3) 向量的加法、减法的性质.

① $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

② $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

③ $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$.

④ $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

⑤ $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

3. 实数与向量的乘积

(1) 数量与向量的乘积的定义

数量 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积定义为一个向量，记为 $\lambda\boldsymbol{a}$，且满足：

① $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$.

② $\lambda\boldsymbol{a}//\boldsymbol{a}$(当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=0\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$).

(2) 数量乘向量的性质

① $\lambda(k\boldsymbol{a})=\lambda k\boldsymbol{a}$.

② $(\lambda+k)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{a}$($\lambda,k$ 是任意实数，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是任意向量).

③ $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

4. 一个非常有用的公式

A,B,C 是一条直线上的 3 个不同点，如果 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{BC}$，则对于空间任意一点 O，都有 $\overrightarrow{OB}=\frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{OA}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{OC}$.

5. 共线、共面向量组

(1) 概念：平行于同一直线(平面)的向量组，称为共线(共面)向量组.

（2）共线、共面向量组的几个结论：

① 零向量与任何向量都共线，共线向量组一定共面，且任两个向量一定共面，任两个平行的向量一定共线.

② 两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线（不共线）$\Leftrightarrow\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 线性相关（线性无关）.

③ 3 个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面（不共面）$\Leftrightarrow\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 线性相关（线性无关）.

④ 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，则 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共面 $\Leftrightarrow\boldsymbol{c}=k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}$（$k_1,k_2$ 是唯一的实数）.

⑤ 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面，则对空间中任意一个向量 $\boldsymbol{\beta}$ 均存在唯一的一组实数 k_1，k_2,k_3，使得 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}+k_3\boldsymbol{c}$.

1.2　标架与坐标

1. 基与坐标

空间中任意 3 个有序且不共面的向量组 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 均可称为空间中的一个基，且对于空间中任意一个向量 $\boldsymbol{a}$，存在唯一的数组 (x,y,z) 使得 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3$. 此时，称有序实数组 (x,y,z) 为向量 $\boldsymbol{a}$ 在基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 下的坐标，记为 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$.

2. 标架

空间一个点 O 和一个基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 合为一起，称为空间一个仿射标架（或称为仿射坐标系），简称为标架（或坐标系），记为 $\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$. 其中 O 称为坐标原点，$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 称为坐标向量.

当 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 为两两垂直（即正交）的单位向量时，则 $\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 称为直角坐标系；如果 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 仅为两两垂直时，那么 $\{O,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 称为笛卡儿坐标系.

1.3　向量内积（或称点积、数量积）的定义和性质

定义两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的内积为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta,\theta=\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$（$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角）.

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 是一个实数，当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 中有一个是零向量时，内积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

（1）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.

（2）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 有 3 种可能：① 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$；② 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$；③ 或 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都不是零向量，但 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

（3）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$.

（4）$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{a})+\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle+|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle$.

（5）$(\lambda\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+k\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$（$\lambda,k$ 是任意实数）.

(6) $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$，等号当且仅当 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$ 时成立.

1.4 向量外积(或称叉积、向量积)的定义与性质

定义两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的外积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 是一个向量，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$构成右手法则，且 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$，当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 中有一个是零向量时，规定 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$.

(2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 有 3 种可能：① 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$；② 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$；③ 或 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都不是零向量，但 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$ 特别有 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

(3) $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2$ 即 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|^2$.

(4) $(\lambda\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+k\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$（$\lambda,k$ 是任意实数）.

(5) 三角形 ABC 的面积为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$.

1.5 向量及其运算的坐标表示

建立空间直角坐标系 $\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 后（如图 1.3 所示），对于空间中的任一点 $M(x,y,z)$，有唯一的分解式 $\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3=(x,y,z)$.

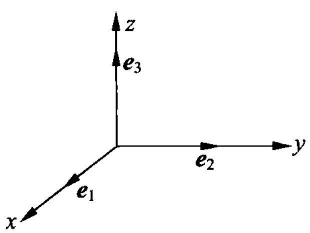


图 1.3

设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$则有：

(1) $\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_1\pm b_1,a_2\pm b_2,a_3\pm b_3)$.

(2) $\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)$.

(3) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=\sum\limits_{i=1}^{3}a_ib_i$.

(4) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1)$.

(5) 当 $\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3)$时，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的混合积为

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面$\Leftrightarrow(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$.

(6) $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$，　$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}$.

$$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角 α,β,γ 的余弦分别为

$$\cos\alpha=\frac{a_1}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$$

$$\cos\beta=\frac{a_2}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$$

$$\cos\gamma=\frac{a_3}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$$

且

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

1.6　几个常用的公式与恒等式

1. 两点距离公式

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

其中 $M_i(x_i,y_i,z_i)$为空间中任意两点.

2. 定比分点公式

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$$

其中$\dfrac{M_1M}{MM_2}=\lambda(\lambda\neq-1)$，$M(x,y,z)$，$M_i$ 同上.

3. 二重外积公式

(1) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$.

(2) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$.

4. Jacobi(雅可比)恒等式

(1) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

(2) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0}$.

5. Lagrange(拉格朗日)恒等式

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$$

习题与解答

【习题 1.1】 试证:三角形的三条中线可以构成一个三角形.

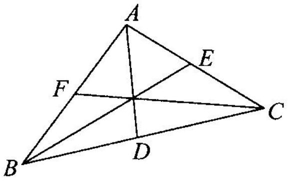


图 1.4

证:(如图 1.4)设 AD,BE,CF 为 ΔABC 的中线.证明它们构成一个三角形,只要证明

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\frac{3}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})=\mathbf{0}$$

因为

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\mathbf{0},\quad \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA},\quad \overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

所以

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\frac{3}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})=\mathbf{0}$$

即任一个三角形的三条中线构成一个三角形.

【习题 1.2】 (如图 1.5)设 A,B,C 是不共线的 3 点,它们决定一平面 Π,则点 P 在 Π 上的充要条件是存在唯一的数组 (λ,μ,γ) 使得

$$\begin{cases}\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}\\ \lambda+\mu+\gamma=1\end{cases} *$$

其中 O 是任意的一点,P 在 $\triangle ABC$ 内的充要条件是 * 与 $\lambda\geqslant0,\mu\geqslant0,\gamma\geqslant0$ 同时成立.

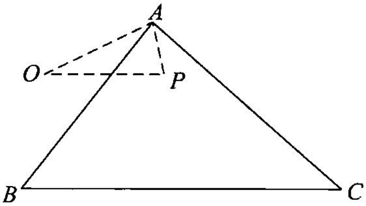


图 1.5

证:若点 $P\subset\Pi$,则$\overrightarrow{AP}$与$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AC}$共面,$\Leftrightarrow\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AB}+l\overrightarrow{AC}$,或

$\Leftrightarrow\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=k(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+l(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$

$\Leftrightarrow$即$\overrightarrow{OP}=(1-l-k)\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OB}+l\overrightarrow{OC}$

取 $1-l-k=\lambda,\mu=k,l=\gamma$"$\Leftarrow$"则

$$\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC},\lambda+\mu+\gamma=1^*$$

* **部分证明**: "$\Rightarrow$"P 在$\triangle ABC$ 内成立.$\Rightarrow 0\leqslant|\overrightarrow{AP}|\leqslant|\overrightarrow{AB}|$,且

$$0\leqslant|\overrightarrow{AP}|\leqslant|\overrightarrow{AC}|,\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AB}+l\overrightarrow{AC}$$

$\Rightarrow 0\leqslant k\leqslant l,0\leqslant l\leqslant1$,且 $0\leqslant k+l\leqslant1$ 即 $\mu\geqslant0,r\geqslant0,\lambda+\mu+\gamma=1\Rightarrow\lambda\geqslant0$

"$\Leftarrow$"若 $\lambda\geqslant0,\mu\geqslant0,\gamma\geqslant0,\lambda+\mu+r=1$

$\Rightarrow 0\leqslant k\leqslant1,0\leqslant l\leqslant1,\Rightarrow\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AB}+l\overrightarrow{AC}$且 $0\leqslant k+l\leqslant1$

$\Rightarrow P$ 在$\triangle ABC$ 内.

【习题 1.3】 在$\triangle ABC$中，点D，E分别在边BC与AC上，且$BD=\frac{1}{3}BC$，$CE=\frac{1}{3}CA$，AD与BE交于R，试证：$RD=\frac{1}{7}AD$，$RE=\frac{4}{7}BE$.

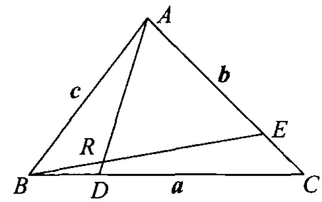


图 1.6

证：（如图 1.6）设$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$. 于是

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$$

令

$$\overrightarrow{RD}=\lambda\overrightarrow{AD},\quad \overrightarrow{RE}=\mu\overrightarrow{BE}$$

则

$$\overrightarrow{RD}=\lambda(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})=\frac{\lambda}{3}\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{c}$$

$$\overrightarrow{RE}=\mu(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE})=\frac{\mu}{3}\boldsymbol{b}+\mu\boldsymbol{a}$$

因为

$$\overrightarrow{RD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{ER}=\boldsymbol{0}$$

所以

$$\left(\frac{\lambda}{3}\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{c}\right)+\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}+\left(-\frac{\mu}{3}\boldsymbol{b}-\mu\boldsymbol{a}\right)=\boldsymbol{0}$$

整理并将$\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$代入得

$$(2\lambda+3\mu-2)\boldsymbol{a}+(3\lambda+\mu-1)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$$

由于$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$不共线（线性无关），所以

$$\begin{cases}2\lambda+3\mu-2=0\\3\lambda+\mu-1=0\end{cases}$$

解得

$$\lambda=\frac{1}{7},\quad \mu=\frac{4}{7}$$

故题得证：$\overrightarrow{RD}=\frac{1}{7}\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{RE}=\frac{4}{7}\overrightarrow{BE}$

【习题 1.4】 用向量法证明$\triangle ABC$的 3 条中线交于一点P，并且对任意一点O有

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$$

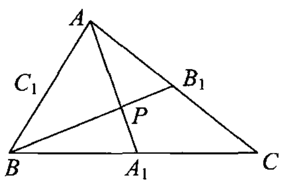


图 1.7

证：（如图 1.7）设A_1，B_1，C_1分别为BC，CA，AB的中点，设中线AA_1，BB_1交于点P，则由于A，P，A_1三点共线，可设$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AA_1}$，同理，设$\overrightarrow{BP}=n\overrightarrow{BB_1}$，因为

$$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{AB}+n(\overrightarrow{AB_1}-\overrightarrow{AB})=(1-n)\overrightarrow{AB}+\frac{n}{2}\overrightarrow{AC}$$

另一方面

$$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AA_1}=\frac{m}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{m}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{m}{2}\overrightarrow{AC}\quad(\text{平行四边形对角线的一半})$$

所以

$$\frac{m}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{m}{2}\overrightarrow{AC}=(1-n)\overrightarrow{AB}+\frac{n}{2}\overrightarrow{AC}$$

即

$$\left[\frac{m}{2}+(n-1)\right]\overrightarrow{AB}+\left(\frac{m}{2}-\frac{n}{2}\right)\overrightarrow{AC}=\mathbf{0}$$

由于$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$不共线(线性无关)

因此，有$\begin{cases}\dfrac{m}{2}+(n-1)=0\\[2mm]\dfrac{m}{2}-\dfrac{n}{2}=0\end{cases}$ 解得 $m=n=\frac{2}{3}$. 即$\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$,$\overrightarrow{BP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BB_1}$.

再设中线 CC_1 与 AA_1 交于点 P_1，同理可求得：$\overrightarrow{AP_1}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$,$\overrightarrow{CP_1}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CC_1}$.

因而$\overrightarrow{AP_1}=\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$即 P 与 P_1 重合，即 3 条中线交于一点 P.

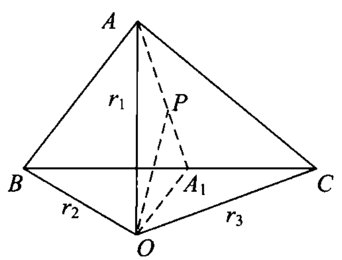


图 1.8

再设$\overrightarrow{OA}=r_1$,$\overrightarrow{OB}=r_2$,$\overrightarrow{OC}=r_3$(如图 1.8)，又因为

$$\overrightarrow{OP}=r_1+\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}=r_1+\frac{2}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA_1})$$

其中 $BA_1=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$，故

$$\overrightarrow{OP}=r_1+\frac{2}{3}\left[\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})\right]$$

即

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}(r_1+r_2+r_3)=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$$

【习题 1.5】 设 $A_i(i=1,2,3,\cdots,n)$是正 n 边形的顶点，O 是它的中心，试证 $\sum\limits_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}=\mathbf{0}$.

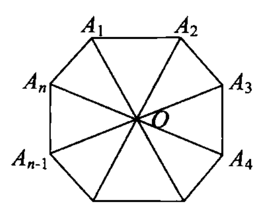


图 1.9

证：(如图 1.9)因为

$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_3}=\lambda\overrightarrow{OA_2}$,$\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_4}=\lambda\overrightarrow{OA_3}$,…,

$\overrightarrow{OA_{n-1}}+\overrightarrow{OA_1}=\lambda\overrightarrow{OA_n}(\lambda\neq 2,\overrightarrow{OA_i}\neq\overrightarrow{OA_{i+2}})$

以上各式相加得

$$2(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}+\cdots+\overrightarrow{OA_n})=\lambda(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}+\cdots+\overrightarrow{OA_n})$$

由于 $\lambda\neq 2$，所以 $\sum\limits_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}=\mathbf{0}$

【习题 1.6】 试证：三点 A,B,C 共线的充要条件是存在不全为零的实数 λ,μ,γ，使得 $\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$ 且 $\lambda+\mu+\gamma=0$，其中 O 是任意取定的一点.

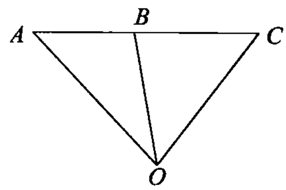


图 1.10

证："$\Rightarrow$"若 A,B,C 共线

$\Rightarrow$则$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$共线，$\Rightarrow\overrightarrow{AB}=\lambda_1\overrightarrow{AC}(\lambda_1\neq 0,1)$

又

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA},\quad \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$$

所以

$$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\lambda_1(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})\Rightarrow(1-\lambda_1)\overrightarrow{OA}+\lambda_1\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\mathbf{0}$$

令

$$\lambda=1-\lambda_1,\quad \lambda_1=\gamma,\quad \mu=-1$$

则 $\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$ 且 $\lambda+\mu+\gamma=0$.

"$\Leftarrow$"若 $\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$ 且 $\lambda+\mu+\gamma=0$.

则将 $\lambda=-(\mu+\gamma)$ 代入上式，得

$$\mu(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+\gamma(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=\mathbf{0}$$

$\Rightarrow\mu\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}=\mathbf{0}\Rightarrow\overrightarrow{AB}=-\dfrac{\gamma}{\mu}\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$共线，即 A,B,C 3 点共线.

【习题 1.7】 判断下列各组的 3 个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是否共面？能否将 $\boldsymbol{c}$ 表示成 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的线性组合？若能表示，则写出表达式.

(1) $\boldsymbol{a}=(5,2,1),\boldsymbol{b}=(-1,4,2),\boldsymbol{c}=(-1,-1,5)$；

(2) $\boldsymbol{a}=(6,4,2),\boldsymbol{b}=(-9,6,3),\boldsymbol{c}=(-3,6,3)$；

(3) $\boldsymbol{a}=(1,2,-3),\boldsymbol{b}=(-2,-4,6),\boldsymbol{c}=(1,0,5)$.

解：(1) 因为 $|A|=\begin{vmatrix}5&2&1\\-1&4&2\\-1&-1&5\end{vmatrix}=|2|\neq 0$，所以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面；

(2) 因为 $|A|=\begin{vmatrix}6&4&2\\-9&6&3\\-3&6&3\end{vmatrix}=0$，所以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面，且 $\boldsymbol{c}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}+\dfrac{2}{3}\boldsymbol{b}$；

(3) 因为 $|A|=\begin{vmatrix}1&2&-3\\-2&-4&6\\1&0&5\end{vmatrix}=0$，所以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面，但又因为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线