

最优化方法及其应用

(四)

— 最优设计 —

编写：顾基发

中国科学院数学研究所运筹室

1977·6

编辑说明

“最优化方法及其应用” (一)至(三)着重介绍非线性规划、动态规划、直接法的一些方法和理论，本集(四)是应用部分，特别偏重在最优化设计方面，着重介绍各行各业的应用及其最优化模型的形成方面，最近二、三年很多单位做了很多很好的工作，由于我们收集到成文资料太少，而且文体繁、简相差甚远，因此迟迟没有编成，为了推动最优化的应用工作，我们终于把手头资料重新整理一下，这样当然会挂一漏万，而更可能是整理中歪曲了原意，这方面责任当然在编者，但好在在每篇文章后面尽可能附上原出处 提供单位，有疑问者可和他们进一步商讨在收集和改编过程中有的和原作者商讨过，有的未及商讨，甚至征得同意，这里表示歉意，好在这是内部资料，同时又是为了互相促进原作者们当不会过分见怪吧！

1977年5月24日

目 录

前言

(一) 建筑

一、建筑方面的最优设计简介 (四川省工业
建筑设计院)

二、屋架最优结构设计 (中国科学院
计标所)

三、焊接钢吊车梁的最优设计 (武汉钢铁设计院)
(冶金部建筑研究院)
(湖南省计标所, 一机
部第八设计院)

四、预应力拱形空腹屋架的最优设计
(上海市机电设计院)

五、斜拉桥结构尺寸拟选中的最优化
(上海市市政工程设计院)
(上海师大数学系)

(二) 机械

一、船用螺旋桨(优选设计) (广州造船厂)

二、旋转开沟机最优设计参数选择
(廊坊农机具所)

三、大卡尺的最佳断面选择 (成都号具刃具厂)

四、周向稀加劲筒壳的最佳设计 (三机部623所)
(复旦大学数学所)

五、门式起重机四连杆变幅机构的最优设计

(上海师大数学系)

(三) 电工和电子

一、某种小型电机的最优设计 (上海电机科学研究所)

(复旦大学数学系)

二、均衡口的电路设计 (南京大学数学系)

三、电力变压器的电磁最优设计 (中国科技大学数学系)

(合肥变压器厂)

四、电阻网络最小损耗功率设计

五、假互补滤波器的最优设计 (中国科学院计标所)

六、某滤波器设计中部份参数的优选

(四) 化工

一、设计橡胶的最优配方 (中国科学院计标所)

二、化学反应的平衡组成问题 (南京大学数学系)

三、燃料配方问题

(五) 其它

一、光学系统的自动设计问题 (北京大学数学系)

(南京大学数学系)

二、用优选法推求柴油机配气凸轮运动方程

(邵仰一)

三、引水管道铺设的经济计算 (上海师大数学系)

四、关于给水管网最优设计 (上海师大数学系)

五、热压机最优设计

前言

最近几年我国由于很多产品的设计从仿制阶段进入自行设计阶段，有的甚至进入赶超行列，因此对设计提出很多更高，更精的要求，过去习惯的凭经验，或直观判断提方案，然后再加以适当修正的方法有的已经不适应形势需要。由于大型电子计算机的出现，加上一些精确度高的力学分析数值方法的出现，使我们有可能是高精度地进行一些设计的最优分析工作，而最优化方法的应用既可以使方案在规定的设计要求下达到某些最优（合理）的结果，又不必花费过多的计算机工作量，最优设计是这方面的综合性的方法。在国内目前已广泛应用在机械工业，光学，电子，电机，化工，建筑、航空，造船等部门，许多部门（如三航部，上海等）办了学习班，有的部门（如交通部等）还开了专门会议。

一、最优设计问题的数学提法

我们考虑一组（ n 个）设计变量，记为 x_1, x_2, \dots, x_n ，这些设计变量可以是一些结构尺寸参数，也可以是一些化学成分含量，有时简单用向量记号 x 表之。

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

一个设计往往要满足一些规定条件（数学上叫做约束条件），有的是限制设计变量的范围，例如允许选择某钢板厚度只能在 1cm 到 5cm 之间，有的是限制设计变量间某种关系，

例如选择的某些结构必须考虑受力的强度要求，还有稳定要求等。这些约束简单表成

$$g_j(x) \geq 0 \quad j=1, 2, \dots, m,$$

m 是约束条件的数，凡是满足这些约束条件的设计方案都称为可行方案（或可行解），所有可行方案组成的集合记为 R ：

$$R = \{x \mid g_j(x) \geq 0, \quad j=1, \dots, m, \}$$

除了这些规定条件外，设计中总还想追求某种目标，并以达到此目标的好坏，来评论两个方案的优劣，这个评判目标可以是结构重量，体积，成本，或某些性能指标等，简单记为

$$f(x)$$

目标可以是一个，也可以是多个。目标可以是定量的，也可以是定性（但至少是可以比较的）。在规定的约束集 R 内求其目标 $f(x)$ 最小有时就记成

$$\min_{x \in R} f(x)$$

二、最优化方法

对于目标函数和约束函数都是线性情况这时形成线性规划模型，可以使用线性规划方法，例如单纯形方法等。对于目标和约束中至少有一个是非线性的情况，一般使用非线性规划方法，而当目标或约束函数无法写出解析表达式，或不能求导做的任一，采用直接法（即优选法）关于非线性规划和直接法已分别在本书讲义（一）、（三）中介绍过，随机选法是另一种类型的

最优化方法，看来比较适用目标函数很为复杂的情况。

当然最优化方法还有动态规划，组合最优化，最优控制等
方法。

此外从结构设计方面本身结合力学方面特点还有像满应力
方法，能量准则法等都可以处理一类最优设计问题。

(一) 建筑

1. 建筑方面的最优设计简介

四川省工业建筑设计院标准
设计室

我们的每一项工程设计总是希望在满足各项使用要求的同时用较低的造价较少的材料，最优设计就是从这个思想出发采用数学方法来实行的。最优设计的思想不能认为是来自外国，在我国建筑史上很早就有的，如西安半坡村的仰韶文化遗址（距今约6000年）的很多房屋都是作成圆形平面的。这样的平面适合当时的使用功能，在使用相同的维护结构材料情况下具有最大的使用面积，还有散热最少和受力合理的优点；又如我国古代的重要建筑著作“营造法式”给出了从园木中取出抗弯强度最大的矩形截面梁的近似公式，截面的高宽比为3:2，若用现代最优设计方法算出的比例为 $\sqrt{2}$ ，误差只有6%。但是最优设计的广泛研究和应用还是近10年来的事。主要原因是近10年来计算工具（电子计算机）和计算方法（最优化方法）发展比较快，结构分析方法日趋完善；另一方面是工程数量的增多，特别是大跨度大空间和高层建筑的增多对降低造价减轻自重更为迫切。

最优设计是以工程实际为对象提出来的，它是设计工作技术革新中的一个组成部分，它能使设计对象在满足各种使用要求的前提下降低造价而不增加科研试验费，因此近年来发展迅速得到很多部门的重视这方面的文献也越来越多。

最优设计必须遵守有关规范和规定，并考虑材料结构和施工的可能性，所以说，最优设计并非绝对最好，而是随着这些条件的变化而变化。因此最优设计的研究工作不能代替材料结

构和规范的研究工作。

在此我们以两个简单例子来说明什么是最优设计：

(一) 设计——钢筋混凝土平板，已知宽度为 b ，跨度为 l ，外加荷重为 q 。钢筋混凝土的容重为 γ ，钢的容重为 ρ ，混凝土的单价 C_n 元/ m^3 ，钢筋的单价 C_g 元/ Kg ，问板厚 h 为何值？钢筋断面 A_g 为何值？板既能满足强度又使造价为最低。搞过钢筋混凝土设计的人都知道板厚 h 较大， A_g 就较少， h 较小 A_g 就较大，现在的问题是要求钢筋的费用加上混凝土的费用的总和为最小而又要满足强度要求，为了解决这问题列出板的总造价：

$$C = \gamma b h l C_n + A_g \rho l C_g \quad (1)$$

和钢筋混凝土板的强度条件：

$$\left(h - a - \frac{x}{2}\right) A_g B_g \geq K (M_1 + M_2) \quad (2)$$

式中： $x = \frac{A_g B_g}{R_w b}$ ， $M_2 = \frac{1}{8} q l^2$ ， $M_1 = \frac{1}{8} \gamma b h l^2$ ，

a —— 保护层厚度， R_g —— 钢筋强度， R_w —— 混凝土抗弯强度， K —— 安全系数。满足 (2) 式的 (A_g, h) 是很多的，若其中有一组 (A_g^*, h^*) 可以使造价 C 降到最低， (A_g^*, h^*) 就是这个问题的最优解。

式中 A_g, h 称为设计变量； C 是设计希望达到的目的，称为目标函数；(2) 式称为约束条件。

(二) 对上面所提到的园木中抽出抗弯强度最大的矩形梁问题，

已知直径为 B ，求梁的高度 h 、和宽度 b 。设计变量 b 、 h ，目标函数就是梁的截面矩：

$$W = \frac{1}{6} b h^2 \quad (3)$$

约束条件是梁的截面对角线不超过圆木直径即：

$$b^2 + h^2 \leq R^2 \quad (4)$$

列出目标函数和约束条件是最优设计过程中极为重要的一步，这一步称为建立数学模型。

最优设计法，不仅可以应用于建筑构件的设计，而且可以应用于整体建筑的设计和整个城市的综合规划，在造船航空和空间技术等方最优化设计也有很大的用处，但是最优设计还是一种新学科，很多内容尚处在发展之中还不够成熟，因此这方面的研究工作，将是长期的，但是这种研究工作必须紧密联系生产实践才有生命力。

国外经验证明，采用最优设计可以节约材料或造价 10% ~ 50%。

目前土建方面的最优设计法，在我国刚开始采用，不少单位就取得了可喜的成绩，如一机部八院用最优化设计法使重型车间的钢柱节省钢材 12% 以上，上海机电设计院用最优化设计法使空腹屋架减轻自重 30% 以上，四川省工业建筑设计院用最优化设计法确定某大型仓库的跨度跨度和开间，比常用方案降低造价 20% 以上。这些情况表明最优设计对提高设计质量，降低工程造价是有重要意义的，在毛主席革命路线的指引下，随着我国社会主义建设的高速发展，最优设计将会得到更广泛的应用。

附例：某大型机械化库房的柱网优选

某大型机械化仓库，面积 $F = 20000 \text{ m}^2$ ，柱顶标高 12 米，檐高 13.5 米，采用大型屋面板，折线型屋架，悬臂吊车梁 20 丁吊车，双肢管柱，柱基础，维护结构采用钢窗和大型墙板，温度区段的长度 $L \leq 100 \text{ M}$ ，由于施工条件的要求跨度不大于 30 米，求最优之跨数 n ，最优之跨度 a ，最优之开间 b 。本问题的设计变量有三个，即 n 、 a 、 b ，因此我们的第一个任务是将各部份的造价表示为这三个设计变量的近似函数（长度单位是米，面积单位是米²，造价单位是元）。

1. 屋面板造价：

$$160.57 \{ 0.05 + 1.18 \times 10^{-5} b^3 \} F$$

其中 160.57 是屋面板综合单价， F 是整个建筑的面积，括号内是屋面板随着跨度增加折标厚度的函数，这个函数是根据 6 米、9 米、12 米跨度屋面板的经济指标近似确定的。

2. 屋架造价：

$$\left(\frac{F}{ab} + \frac{F}{La} \right) \left\{ 1.10 [1 + 0.065(a - 24)] \times 10^3 + \frac{a(b - 6) 57}{30} \right\}$$

前一部份表示屋架的概数，后一部分表示屋架的单价，它是用 18 米、24 米、30 米的予应力折线屋架的单价统计得来的。

3. 吊车造价：

$$2n (4.0 + 0.11a) \times 10^4$$

公式的前一部分 $2n$ 是吊车的台数，每跨两台。后一部

份是吊车的单价，是根据产品目录统计得到的。

4. 吊车梁及轨的造价：

$$\frac{2F}{ab} \{ (0.136b + 0.00068b^3) \times 340.17 + 44b \}$$

式中 $\frac{2F}{ab}$ 是吊车梁的根数，后一部分是每根吊车梁及其该梁上的轨道造价。吊车梁是用鱼腹吊车梁的经济指标统计得到的。

5. 边柱及山墙柱的造价：

$$\left\{ \frac{2F}{nab} + \frac{2F}{nal} + \frac{2n(a-6)}{6} \right\} \{ 765 + 7(a-24) + 48(b-6) \}$$

总公式的前一部分是边柱及山墙柱的根数近似公式，后一部分是每一根柱的单价统计公式。

6. 中柱造价：

$$\left\{ \frac{F}{nab} + \frac{F}{nal} \right\} (n-1) \{ 925 + 12(a-24) + 48(b-6) \}$$

7. 边柱基造价：

$$\left\{ \frac{2F}{nab} + \frac{2F}{nal} + \frac{2n(a-6)}{6} \right\} \{ 622 + 35(a-24) + 57(b-6) \}$$

8. 中柱基造价：

$$\left\{ \frac{F}{nab} + \frac{F}{nal} \right\} (n-1) \{ 824 + 35(a-24) + 57(b-6) \}$$

9. 维护结构造价：

$$\frac{2F}{na} \{ 10.5 \times 171 (0.03 + 0.00208b + 0.86 \times 10^{-4} b^2) + 3.0 \times 33 - 54 \}$$

$$+ 2na \times 13.5 \times 171 (0.03 + 0.00208b + 0.86 \times 10^{-4} b^2)$$

公式的前一部分为纵向维护结构造价，后一部分为横向维护结构造价，园括号内是墙板的折标厚度，171.1是墙板的综合单价，10.5是墙板的实际高度，33.5是钢窗的单价，3.0是钢窗的实际高度。这里还要说明一下，以上九项不包括与设计变量 a 、 b 、 n 无关的屋面防水隔热部份及地坪造价以及柱间支撑等影响较小的项目。

设目标函数为 M ，则 M 就是以上九项的和

$$M = \textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} + \textcircled{4} + \textcircled{5} + \textcircled{6} + \textcircled{7} + \textcircled{8} + \textcircled{9}$$

约束条件:	$12 \leq a \leq 30$	且为3的模数
	$6 \leq b \leq 12$	且为3的模数
	$n \geq 1$	且为整数

解决上面问题的方法很多，可以采用数学规划法和优选法（直接法），以下写出采用优选法的因素轮换法的主要步骤。

1. 固定 $n=4$ ， $b=6$ ，求得 $a=30$ 为最优
 2. 固定 $a=30$ ， $b=6$ ，求得 $n=2$ 为最优
 3. 固定 $a=30$ ， $n=2$ ，求得 $b=9$ 为最优
 4. 再固定 $n=2$ ， $b=9$ ，求得 $a=30$ 为最优
- 最优解为 $(n=2, b=9, a=30)$

下面列出部份方案的经济指标：

常用方案之一： $n=4$ $b=6$ $a=18$

$$M = 17.6 \times 10^4 + 40.3 \times 10^4 + 50.6 \times 10^4 + 21.8 \times 10^4 + 8.95 \times 10^4$$

$$+ 12.8 \times 10^4 + 6.65 \times 10^4 + 10.0 \times 10^4 + 11.63 \times 10^4 =$$

$$= 180.33 \times 10^4 \text{ 元}$$

再将最优方案的目标函数值列出如下：

最优方案： $n=2$ ， $b=9$ ， $a=30$

$$\begin{aligned}
 M^* &= 18.6 \times 10^4 + 13.6 \times 10^4 + 29.2 \times 10^4 + 14.6 \times 10^4 + 9.15 \times 10^4 \\
 &\quad + 4.16 \times 10^4 + 7.77 \times 10^4 + 4.82 \times 10^4 + 14.7 \times 10^4 \\
 &= 116.14 \times 10^4 \text{ 元} .
 \end{aligned}$$

部份方案的目标函数值列于下表：

参数	$a=18$ $b=6$ $n=4$	$a=24$ $b=6$ $n=3$	$a=30$ $b=6$ $n=2$	$a=30$ $b=6$ $n=2$	$a=30$ $b=12$ $n=2$	$a=30$ $b=9$ $n=3$
造价 (万元)	180.33	153.06	122.67	116.14	120.25	128.39

从表中可以看出 $a=30$ ， $b=9$ ， $n=2$ 为最优参数，最优参数方案 ($a=30$ ， $b=9$ ， $n=2$) 比常用参数方案 ($a=18$ ， $b=6$ ， $n=4$) 可以节约 64 万元。

* 引自《最优设计资料》(1~3) 1976.2.

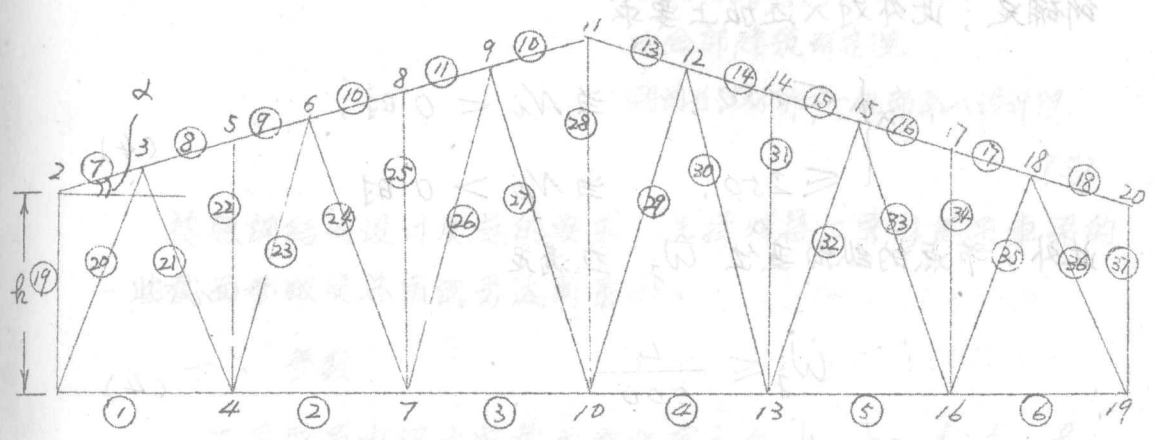
(四川省工业建筑设计院)

** 运筹室桂湘云，赖炎莲同志参加了钢筋混凝土平板的最优设计及大型机械化库房的轻网优选工作。

二. 屋架最优结构设计*

中国科学院计算所

考虑如下形式的屋架，其节点数目为 20，杆件数目为 37，设边高为 h （即节点 1 到 2 的距离），上弦杆的斜率为 $\tan \alpha$ ，各杆的截面积为 A_i （ i 编号在图中用 i 表示），诸下弦杆的面积相同，即 $A_1 = \dots = A_6$ ，诸上弦杆面积也相同，即 $A_7 = A_8 = \dots = A_{18}$ ，又由结构的对称性有 $A_{19} = A_{37}$ ， $A_{20} = A_{36}, \dots, A_{27} = A_{29}$ ，故最多共 12 种不同截面积。



假定此桁架承受两种载荷的作用，一种为对称的载荷（如屋顶重号），一种为单边载荷（例如在施工过程中所受的力），则它应满足平衡条件，连续性条件、强度要求等。

具体约束条件如下。

1. 根据平衡条件有

$$KU = P$$

其中 $U_j = (u_j, w_j)$ 是节点位移， P 为外载，而 K 为刚度矩阵

矩阵，而杆件内力 N_i 应满足

$$N = C U$$

其中 C 为应力矩阵，而内力 N_i 被杆件面积 A_i 除即为应力。

2. 根据强度要求，应力不许超过许用应力，这里用下方程来表示

$$\frac{|N_i|}{\phi_i A_i} \leq [\sigma_i] \quad (3)$$

其中 $[\sigma_i]$ 为许用应力， $\phi_i \leq 1$ 为稳定系数，由细长比 λ 所确定，此外对 λ 还加上要求

$$\lambda \begin{cases} \leq 150, & \text{当 } N_i < 0 \text{ 时,} \\ \leq 250, & \text{当 } N_i > 0 \text{ 时,} \end{cases} \quad (4)$$

此外，节点的纵向变位 w_j 应满足

$$w_j \leq \frac{L}{500} \quad (4)$$

其中 L 为跨度

由于这个桁架是一个静定结构，当 q 与 $tg \alpha$ 给定后，各杆的截面积可由 (3) 式选定（当改变某杆的截面积时，内力不变，因而可单独考虑每个杆的截面），因此结构的总重量可以由 q 与 $tg \alpha$ 所确定。

总重量 W 为

$$W = \sum_{i=1}^{37} \rho A_i l_i \quad (5)$$