离散数学疑难分析与解题方法

大学数学学习方法丛书

基本内容归纳提炼
学习方法疑难分析
典型例题解答技巧
考研知识总结升华

LISAN SHUXUE YINAN FENXI YU JIETI FANGFA

梅家斌 罗娟 刘红玲 曹建文

華中科技大學出版社
http://www.hustp.com

大学数学学习方法丛书

离散数学
疑难分析与解题方法

梅家斌　罗　娟
刘红玲　曹建文

华中科技大学出版社
中国·武汉

内 容 简 介

本书是《大学数学学习方法》丛书之一，共有7章，内容包括命题逻辑、谓词逻辑(一阶逻辑)、集合与关系、函数、代数结构、格与布尔代数、图论. 附录部分提供了模拟试题及其解答共6套. 本书在归纳内容、疑难解析的基础上，用丰富的例题为读者诠释概念、演绎技巧，以培养读者分析和解决问题的能力.

本书可作为高等理工科院校计算机科学、工程与应用专业的教学参考书，也可作为本科生学习与考研的指导书.

图书在版编目(CIP)数据

离散数学疑难分析与解题方法/梅家斌 罗 娟 刘红玲 曹建文. -2版. —武汉：华中科技大学出版社，2008年8月
ISBN 978-7-5609-3181-4

Ⅰ.离… Ⅱ.①梅… ②罗… ③刘… ④曹… Ⅲ.离散数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O158

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第074179号

离散数学疑难分析与解题方法　　梅家斌　罗　娟　刘红玲　曹建文

策划编辑：徐正达
责任编辑：田　密　　　　封面设计：潘　群
责任校对：周　娟　　　　责任监印：周治超
出版发行：华中科技大学出版社(中国·武汉)
　　　　武昌喻家山　　邮编：430074　　电话：(027)87557437
录　　排：武汉佳年华科技有限公司
印　　刷：华中科技大学印刷厂

开本：710mm×1000mm　1/16　　印张：13.25　　字数：360 000
版次：2008年8月第2版　　印次：2008年8月第3次印刷　　定价：18.50元
ISBN 978-7-5609-3181-4/O·319

(本书若有印装质量问题，请向出版社发行部调换)

前　言

离散数学是计算机科学中最重要的基础理论之一，也是培养学生缜密思维、提高学生素质的核心课程．与学习其他基础数学一样，在学习离散数学中，解题是巩固知识、深化理解的一条必要途径．通过解题方法的训练，可以培养学生的综合分析能力和理论联系实际的学风．

本书共七章，在编排上按章分类，每章均分四个部分．第一部分为内容提要，涉及主要的概念、定理、公式，主要为后续内容提供一个理论框架．第二部分为疑难分析，主要针对书中一些较难理解的概念，较难掌握的内容、方法进行答疑辅导，以帮助读者正确理解书中的内容，为下一步深入学习做准备．第三部分是典型例题，结合各章主要知识点，选择适量典型例题，进行分析、解答．有些例题采取多视角分析，并尽量提供一题多解．主要通过对例题的解答分析加深读者对所学知识的深化理解及解题方法的融会贯通，从而起到举一反三、触类旁通的作用．当然，我们所提供的仅是一家之见，难成典范．读者通过这一部分的学习，如能启迪思维、拓展新的解题思路、掌握更多新的解题方法，那将是非常值得庆幸的事．第四部分为习题解答，是第三部分的强化．在学习第三部分的基础上进一步为读者提供一个练习的平台．读者在第四部分时最好先不看解答，自已先解题，在百思不得其解后再参阅解答，这样效果一定会更好一些．这一部分主要选择耿素云等编著的《离散数学》(清华大学出版社第 3 版)中的习题及左孝陵等编著的《离散数学》(上海科学技术文献出版社)中的习题为对象，并对书中所有习题进行解答．在解答中大部分都有较详细的分析．另外还补充了部分较难习题以供部分读者考研参考．附录部分提供了模拟试题及其解答共 6 套．本书末附有参考书目供读者参考．

应该特别指出的是，本书仅是教学参考书，绝非解题的万能钥匙．希望读者务必把学习教材、独立作业放在首位，这样体会才会更加深刻，从而收到事半功倍的效果．

限于作者水平，本书疏漏难免，欢迎读者批评指正．

作　者

2007 年 9 月

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章 命题逻辑

本章知识结构图

- 命题逻辑
  - 5 个基本联结词：否定$\neg$，合取$\wedge$，析取$\vee$，条件$\rightarrow$，双条件$\leftrightarrow$
  - 命题公式的翻译
  - 真值表
  - 等值公式
  - 重言式与矛盾式
  - 四个补充联结词：异或$\overline{\vee}$，与非$\uparrow$，或非$\downarrow$，逆条件$\xrightarrow{c}$
  - 联结词全功能集（也称联结词完备集）与最小联结词组
  - 对偶式
  - 范式
    - 析取范式（主析取范式——小项之析取）
    - 合取范式（主合取范式——大项之合取）
  - 推理的形式结构：$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \Rightarrow B$
  - 推理的常用方法
    - 真值表法
    - 等值演算法
    - 主析取范式法
    - 构造性证明法
      - 直接法
      - 附加前提法
      - 归谬法

- 重要的命题定律
  - 双重否定律：$\neg\neg P \Leftrightarrow P$
  - 幂等律：$P \vee P \Leftrightarrow P$，　$P \wedge P \Leftrightarrow P$
  - 结合律：$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$，　$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$
  - 交换律：$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$，　$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$
  - 分配律：$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$，
    $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
  - 吸收律：$P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$，　$P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$
  - 德·摩根律：$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$，　$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$
  - 同一律：$P \vee \mathrm{F} \Leftrightarrow P$，　$P \wedge \mathrm{T} \Leftrightarrow P$
  - 零一律：$P \vee \mathrm{T} \Leftrightarrow \mathrm{T}$，　$P \wedge \mathrm{F} \Leftrightarrow \mathrm{F}$
  - 否定律：$P \vee \neg P \Leftrightarrow \mathrm{T}$，　$P \wedge \neg P \Leftrightarrow \mathrm{F}$

- 常用的命题等价公式
  - $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$
  - $P \overline{\vee} Q \Leftrightarrow \neg(P \leftrightarrow Q)$
  - $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
  - $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

主要内容

1. 命题及其联结词

命题 能判断真假的陈述句.

真值 命题的陈述句所表达的判断结果，称之为真值. 真值只取两个值，即真或假，分别记为T或F，在有些情况下也分别记为1或0.

原子命题(命题常量(元，项)) 不能再分解为更简单的陈述句的命题称为原子命题，也称为简单命题或命题常量(元，项). 原子命题是最基本的命题，通常用英文字母 $P,Q,R,\cdots,P_i,Q_i,\cdots$ 表示.

命题变量(元，项) 真值可以变化的简单陈述句或泛指的任意命题，均称其为命题变量(命题变元，项)，同样用英文字母 $P,Q,R,\cdots,P_i,Q_i,\cdots$ 表示. 区分是命题常量还是命题变量可由上下文来看. 值得注意的是，命题变量并不是命题.

复合命题 简单命题(一个或多个)经联结词联结而成(命题变元经联结词复合而成的通常形成命题公式).

否定 设 P 是一个命题，复合命题"非 P"(或"P 的否定")，称为 P 的否定式，记作 $\neg P$，$\neg$ 为否定联结词，$\neg P$ 为真当且仅当 P 为假.

合取 设 P 和 Q 是两个命题，复合命题"P 并且 Q"(或"P 与 Q")，称为 P 与 Q 的合取式，记作 $P\wedge Q$，$\wedge$ 为合取联结词. $P\wedge Q$ 为真，当且仅当 P、Q 都为真.

析取 设 P 和 Q 是两个命题，复合命题"P 或 Q"，称为 P 与 Q 的析取式，记作 $P\vee Q$，$\vee$ 为析取联结词. $P\vee Q$ 为真，当且仅当 P、Q 中至少有一个为真.

条件 设 P 和 Q 是两个命题，复合命题"如果 P，则 Q"，称为 P 与 Q 的条件式，记作 $P\rightarrow Q$，$\rightarrow$ 为条件联结词. 当且仅当 P 的真值为T，同时 Q 的真值为F时，$P\rightarrow Q$ 的真值为F，否则 $P\rightarrow Q$ 的真值为T.

双条件 设 P 和 Q 是两个命题，复合命题"P 当且仅当 Q"，称为 P 与 Q 的双条件式，也称为 P 与 Q 的等价式，记作 $P\leftrightarrow Q$ 或 $P\rightleftarrows Q$，$\leftrightarrow$ 和 $\rightleftarrows$ 为双条件联结词. 当 P 和 Q 的真值相同时，$P\leftrightarrow Q$ 的真值为T，否则 $P\leftrightarrow Q$ 的真值为F.

2. 命题公式与解释

合式公式 命题演算的合式公式规定为：

(1) 单个命题常项和变元本身是一个合式公式；

(2) 如果 A 是合式公式，那么 $\neg A$ 也是合式公式；

(3) 如果 A 和 B 是合式公式，那么 $(A\wedge B)$，$(A\vee B)$，$(A\leftrightarrow B)$ 和 $(A\leftrightarrow B)$ 都是合式公式；

(4) 当且仅当能够有限次地应用(1)、(2)、(3)所得到的包含命题变元、联结词和括号的符号串是合式公式. 合式公式又称为命题公式或简称公式.

注：为运算简化书写格式，规定最外层括号可去掉，且规定联结词运算顺序为：$\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$、$\leftrightarrow$.

公式层次 (1) 若 A 是单个命题(常项或变项) $P,Q,R,\cdots,P_i,Q_i,R_i,\cdots,0,1$，则称 A 是0层公式.

(2) 称 A 是 $n+1(n\geqslant 0)$ 层公式是指 A 符合下列情况之一：

① $A=\neg B$，B 是 n 层公式；

② $A=B\wedge C$，其中 B、C 分别为 i 层和 j 层公式，且 $n=\max(i,j)$；

③ $B=B\vee C$，其中 B、C 的层次同②；

④ $A=B\rightarrow C$，其中 B、C 的层次同②；

⑤ $A=B\leftrightarrow C$,其中 B、C 的层次同②.

(3) 若 A 的最高层次为 k,则称 A 是 k 层公式.

定义中的符号“=”为通常义下的等号,以下再出现时意义相同.

解释或赋值 设 A 为一命题公式,$P_1,P_2,\cdots,P_n$ 为出现在 A 中的所有的命题变项.给 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 指定一组真值,称为对 A 的一个赋值或解释.若指定的一组值使 A 的值为真,则称这组值为 A 的成真赋值,若使 A 的值为假,则称这组值为 A 的成假赋值.

真值表 含 $n(n\geqslant 1)$ 个命题变量的命题公式,共有 2^n 组赋值.将命题公式 A 在所有赋值之下取值的情况列成表,称为 A 的真值表.构造真值表的具体步骤如下:

(1) 找出命题公式中所含的所有命题变项 $P_1,P_2,\cdots,P_n$(若无下角标就按字典顺序给出),列出所有可能的赋值(2^n 个);

(2) 按从低到高的顺序写出各层次;

(3) 对应每个赋值,计算命题公式各层次的值,直到最后计算出命题公式的值.

3. 等值演算

重言式、矛盾式、可满足式 设 A 为一个命题公式.

(1) 若 A 在它的各种赋值下取值均为真,则称 A 为重言式或永真式;

(2) 若 A 在它的各种赋值下取值均为假,则称 A 为矛盾式或永假式;

(3) 若 A 至少存在一组赋值是成真赋值,则称 A 为可满足式.

由定义可知,重言式一定是可满足式,但反之不真.

蕴涵式 当且仅当 $P\rightarrow Q$ 是一个重言式时,称 P 蕴涵 Q,并记作 $P\Rightarrow Q$.

逆换式 对 $P\rightarrow Q$ 来说,$Q\rightarrow P$ 称为它的逆换式.

反换式 对 $P\rightarrow Q$ 来说,$\neg P\rightarrow\neg Q$ 称为它的反换式.

逆反式 对 $P\rightarrow Q$ 来说,$\neg Q\rightarrow\neg P$ 称为它的逆反式.

等值 设 P 和 Q 是两个命题,若 P 与 Q 的双条件式 $P\leftrightarrow Q$ 为重言式,则称 P 和 Q 是等值的,记作 $P\Leftrightarrow Q$.等值也称为逻辑相等.

常见蕴涵式、等值式分别如表 1-1、表 1-2 所示.

表 1-1 蕴涵公式表

序 号	公 式
I_1	$P\wedge Q\Rightarrow P$
I_2	$P\wedge Q\Rightarrow Q$
I_3	$P\Rightarrow P\vee Q$
I_4	$Q\Rightarrow P\vee Q$
I_5	$\neg P\Rightarrow P\rightarrow Q$
I_6	$Q\Rightarrow P\rightarrow Q$
I_7	$\neg(P\rightarrow Q)\Rightarrow P$
I_8	$\neg(P\rightarrow Q)\Rightarrow\neg Q$
I_9	$P,Q\Rightarrow P\wedge Q$
I_{10}	$\neg P,P\vee Q\Rightarrow Q$
I_{11}	$P,P\rightarrow Q\Rightarrow Q$
I_{12}	$\neg Q,P\rightarrow Q\Rightarrow\neg P$
I_{13}	$P\rightarrow Q,Q\rightarrow R\Rightarrow P\rightarrow R$
I_{14}	$P\vee Q,P\rightarrow R,Q\rightarrow R\Rightarrow R$
I_{15}	$P\rightarrow Q\Rightarrow(P\vee R)\rightarrow(Q\vee R)$
I_{16}	$P\rightarrow Q\Rightarrow(P\wedge R)\rightarrow(Q\wedge R)$

4. 其他联结词

不可兼析取(也称异或) 设 P 和 Q 是两个命题公式,复合命题 $P\overline{\vee}Q$ 称为 P 和 Q 的不可兼析取.不可兼析取也称异或、排斥或.当且仅当 P 与 Q 的真值相异时,$P\overline{\vee}Q$ 的真值为 T,否则 $P\overline{\vee}Q$ 的真值为 F.

与非 设 P 和 Q 是两个命题公式,复合命题 $P\uparrow Q$ 称为 P 和 Q 的与非.当且仅当 P 和 Q 的真值都是 T 时,$P\uparrow Q$ 的真值为 F,否则 $P\uparrow Q$ 的真值为 T.

或非 设 P 和 Q 是两个命题公式,复合命题 $P\downarrow Q$ 称为 P 和 Q 的或非.当且仅当 P 和 Q 的真值都为 F 时,$P\downarrow Q$ 的真值为 T,否则 $P\downarrow Q$ 的真值为 F.

“$\overline{\vee}$”的有关性质

(1) $P\overline{\vee}Q\Leftrightarrow Q\overline{\vee}P$;

(2) $(P\overline{\vee}Q)\overline{\vee}R\Leftrightarrow P\overline{\vee}(Q\overline{\vee}R)$;

(3) $P\wedge(Q\overline{\vee}R)\Leftrightarrow(P\wedge Q)\overline{\vee}(P\wedge R)$;

(4) $(P\overline{\vee}Q)\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)$;

(5) $(P\overline{\vee}Q)\Leftrightarrow\neg(P\leftrightarrow Q)$;

(6) $P\overline{\vee}P\Leftrightarrow F$，　$F\overline{\vee}P\Leftrightarrow P$，　$T\overline{\vee}P\Leftrightarrow\neg P$.

"↑"的有关性质

(1) $P\uparrow P\Leftrightarrow\neg P$；

(2) $P\wedge Q\Leftrightarrow(P\uparrow Q)\uparrow(P\uparrow Q)$；

(3) $P\vee Q\Leftrightarrow(P\uparrow P)\uparrow(Q\uparrow Q)$.

"↓"的有关性质

(1) $P\downarrow P\Leftrightarrow\neg P$；

(2) $P\vee Q\Leftrightarrow(P\downarrow Q)\downarrow(P\downarrow Q)$；

(3) $P\wedge Q\Leftrightarrow(P\downarrow P)\downarrow(Q\downarrow Q)$.

逆条件　设 P 和 Q 是两个命题公式，复合命题 $P\xrightarrow{c}Q$ 称为 P 和 Q 的逆条件否定. $P\xrightarrow{c}Q$ 为真当且仅当 $P\rightarrow Q$ 为假，或 $P\xrightarrow{c}Q$ 为真当且仅当 P 为真 Q 为假.

5. 联结词全功能集与最小联结词组

联结词全功能集　设 S 是一个联结词集合，如果任意 $n(n\geq1)$ 元真值函数都可以由仅含 S 中的联结词构成的公式表示，则称 S 是联结词全功能集.

最小联结词组　对于任何一个命题公式，都能由仅含这些联结词的命题公式等价代换，而比这些联结词再少的命题公式不能对给定的公式作等价代换，这样的联结词组就是最小联结词组.

n 元真值函数　一个 $n(n\geq1)$ 维卡氏积 $\{0,1\}^n$ 到 $\{0,1\}$ 的函数称为 n 元真值函数.

表 1-2　等值公式表

序 号	公　式
E_1	$\neg\neg P\Leftrightarrow P$
E_2	$P\wedge Q\Leftrightarrow Q\wedge P$
E_3	$P\vee Q\Leftrightarrow Q\vee P$
E_4	$(P\wedge Q)\wedge R\Leftrightarrow P\wedge(Q\wedge R)$
E_5	$(P\vee Q)\vee R\Leftrightarrow P\vee(Q\vee R)$
E_6	$P\wedge(Q\vee R)\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$
E_7	$P\vee(Q\wedge R)\Leftrightarrow(P\vee Q)\wedge(P\vee R)$
E_8	$\neg(P\wedge Q)\Leftrightarrow\neg P\vee\neg Q$
E_9	$\neg(P\vee Q)\Leftrightarrow\neg P\wedge\neg Q$
E_{10}	$P\vee P\Leftrightarrow P$
E_{11}	$P\wedge P\Leftrightarrow P$
E_{12}	$R\vee(P\wedge\neg P)\Leftrightarrow R$
E_{13}	$R\wedge(P\vee\neg P)\Leftrightarrow R$
E_{14}	$R\vee(P\vee\neg P)\Leftrightarrow T$
E_{15}	$R\wedge(P\wedge\neg P)\Leftrightarrow F$
E_{16}	$P\rightarrow Q\Leftrightarrow\neg P\vee Q$
E_{17}	$\neg(P\rightarrow Q)\Leftrightarrow P\wedge\neg Q$
E_{18}	$P\rightarrow Q\Leftrightarrow\neg Q\rightarrow\neg P$
E_{19}	$P\rightarrow(Q\rightarrow R)\Leftrightarrow(P\wedge Q)\rightarrow R$
E_{20}	$P\leftrightarrow Q\Leftrightarrow(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P)$
E_{21}	$P\leftrightarrow Q\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$
E_{22}	$\neg(P\leftrightarrow Q)\Leftrightarrow P\leftrightarrow\neg Q$

6. 对偶式与范式

对偶式　在给定的命题公式 A 中，把联结词 $\vee$ 变换成 $\wedge$，$\wedge$ 变换成 $\vee$，若有特殊变元 F 和 T 亦相互取代，所得公式 A^* 称为 A 的对偶式.

合取范式　一个命题公式称为合取范式，当且仅当它具有形式 $A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_n(n\geq1)$，其中，$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 都是由命题变元或其否定所组成的析取式.

析取范式　一个命题公式称为析取范式，当且仅当它具有形式 $A_1\vee A_2\vee\cdots\vee A_n(n\geq1)$，其中，$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 都是由命题变元或其否定所组成的合取式.

极小项　n 个命题变元的合取式称为小项或布尔合取，其中每个变元与它的否定不能同时存在，但两者之一必须出现且仅出现一次.

极大项　n 个命题变元的析取式称为大项或布尔析取，其中每个变元与它的否定不能同时存在，但两者之一必须出现且仅出现一次.

极小项性质

(1) 每个极小项当其真值指派与编码相同时，其真值为 T，在其余 2^n-1 种指派情况下其真值均为 F；

(2) 任意两个不同极小项的合取式的真值永为 F；

(3) 全体极小项的析取式的真值永为 T.

极大项性质

(1) 每个极大项当其真值指派与编码相同时，其真值为 F，在其余 2^n-1 种指派情况下其真值均为 T；

(2) 任意两个不同极大项的析取式的真值永为 T;

(3) 全体极大项的合取式的真值永为 F.

主析取范式 对于给定的命题公式,如果有一个等价公式,仅由极小项的析取所组成,则该等价式称为原式的主析取范式.

主合取范式 对于给定的命题公式,如果有一个等价公式,仅由极大项的合取所组成,则该等价式称为原式的主合取范式.

7. 推理理论

有效结论 设 A 和 C 是两个命题公式,当且仅当 $A\to C$ 为一重言式,即 $A\Rightarrow C$ 时,称 C 是 A 的有效结论,或称 C 可由 A 逻辑地推出.这里 A 可以有 n 个前提 $H_1,H_2,\cdots,H_n$.

P 规则 前提在推导过程中的任何时候都可以引入使用.

T 规则 在推导中,如果有一个或多个公式重言蕴涵着公式 S,则公式 S 可以引入推导之中.

相容 假设公式 $H_1,H_2,\cdots,H_n$ 中的命题变元为 $P_1,P_2,\cdots,P_n$,对于 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 的一些真值指派,如果能使 $H_1\wedge H_2\wedge\cdots\wedge H_n$ 的真值为 T,则称公式 $H_1,H_2,\cdots,H_n$ 是相容的.

不相容 假设公式 $H_1,H_2,\cdots,H_n$ 中的命题变元为 $P_1,P_2,\cdots,P_n$,对于 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 的每一组真值指派,使 $H_1\wedge H_2\wedge\cdots\wedge H_n$ 的真值均为 F,则称公式 $H_1,H_2,\cdots,H_n$ 是不相容的.

直接证法 由一组前提,利用一些公认的推理规则,根据已知的等值或蕴涵公式,推演得到有效的结论.常用的蕴涵式和等值式列于表 1-1 和表 1-2 中.

间接证法

(1) 要证明 $H_1\wedge H_2\wedge\cdots\wedge H_m\Rightarrow C$,只要证明 $H_1,H_2,\cdots,H_m$ 与$\neg C$ 不相容.

(2) 要证明 $H_1\wedge H_2\wedge\cdots\wedge H_m\Rightarrow(R\to C)$,如能证明 $H_1\wedge H_2\wedge\cdots\wedge H_m\wedge R\Rightarrow C$,即证得 $H_1\wedge H_2\wedge\cdots\wedge H_m\Rightarrow(R\to C)$.这个证明称为 CP 规则.

疑难分析

1. 如何判断命题?命题与悖论有什么不同?

命题是陈述句,不是陈述句肯定不是命题,但是陈述句也未必是命题,关键看是否有确定的真值.例如下面两个陈述句:① 地球以外的天体有生命.② $x+2=5$.第一个是命题,而第②个不是命题.因为第一个陈述句有确定的真值,尽管目前科学不足以对这个问题给出肯定的回答,但是它的真值是客观存在的不是"是"就是"非".随着科学的发展,这个问题总有一天会给出肯定的答案.而第二个陈述句因含有未知元 x,其真值随 x 取值不同而不同,故没有确定意义的真值.因此,如果陈述句含有不确定的未知元,它就不是一个命题.

悖论也是陈述句,其特点是,当赋予它真值时,逻辑会出现矛盾.例如下面的句子:"我正在说谎".假设其真值为真,即我确实在说谎.但我公开承认我在说谎,即说明我实际并没有说谎,与本句含义"我在说谎"矛盾.因此,这不是一个真命题.另一方面,如设其真值为假,即我没有说谎.我说的是真话,但我说我在说谎,同样产生矛盾.因此它没有确定的真值,是悖论.悖论无法确定真值,而含有未知元的陈述句,如上句 $x+2=5$,其真值是随 x 变化的,同样不能确定真值,这两者也是有区别的.

2. 什么是可兼或?什么是排斥或?两者有何区别与联系?

在日常生活中会经常用到"或"这个关系词,有的时候它指的是可兼或,有的时候是指排斥或.命题逻辑中析取联结词$\vee$表示的是可兼或,而排斥或(异或)$\overline{\vee}$表示的是排斥或.可兼或中两命题可以同时为真,也可以只有一个为真;但排斥或中两者不能同时为真,必须有一个而且只能有一个为真。例如:① 他可能是 100 米或 400 米赛跑的冠军.② 今天晚上我在家看电视或去剧场看戏.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

第一个命题中的“或”是可兼或，因为他既可以是 100 米赛跑的冠军，也可以是 400 米赛跑的冠军，因而原复合命题可选用联结词析取 $\vee$ 来表示. 而第二个命题中的“或”是排斥或，因为在同一时间内“我在家看电视”和“我去剧场看戏”两者不能同时成立. 而且对于原命题，“我在家看电视”和“我在剧场看戏”两者必须有一个为真，原命题才为真，因而必须选用联结词 $\overline{\vee}$ 来表示.

总之 $\vee$ 与 $\overline{\vee}$ 的根本区别在于，对于 $A \vee B$，A、B 可同时成立，而对于 $A \overline{\vee} B$，A、B 不能同时成立.

但两者也有关系，其关系为 $A \overline{\vee} B \Leftrightarrow (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$.

3. 联结词 $\leftrightarrow$（或写作 $\rightleftarrows$）与 $\rightarrow$ 有何关系？

$\rightarrow$ 是条件联结词，$\leftrightarrow$ 是双条件联结词. 两者的关系是，$A \leftrightarrow B$ 的充要条件是 $A \rightarrow B$ 且 $B \rightarrow A$（即 $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$）.

4. 条件联结词 $\rightarrow$ 与蕴涵 $\Rightarrow$，双条件联结词 $\leftrightarrow$ 与等值（等价）$\Leftrightarrow$ 有何关系？

首先，$\rightarrow$、$\leftrightarrow$ 是联结词，而 $\Rightarrow$、$\Leftrightarrow$ 并不是联结词，表示的是两命题之间的一种联结关系. 它们是两个完全不同的概念. 如 A、B 为两确定命题，$A \rightarrow B$ 是一个新命题，它也有确定的真值，而 $A \Rightarrow B$ 并不是一个命题. 它表示的是 A、B 两者之间的一种关系. 它表示如果 A 为真，则必导致 B 为真，或表示 $A \rightarrow B$ 一定是一个真命题；对于 $\leftrightarrow$ 与 $\Leftrightarrow$ 是类似的. $A \Leftrightarrow B$ 表示 A、B 有相同真值，或 $A \leftrightarrow B$ 一定是一个真命题. $\rightarrow$ 与 $\Rightarrow$ 的关系是，$A \Rightarrow B$ 的充要条件是 $A \rightarrow B$ 是重言式. $\leftrightarrow$ 与 $\Leftrightarrow$ 的关系是，$A \Leftrightarrow B$ 的充要条件是 $A \leftrightarrow B$ 是重言式，或 $A \Leftrightarrow B$ 的充要条件是 $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.

5. 命题逻辑中为什么要引进 4 个其他联结词？

为了使命题之间的关系表示地更直接、更简洁明了，补充定义了另外 4 个联结词：$\xrightarrow{c}$、$\overline{\vee}$、$\uparrow$ 和 $\downarrow$，但是它们不是独立存在的，即它们都可以用仅含有 5 个基本联结词中的某些联结词的命题公式来等值地表示：

$$P \xrightarrow{c} Q \Leftrightarrow \neg(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q, \quad P \overline{\vee} Q \Leftrightarrow \neg(P \leftrightarrow Q),$$
$$P \uparrow Q \Leftrightarrow \neg(P \wedge Q), \quad P \downarrow Q \Leftrightarrow \neg(P \vee Q).$$

6. 什么是联结词全功能集？什么是最小联结词组？两者有何关系？

联结词全功能集或完备集是一个联结词的集合，它要求任何一个命题公式都可以用该集合中的某些联结词来表示.

一个最小联结词组是由一个或若干个联结词构成的一个集合，使得对任何命题公式都可以用这个集合中的某些联结词来表示，而且删除这个集合中的任何一个联结词，就不能将所有命题公式表达出来. 例如我们所介绍的 5 个基本联结词中，集合 $\{\neg, \wedge\}$ 可以构成一个最小联结词组. 虽然，最小联结词组是联结词全功能集中所含联结词最少的集合，有时，我们也将最小联结词组称为功能完备的联结词组. 一个最小联结词组必是一个联结词全功能集，反之不然. 例如 $\{\neg, \wedge, \vee\}$，$\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ 都是联结词全功能集，但都不是最小联结词组，它们都包含最小联结词组 $\{\neg, \wedge\}$ 或 $\{\neg, \vee\}$.

还要说明的是，最小联结词组只是具有理论上研究的意义. 在实用上，要熟练地掌握这 9 个联结词，这样表示起来会更直接、方便.

7. 如何求一个命题公式的主析取范式与主合取范式？

求一个命题公式的主范式通常利用真值表法，列出这个命题公式的所有真值取法. 在求主析取范式时，将所有取值为真的行对应的极小项列出来，然后取析取. 求主合取范式时，将所有取值为假的行对应的极大项列出来，然后取合取. 另一种求主范式的方法是利用等值公式进行等值变换，有目的地变换成析取的形式或合取的形式，最后利用分配律变成极小项之析取或极大项之合取.

8. 极大项与极小项之间、主合取范式与主析取范式之间有什么样的关系？

极大项用 M 表示，极小项用 m 表示，对应同一下标编码的极大项与极小项，两者有密切的联系. 这是因为由德 · 摩根定律 $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$，$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$，因而对于同一编码有：

$\neg m_i \Leftrightarrow M_i$，$\neg M_i \Leftrightarrow m_i$.

设命题公式 A 的主析取范式是 $m_{i_1} \vee m_{i_2} \vee \cdots \vee m_{i_k} = \sum i_1, i_2, \cdots, i_k$，故 $\neg A = \neg(m_{i_1} \vee m_{i_2} \vee \cdots \vee m_{i_k}) = \neg m_{i_1} \wedge \neg m_{i_2} \wedge \cdots \wedge \neg m_{i_k} = M_{i_1} \wedge M_{i_2} \wedge \cdots \wedge M_{i_k}$，这是 $\neg A$ 的主合取范式. 由于公式 A 与 $\neg A$ 对于相同的任一种指派，取值正好相反，因而对应于这组指派，$\neg A$ 取值应为假，故 A 取值为真. 因而对公式 A 而言，剩下的不包括这组指派所对应的真值指派，A 应为假，将它们取合取即是 A 的主合取范式，即 $A = M_{j_1} \wedge M_{j_2} \wedge \cdots \wedge M_{j_{2^m-1}}$，其中 $j_1, j_2, \cdots, j_{2^m-1}$ 是 $0,1,2,\cdots 2^n-1$ 中除去 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 所剩下的那些整数.

9. 代入规则和置换规则是同一回事吗?

代入规则和置换规则不是同一回事.

代入规则是指，对重言式而言，将其中的任一命题变元出现的每一处均用任一命题公式进行替换，则得到的公式仍是重言式. 这是仅对重言式才有的特殊性质，而对其他公式未必成立. 如对重言式 $P \vee \neg P$，将其中的 P 用任一命题公式进行替换，如用 $P \vee Q$ 进行替换，得到公式 $(P \vee Q) \vee \neg(P \vee Q)$ 仍是一重言式.

置换规则是指，对任一命题公式与其子公式而言，用等值的公式替换子公式，所得到的公式与原公式等值，即设 C 是公式 A 的子公式，$C \Leftrightarrow D$，若用 D 置换(可以只置换其中出现的一个或所有的)C，得到的公式 B 与原公式 A 等值，即 $A \Leftrightarrow B$. 如 $(P \rightarrow Q) \wedge P$，其中 $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$，则可用 $\neg P \vee Q$ 进行置换，得到的公式 $(\neg P \vee Q) \wedge P$ 与原公式等值.

代入规则可以扩大重言式的范围，而置换规则对于公式的化简、判类、证明及推理都有广泛的应用.

10. 含有 n 个命题变元的不等值的命题公式共有多少个?

含有 n 个命题变元的不等值的命题公式共有 2^{2^n} 个，这是因为对于含有 n 个命题变元的命题公式，由于每个命题变元有真、假两种取法，因而共有 2^n 个赋值，即真值表共有 2^n 行. 而对应这些真值指派(或赋值)，每一行均可取真值 T 或 F，故共有 2^{2^n} 种不同的取值. 根据命题公式的等值定义，两个命题公式的真值表对于所有的指派只要有一次取值不同，那么这两个命题公式就是不等值的，因而所有不等值的命题公式共有 2^{2^n} 个.

另外，也可从命题函数来说明这一问题，从 m 个元素到 n 个元素间的映射(函数)有 n^m 个，n 个变元的命题公式(函数)是 $\{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ 的映射，或从 $\{\underbrace{00\cdots0}_{n}, \cdots, \underbrace{11\cdots1}_{n}\}$ 到 $\{0,1\}$ 的映射，而 $\{\underbrace{0\cdots0}_{n}, \cdots, \underbrace{1\cdots1}_{n}\}$ 中元素个数共有 2^n 个，故这种不同函数个数为 2^{2^n} 个.

典型例题

例 1 判断下列句子哪些是命题. 在命题中，判断哪些是简单命题，哪些是复合命题. 在可能的情况下求出其真值.

(1) $2x+3=6$.

(2) 明年 10 月 1 日不是晴天.

(3) 这朵花多么好看呀!

(4) 今天下午有会吗?

(5) 地球外有的星球上有水.

(6) 请不要大声吵闹!

(7) $1+101=110$.

(8) 明天如果天气晴朗，我将去公园.

(9) 我学习英语或德语.

(10) 雪是黑的当且仅当太阳从东方升起.

(11) 2 是偶数且是素数.

分析 可利用排除法来解. 首先，命题必须是陈述句，题(3)、(4)、(6)是非陈述句，所以应该排

除，它们不是命题. 其次，命题必须有确定的真值，凡无确定真值的陈述句也不是命题. 题(1)的真值随变量 x 的不同而不同. 如 $x=1.5$，它是真命题，如 x 等于其他值，它是假命题. 故该陈述句没有确定的真值，因而它也不是命题. 需要注意的是，真值是否确定与我们是否知道它的真值是两码事. 如题(5)是具有确定的真值的，只是目前的科技水平还无法知道该命题的真值而已(这类问题显然不胜枚举).

解 由以上分析可知，题(2)、(5)、(7)～(11)是命题，其中题(2)、(5)、(7)是原子命题，题(8)～(11)是复合命题. 题(2)的真值要等到明年 10 月 1 日才能确定. 题(5)的真值目前也无法确定. 对于题(7)，如果所说的是二进制，则是一个真命题；如果所说的是十进制，则是一个假命题. 对于题(8)，当明天天气晴朗，而我又去了公园时，则其真值为 T. 或"明天天气不是晴天"命题亦为 T. 对于题(9)，"我学习英语"、"我学习德语"只要有一个为 T，该命题即为 T. 题(10)为假命题，因"雪是黑的"为 F，"太阳从东方升起"为 T，故该双条件命题为 F. 对于题(11)，因 2 既是偶数又是素数，故该合取命题为 T.

例 2 将下列命题符号化：

(1) 他既聪明又用功. (2) 辱骂和恐吓绝不是战斗.

(3) 除非天气好，否则我是不会去看电影的.

(4) 我将去现场看这场比赛，或在家看电视转播.

(5) 如果晚上他在家里且没有其他的事情，他一定会看书或听音乐.

分析 将一个命题符号化，就是要将这个命题表达成符合规定的命题表达式. 在具体表达时，通常应先将命题中所包含的原子命题列出，然后再用适当的联结词联结起来. 将命题分解成原子命题一般并不困难，问题的关键在于要选择好适当的联结词. 要准确表达原命题的意义，就必须对原命题的中文含义有较深刻、较透彻的理解. 特别应注意的是，命题逻辑中的联结词一般和中文中的联结词之间并没有一一对应的关系. 因此，必须仔细揣摩命题的实际含义，理解命题中各原子命题中的结构关系，而不应拘泥于命题的形式而生搬硬套.

在题(1)中，"他聪明"、"他用功"显然是并列关系，应用联结词 $\wedge$ 联结. 在汉语中，并列关系可以用多个联结词表示，除用"既……又……"表达外，还可以用"且"，"不但……，而且……"等表达.

题(2)的实际含义应为，辱骂不是战斗，恐吓不是战斗，辱骂和恐吓加在一起也不是战斗. 因此，应用联结词 $\vee$ 表示. 注意，此例的中文意思也可写成"辱骂和恐吓都不是战斗"，因此很容易用合取来表示，这是因对此命题的准确含义理解不透，仅从表达形式硬套而造成的.

题(3)的实际含义是，我去看电影必定天气好，至于天气好是否一定去看电影，文中并未涉及. 所以，"天气好"是"去看电影"的必要条件. 另外，在该命题中没有提出"天气好"和"去看电影"的具体时间，因此，仅按字面意义去列出原子命题，就将出现不完整的陈述句. 实际上，在叙述这个命题时是有着特定的时间的，例如可设时间为"今天"、"明天"等.

题(4)的两原子命题间是选择关系. 联结词 $\vee$ 表示可兼或，而这里显然不是可兼或，而是一种排斥或，两命题不可同时成立.

对于题(5)，"看书"与"听音乐"可兼而有之，即可边听音乐边看书，因此，可用可兼或 $\vee$ 表示.

解 (1) 设 P：他聪明，Q：他用功，则该命题可表示为 $P\wedge Q$.

(2) 设 P：辱骂不是战斗，Q：恐吓不是战斗，则该命题可表示为 $P\vee Q$.

(3) P：今天天气好，Q：我去看电影，则该命题可表示为 $Q\rightarrow P$.

(4) 设 P：我将去现场看这场比赛，Q：我将在家看电视转播.

解法 1 排斥或在析取的基础上，不允许两原子命题同时成立，故该命题可符号化为

$$(P\vee Q)\wedge\neg(P\wedge Q)\Leftrightarrow(P\vee Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q).$$

解法 2 本命题的实质含义是以下两种情况有一种将出现：① 我将去现场看比赛，从而不在家看电视转播；② 我不在现场看比赛，从而在家看电视转播. 因此，该命题可表示为 $(P\wedge\neg Q)\vee$

$(\neg P\wedge Q)$.

解法 3　由“排斥或”及“双条件”的含义，显然有 $P\overline{\vee}Q\Leftrightarrow\neg(P\leftrightarrow Q)$

(5) 设 P：他晚上在家里，Q：他晚上没有其他事情，L：他看书，M：他听音乐，则该命题可表示为 $(P\wedge Q)\rightarrow(L\vee M)$.

例 3　证明：$P\rightarrow(Q\rightarrow R)\Rightarrow(P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow R)$.

分析　这是一个蕴涵式证明题，可以用多种方法证明，如：

(1) 直接证法，即在假设前提为 T 时，推证结论为 T；

(2) 反证法，即在假设后件为 F 的情况下，推证前件为 F；

(3) 定义法，求证 $S\Rightarrow C$，即需要证明条件式 $S\rightarrow C$ 为永真.

在具体证明时，还常采用列真值表法、逻辑推证法及等价变换法.

在列真值表法中，直接证法是检验在各种指派情况下，前件真值为 T 时，对应的后件真值是否均为 T；间接证法是检验在各种指派情况下，后件真值为 F 时，对应的前件真值是否均为 F；条件永真法是检验当将原式中蕴涵式改为条件式时，公式的真值是否为永真.

关于逻辑推证法，主要是根据联结词和一些基本等价式，采用直接证法或反证法进行逻辑分析和推证.

关于条件永真的证明，主要是根据基本等价公式表，对原式进行等价变换，然后推出条件永真的结论.

证　**解法 1**　列真值表法（略，请同学们自己证明，并按直接法、反证法、条件永真法验证）.

解法 2　逻辑推证法.

(1) 直接证法　设 $P\rightarrow(Q\rightarrow R)$ 为 T，则

① P 为 T，$Q\rightarrow R$ 为 T，有以下 3 种情况.

P 为 T，Q 为 T，R 为 T，则 $(P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow R)$ 为 T；

P 为 T，Q 为 F，R 为 T，则 $(P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow R)$ 为 T；

P 为 T，Q 为 F，R 为 F，则 $(P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow R)$ 为 T.

② P 为 F，$Q\rightarrow R$ 为 F，则 P 为 F，Q 为 T，R 为 F，所以 $(P\rightarrow Q)$ 为 T，$(P\rightarrow R)$ 为 T，得 $(P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow R)$ 为 T.

③ 若 P 为 F，$(Q\rightarrow R)$ 为 T，有以下 3 种情况.

P 为 F，Q 为 T，R 为 T，则 $(P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow R)$ 为 T；

P 为 F，Q 为 F，R 为 F，则 $(P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow R)$ 为 T；

P 为 F，Q 为 F，R 为 T，则 $(P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow R)$ 为 T.

综上所述，当 $P\rightarrow(Q\rightarrow R)$ 为 T 时，必有 $(P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow R)$ 为 T.

(2) 间接证法　设 $(P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow R)$ 为 F，则必有 $P\rightarrow Q$ 为 T，$P\rightarrow R$ 为 F，故得 P 为 T，Q 为 T，R 为 F. 所以 $P\rightarrow(Q\rightarrow R)$ 为 F.

解法 3　等价变换.

$$(P\rightarrow(Q\rightarrow R))\rightarrow((P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow R))$$
$$\Leftrightarrow(\neg P\vee(\neg Q\vee R))\rightarrow((\neg P\vee Q)\rightarrow(\neg P\vee R))\Leftrightarrow\neg(\neg P\vee\neg Q\vee R)\vee(\neg(\neg P\vee Q)\vee(\neg P\vee R))$$
$$\Leftrightarrow(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee((P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\vee R))\Leftrightarrow(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee((P\vee\neg P\vee R)\wedge(\neg P\vee R\vee\neg Q))$$
$$\Leftrightarrow(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\vee\neg Q\vee R)\Leftrightarrow(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee\neg(P\wedge Q\wedge\neg R)\Leftrightarrow T.$$

例 4　分别用真值表法和公式法判断下列命题公式的类型：

(1) $(P\vee Q)\rightarrow(P\wedge Q)$.　　(2) $(\neg P\vee Q)\wedge\neg(Q\vee\neg R)\wedge\neg(R\vee\neg P\vee\neg Q)$.

(3) $(\neg P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow\neg(P\leftrightarrow Q)$.

解 (1) 真值表法(见表 1-3).

表 1-3

P	Q	$P\vee Q$	$P\wedge Q$	$(P\vee Q)\rightarrow(P\wedge Q)$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	0
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

由真值表可知,公式$(P\vee Q)\rightarrow(P\wedge Q)$为可满足式.

公式法 因为$(P\vee Q)\rightarrow(P\wedge Q)\Leftrightarrow\neg(P\vee Q)\vee(P\wedge Q)\Leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge Q)$,所以,公式$(P\vee Q)\rightarrow(P\wedge Q)$为可满足式.

(2) 真值表法(见表 1-4).

表 1-4

P	Q	R	$\neg P\vee Q$	$Q\vee\neg R$	$R\vee\neg P\vee\neg Q$	$(\neg P\vee Q)\wedge\neg(Q\vee\neg R)\wedge\neg(R\vee\neg P\vee\neg Q)$
0	0	0	1	1	1	0
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	0

由真值表可知,公式$(\neg P\vee Q)\wedge\neg(Q\vee\neg R)\wedge\neg(R\vee\neg P\vee\neg Q)$为矛盾式.

公式法 因为$(\neg P\vee Q)\wedge\neg(Q\vee\neg R)\wedge\neg(R\vee\neg P\vee\neg Q)\Leftrightarrow(\neg P\vee Q)\wedge\neg Q\wedge R\wedge(\neg R\wedge P\wedge Q)\Leftrightarrow F$,所以,公式$(\neg P\vee Q)\wedge\neg(Q\vee\neg R)\wedge\neg(R\vee\neg P\vee\neg Q)$为矛盾式.

(3) 真值表法(见表 1-5).

表 1-5

P	Q	$\neg P\leftrightarrow Q$	$\neg(P\leftrightarrow Q)$	$(\neg P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow\neg(P\leftrightarrow Q)$
0	0	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1

由真值表可知,公式$(\neg P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow\neg(P\leftrightarrow Q)$为永真式.

公式法 因为

$$(\neg P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow\neg(P\leftrightarrow Q)\Leftrightarrow((\neg P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow\neg P))\leftrightarrow\neg((P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q))$$
$$\Leftrightarrow((P\vee Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q))\leftrightarrow((\neg P\vee\neg Q)\wedge(P\vee Q))\Leftrightarrow T$$

所以,公式$(\neg P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow\neg(P\leftrightarrow Q)$为永真式.

例 5 分别用真值表法和公式法证明下列各等价式:

(1) $(P\vee Q)\wedge\neg P\Leftrightarrow\neg P\wedge Q$; (2) $\neg(P\uparrow Q)\Leftrightarrow\neg P\downarrow\neg Q$.

证明

(1) 真值表法(见表 1-6).

由表 1-6 可知,$(P\vee Q)\wedge\neg P\Leftrightarrow\neg P\wedge Q$.

公式法 $(P\vee Q)\wedge\neg P\Leftrightarrow(P\wedge\neg P)\vee(Q\wedge\neg P)\Leftrightarrow\neg P\wedge Q$.

表 1-6

P	Q	$P\vee Q$	$(P\vee Q)\wedge\neg P$	$\neg P\wedge Q$
0	0	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	1	0	0
1	1	1	0	0

表 1-7

P	Q	$P\uparrow Q$	$\neg(P\uparrow Q)$	$\neg P\downarrow\neg Q$
0	0	1	0	0
0	1	1	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	1

(2) 真值表法(见表 1-7).

由表 1-7 可知,$\neg(P\uparrow Q)\Leftrightarrow\neg P\downarrow\neg Q$.

公式法 $\neg(P\uparrow Q)\Leftrightarrow\neg(\neg(P\wedge Q))\Leftrightarrow\neg(\neg P\vee\neg Q))\Leftrightarrow\neg P\downarrow\neg Q$.

例 6 分别用真值表法、分析法和公式法证明下列蕴涵式:

(1) $\neg(P\to Q)\Rightarrow P$. (2) $(P\to Q)\wedge(Q\to R)\Rightarrow(P\to R)$.

证明 (1) 真值表法(见表 1-8).

由表 1-8 可知,$\neg(P\to Q)\Rightarrow P$.

分析法 若$\neg(P\to Q)$为真,则 $P\to Q$ 为假,从而 P 为真,而 Q 为假. 故$\neg(P\to Q)\Rightarrow P$.

公式法 因为$\neg(P\to Q)\to P\Leftrightarrow(\neg P\vee Q)\vee P\Leftrightarrow$ T,所以$\neg(P\to Q)\Rightarrow P$.

表 1-8

P	Q	$P\to Q$	$\neg(P\to Q)$	P
0	0	1	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	1	1	0	1

(2) 真值表法(见表 1-9).

由真值表可知,$(P\to Q)\wedge(Q\to R)\Rightarrow(P\to R)$.

分析法 若 $P\to R$ 为假,则 P 为真而 R 为假. 当 Q 为真时,$Q\to R$ 为假;当 Q 为假时,$P\to Q$ 为假. 从而不管 Q 取什么值,都有$(P\to Q)\wedge(Q\to R)$为假. 故$(P\to Q)\wedge(Q\to R)\Rightarrow(P\to R)$.

表 1-9

P	Q	R	$P\to Q$	$Q\to R$	$(P\to Q)\wedge(Q\to R)$	$P\to R$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

公式法 因为

$$((P\to Q)\wedge(Q\to R))\to(P\to R)$$

$$\Leftrightarrow\neg((\neg P\vee Q)\wedge(\neg Q\vee R))\vee(\neg P\vee R)\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge\neg R)\vee\neg P\vee R$$

$$\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee((Q\vee\neg P\vee R)\wedge(\neg R\vee\neg P\vee R))\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee(Q\vee\neg P\vee R)$$

$$\Leftrightarrow(P\vee Q\vee\neg P\vee R)\wedge(\neg Q\vee Q\vee\neg P\vee R)\Leftrightarrow \mathrm{T}$$

所以

$$(P\to Q)\wedge(Q\to R)\Rightarrow(P\to R).$$

例 7 求$(P\to(Q\wedge R))\wedge(\neg P\to(\neg Q\wedge\neg R))$的主析取及主合取范式.

分析 求给定命题公式的主析取范式和主合取范式,通常有两种方法,即真值表法和公式法.

(1) 真值表法. 列出给定公式的真值表,其真值为 T 的指派所对应的小项析取,即为此公式的主析取范式. 同理,其真值为 F 的指派所对应的大项的合取,即为此公式的主合取范式.

(2) 公式法. 在应用公式推导法求主析取范式时,首先要将公式中的条件和双条件联结词消去,使整个公式化为析取范式;接着删去其中所有的永假析取项,然后将析取式中重复出现的合取

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com