

2009 高中数学联赛 备考手册 (预赛试题集锦)

中国数学会普及工作委员会 组编
各省市数学会 联合编写

Mathematics



华东师范大学出版社



广义 Enneper 曲面

封面上的图形称为广义 Enneper 曲面,它上面有 5 个洞,洞的个数在数学上称为曲面的亏格.原始的 Enneper 曲面是一个著名的极小曲面,也就是说它上面任何一条小封闭曲线围成的曲面的面积总是最小的,即任何以这条曲线为边界的其他曲面的面积都不会更小. Enneper 曲面是德国数学家在 1863 年发现的,它是一个 9 次代数曲面,也就是说它上面的点的坐标满足一个 9 次多项式方程 $f(x,y,z)=0$. Enneper 曲面的亏格为 0. 陈继成和 Fritz Gackstatter 于 1982 年发现了一个亏格为 1 的 Enneper 曲面. 封面上的亏格为 5 的 Enneper 曲面是德国数学家 Matthias Weber 和美国数学家 Mike Wolf 于 1998 年发现的. 极小曲面被广泛应用于建筑设计、航空、造船、材料科学、晶体学等领域.

(谈胜利)

ISBN 978-7-5617-6537-1



9 787561 765371 >

定价: 18.00 元

www.ecnupress.com.cn

2009

高中数学联赛备考手册

(预赛试题集锦)

中国数学会普及工作委员会 组编

安徽省数学会

福建省数学会

甘肃省数学会

贵州省数学会

河北省数学会

河南省数学会

黑龙江省数学会

湖北省数学会

湖南省数学会

吉林省数学会

江苏省数学会

江西省数学会

辽宁省数学会

山东省数学会

山西省数学会

陕西省数学会

四川省数学会

天津市数学会

浙江省数学会

联合编写

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学联赛备考手册:2009.预赛试题集锦/中国数学会普及工作委员会组编. —上海:华东师范大学出版社,2008
ISBN 978-7-5617-6537-1

I. 高… II. 中… III. 数学课—高中—试题 IV. G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 196631 号

高中数学联赛备考手册(2009)

(预赛试题集锦)

组 编 者 中国数学会普及工作委员会
策划组稿 倪 明(数学工作室)
审读编辑 孔令志
装帧设计 高 山

出版发行 华东师范大学出版社
社 址 上海市中山北路 3663 号 邮编 200062
电话总机 021-62450163 转各部门 行政传真 021-62572105
客服电话 021-62865537(兼传真)
门市(邮购)电话 021-62869887
门市地址 上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网 址 www.ecnupress.com.cn

印 刷 者 浙江省临安市曙光印务有限公司
开 本 890×1240 32 开
印 张 8.5
字 数 251 千字
版 次 2009 年 1 月第 1 版
印 次 2009 年 1 月第 1 次
印 数 16000
书 号 ISBN 978-7-5617-6537-1/G·3814
定 价 18.00 元

出 版 人 朱杰人

(如发现本版图书有印订质量问题,请寄回本社客服中心调换或电话 021-62865537 联系)

编委会成员

- | | |
|------|----------------------------|
| 毕昶琨 | 辽宁省数学会秘书长 |
| 陈发来 | 中国科学技术大学教授、安徽省数学会秘书长 |
| 方祖耀 | 山东大学教授 |
| 郭建华 | 东北师范大学教授、吉林省数学会秘书长 |
| 郝成功 | 山西省数学会秘书长 |
| 黄仁寿 | 湖南省高中数学竞赛委员会副主任 |
| 贾厚玉 | 浙江大学教授 |
| 李 迅 | 福建省数学会副理事长 |
| 刘康宁 | 陕西省数学会副理事长 |
| 欧阳新龙 | 湖南省高中数学竞赛委员会副主任 |
| 石东洋 | 河南省数学会竞赛委员会主任、郑州大学教授 |
| 陶平生 | 江西省数学会副理事长、江西科技师范学院教授 |
| 王海明 | 甘肃省数学会普及工作委员会主任 |
| 王玉文 | 哈尔滨师范大学教授、黑龙江省数学会普及工作委员会主任 |
| 王兆军 | 南开大学教授、天津市数学会秘书长 |
| 王肇西 | 江苏省数学会常务副秘书长 |
| 吴建平 | 中国数学会普及工作委员会主任 |
| 项 昕 | 贵州省数学会竞赛委员会主任 |
| 熊 斌 | 中国数学会普及工作委员会副主任 |
| 徐胜林 | 《数学通讯》副主编 |
| 许清华 | 四川师范大学教授、四川省数学会普及工作委员会主任 |
| 张生春 | 河北师范大学副教授 |

前 言

“全国高中数学联赛”(始于1981年)是教育部批准,由中国科协主管、中国数学会主办的国内影响最大的一项中学生学科竞赛,每年10月份举行,分为一试和二试,已经举办了20多届.每年全国(31个赛区)有近10万学生参加.所谓“联赛”,就是中国数学会每年委托一个省(直辖市、自治区)的数学会来具体承办,轮流做庄.各地可以向东道主提供试题,而承办省份组成一个规模不小的组委会,作为“联络员”向各地发出邀请函,操办所有组织事宜,前后大致要辛苦一年,一直到复评确定了赛区一等奖名单和冬令营名单才告结束.

2001年教育部规定在“全国高中数学联赛”中获得赛区一等奖的学生具有保送生资格,可以免试进入大学;2003年进一步调整政策,规定上述学生除具有保送生资格外,还可在高考成绩的基础上适当增加分数投档,增加的分值不超过20分.2005年教育部再次明确了这项政策.

以上政策的出台,给数学竞赛的组织管理工作带来了新的情况.为了使活动能够平稳、安全,做到公平、公正,各个赛区陆陆续续开始增加了一个环节——“全国高中数学联赛赛区预赛”.预赛由赛区数学会负责命题,组织工作则放在各个地市县,预赛成绩好的学生有资格参加“全国高中数学联赛”,而且都集中在省会城市考试,这样为“全国高中数学联赛”的有序进行创造了一个条件.目前大约有20个省份有自己的预赛.

今年4月初,华东师范大学出版社教辅分社倪明社长提议把各地“全国高中数学联赛预赛”的试题汇成一个集子,以便各地的活动组织者、老师和同学们交流,我们觉得这是一个很好的想法.

“全国高中数学联赛”是中国数学会普及工作委员会的“生命线”,要确保活动能够健康顺利地开展下去.8月中旬我们在南昌召开了“第15次全国数学普及工作会议”.会议重点交流了“全国高中数学联赛”的考试

组织、试卷评阅、参赛规模和预赛的情况。大家一致认为，今后的“全国高中数学联赛”工作应该坚持以下几点：各赛区应积极组织预赛；联赛的考场应统一设在一个城市；严禁二次邮寄试卷。

在会议期间代表们拿出一个单元，专门讨论、交流各地预赛的组织经验。大家决定把组织出版《高中数学联赛备考手册(2009)(预赛试题集锦)》作为普及工作委员会每年的一项例行工作。

经过近半年的努力，这本小册子就要出版了。借此机会，我要感谢有关省份数学会普及工作委员会或竞赛委员会负责同志的积极配合，他们提供了各自赛区预赛的详细资料；感谢倪明社长，他的建议和悉心策划使该本试题集锦得以如期出版；感谢我们委员会的熊斌副主任，他作为这个项目的负责人做了大量的具体工作。

希望各位同学和老师都能从这本书中得到自己的收获。

吴建平

2008年11月16日

目 录

00	高中数学竞赛大纲	1
01	2008 年全国高中数学联赛天津市预赛	5
02	2008 年全国高中数学联赛河北省预赛	16
03	2008 年全国高中数学联赛山西省预赛	28
04	2008 年全国高中数学联赛辽宁省预赛	37
05	2008 年全国高中数学联赛吉林省预赛	46
06	2008 年全国高中数学联赛山东省预赛	58
07	2008 年全国高中数学联赛福建省预赛	77
08	2008 年全国高中数学联赛江西省预赛	88
09	2008 年全国高中数学联赛河南省预赛	103
10	2008 年全国高中数学联赛湖北省预赛	119
11	2008 年全国高中数学联赛四川省预赛	130
12	2008 年全国高中数学联赛陕西省预赛	141
13	2008 年全国高中数学联赛甘肃省预赛	155
14	2008 年全国高中数学联赛黑龙江省预赛	166
15	2008 年全国高中数学联赛江苏省复赛	182
16	2008 年全国高中数学联赛贵州省初赛	194
17	2008 年全国高中数学联赛安徽省初赛	205
18	2008 年浙江省高中数学竞赛	210
19	2008 年湖南省高中数学竞赛	223
20	2008 年全国高中数学联赛	237

高中数学竞赛大纲

(2006 年修订试用稿)

中国数学会普及工作委员会制定

从 1981 年中国数学会普及工作委员会举办全国高中数学联赛以来,在“普及的基础上不断提高”的方针指引下,全国数学竞赛活动方兴未艾,每年一次的竞赛活动吸引了广大青少年学生参加. 1985 年我国又步入国际数学奥林匹克殿堂,加强了数学课外教育的国际交流,20 年来我国已跻身于国际数学奥林匹克强国之列. 数学竞赛活动对于开发学生智力、开拓视野、促进教学改革、提高教学水平、发现和培养数学人才都有着积极的作用. 这项活动也激励着广大青少年学习数学的兴趣,吸引他们去进行积极的探索,不断培养和提高他们的创造性思维能力. 数学竞赛的教育功能显示出这项活动已成为中学数学教育的一个重要组成部分.

为了使全国数学竞赛活动持久、健康地发展,中国数学会普及工作委员会于 1994 年制定了《高中数学竞赛大纲》. 这份大纲的制定对高中数学竞赛活动的开展起到了很好的指导作用,使我国高中数学竞赛活动日趋规范化和正规化.

近年来,课程改革的实践,在一定程度上改变了我国中学数学课程的体系、内容和要求. 同时,随着国内外数学竞赛活动的发展,对竞赛试题所涉及的知识、思想和方法等方面也有了一些新的要求. 为了使新的《高中数学竞赛大纲》能够更好地适应高中数学教育形势的发展和要求,经过广泛征求意见和多次讨论,中国数学会普及工作委员会组织了对《高中数学竞赛大纲》的修订.

本大纲是在教育部 2000 年《全日制普通高级中学数学教学大纲》的精神和基础上制定的. 该教学大纲指出:“要促进每一个学生的发展,既要为所有的学生打好共同基础,也要注意发展学生的个性和特长;……在课

内外教学中宜从学生的实际出发,兼顾学习有困难和学有余力的学生,通过多种途径和方法,满足他们的学习需求,发展他们的数学才能。”

学生的数学学习活动应当是一个生动活泼、富有个性的过程,不应只限于接受、记忆、模仿和练习,还应倡导阅读自学、自主探索、动手实践、合作交流等学习数学的方式,这些方式有助于发挥学生学习的主动性.教师要根据学生的不同基础、不同水平、不同兴趣和发展方向给予具体的指导.教师应引导学生主动地从事数学活动,从而使学生形成自己对数学知识的理解和有效的学习策略.教师应激发学生的学习积极性,向学生提供充分从事数学活动的机会,帮助他们在自主探索和合作交流的过程中真正理解和掌握基本的数学知识与技能、数学的思想和方法,获得广泛的数学活动经验.对于学有余力并对数学有浓厚兴趣的学生,教师要为他们设置一些选学内容,提供足够的材料,指导他们阅读,发展他们的数学才能.

教育部 2000 年《全日制普通高级中学数学教学大纲》中所列出的内容,是教学的要求,也是竞赛的基本要求.在竞赛中对同样的知识内容,在理解程度、灵活运用能力以及方法与技巧掌握的熟练程度等方面有更高的要求.“课堂教学为主,课外活动为辅”也是应遵循的原则.因此,本大纲所列的内容充分考虑到学生的实际情况,旨在使不同程度的学生都能在数学上得到相应的发展,同时注重贯彻“少而精”的原则.

全国高中数学联赛

全国高中数学联赛(一试)所涉及的知识范围不超出教育部 2000 年《全日制普通高级中学数学教学大纲》中所规定的教学要求和内容,但在方法的要求上有所提高.

全国高中数学联赛加试

全国高中数学联赛加试(二试)与国际数学奥林匹克接轨,在知识方面有所扩展;适当增加一些教学大纲之外的内容,所增加的内容是:

1. 平面几何

几个重要定理:梅涅劳斯定理、塞瓦定理、托勒密定理、西姆松定理.三角形中的几个特殊点:旁心、费马点,欧拉线.几何不等式,几何极值问

题,几何中的变换:对称、平移、旋转.圆的幂和根轴.面积方法,复数方法,向量方法,解析几何方法.

2. 代数

周期函数,带绝对值的函数.三角公式,三角恒等式,三角方程,三角不等式,反三角函数.递归,递归数列及其性质,一阶、二阶线性常系数递归数列的通项公式.第二数学归纳法.平均值不等式,柯西不等式,排序不等式,切比雪夫不等式,一元凸函数.复数及其指数形式、三角形式,欧拉公式,棣莫弗定理,单位根.多项式的除法定理、因式分解定理,多项式的相等,整系数多项式的有理根*,多项式的插值公式*. n 次多项式根的个数,根与系数的关系,实系数多项式虚根成对定理.函数迭代,简单的函数方程*

3. 初等数论

同余,欧几里得除法,裴蜀定理,完全剩余类,二次剩余,不定方程和方程组,高斯函数 $[x]$,费马小定理,格点及其性质,无穷递降法,欧拉定理*,孙子定理*.

4. 组合问题

圆排列,有重复元素的排列与组合,组合恒等式,组合计数,组合几何,抽屉原理,容斥原理,极端原理,图论问题,集合的划分,覆盖,平面凸集、凸包及应用*.

注:有“*”号的内容加试中暂不考,但在冬令营中可能考.

2008 年全国高中数学联赛 天津市预赛



2008 年全国高中数学联赛天津市预赛于 2008 年 9 月 21 日举行,共有五千多名学生参加此次预赛,并从中选拔出九百多名学生参加于 10 月 12 日举行的全国高中数学联赛.

天津市预赛所涉及的知识范围基本参照现行《全日制普通高级中学数学教学大纲》中所规定的教学内容和要求,但在方法的要求上有所提高.主要考查学生对基本知识和基本技能的掌握情况,以及综合、灵活运用知识的能力.试卷包括 6 道选择题、6 道填空题和 3 道解答题,全卷满分 150 分,考试时间为 2 小时.

天津市预赛的命题工作由天津市数学会负责,组织工作由天津市科协五学科竞赛管理委员会办公室负责,阅卷及报送参加全国高中数学联赛的名单由各区县教研室具体实施.

试 题

一、选择题(每小题 6 分,共 36 分)

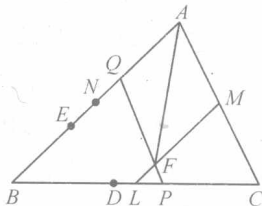
1 已知二次函数 $f(x) = x^2 - 3x + 2$, 则方程 $f(f(x)) = 0$ 不同实数根的数目为().

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

2 抛物线 $y = ax^2 + bx + 1$ 的参数 a, b 满足 $8a^2 + 4ab = b^3$, 则当 a, b 变动时, 抛物线的顶点一定在()上.

- (A) 抛物线 (B) 双曲线 (C) 圆或椭圆 (D) 直线

3 如图, 已知 L, M, N 分别为 $\triangle ABC$ 的三边 BC, CA, AB 的中点, D, E 分别是 BC, AB 上的点, 并满足 AD, CE 均平分 $\triangle ABC$ 的周长, P, Q 分别是 D, E 关于 L, N 的对称点, PQ 与 LM 交于点 F , 若 $AB > AC$, 则 AF 一定过 $\triangle ABC$ 的().



(第 3 题)

- (A) 内心 (B) 外心
(C) 重心 (D) 垂心

4 若方程 $a^x + 2x - 4 = 0 (a > 0, a \neq 1)$ 的所有根为 $u_1, u_2, \dots, u_k$, 其中 k 为正整数, 方程 $\log_a^{2x} + x - 2 = 0 (a > 0, a \neq 1)$ 的所有根为 $v_1, v_2, \dots, v_l$, 其中 l 为正整数, 则

$$\frac{u_1 + u_2 + \dots + u_k + v_1 + v_2 + \dots + v_l}{k + l}$$

的值为().

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 2

5 考虑集合 $S = \{1, 2, \dots, 10\}$ 的所有非空子集, 若一个非空子集中的偶数的数目不少于奇数的数目, 称这个子集是“好子集”, 则“好子集”的数目有()个.

- (A) 631 (B) 633 (C) 635 (D) 637

6 设不定方程 $x^2 + y^2 + z^2 - xyz + 10 = 0$ 的正整数解 (x, y, z) 中满足 x, y, z 均大于 2 008 的不同解的数目为 k , 则 k 满足().

- (A) $k = 0$ (B) $1 \leq k \leq 2\,008$
(C) $k > 2\,008$, 但 k 是有限的数 (D) k 是无穷大

二、填空题(每小题 9 分, 共 54 分)

7 函数 $f(x) = \frac{\sin(x+45^\circ)}{\sin(x+60^\circ)}$, $x \in [0^\circ, 90^\circ]$, 则 $f(x)$ 的最大值与最小值的乘积为_____.

8 若方程 $z^{2\,009} + z^{2\,008} + 1 = 0$ 有模为 1 的根, 则所有模为 1 的根的和为_____.

9 考虑 4×4 的正方形方格表中的 25 个格点, 则通过至少 3 个格点的不同直线的数目为_____.

10 设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 则 $\sum_{k=1}^{2\,008} \left[\frac{2\,008\,k}{2\,009} \right]$ 的值是_____.

11 已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 满足 $AA_1 = 2$, $AD = 3$, $AB = 251$, 平面 A_1BD 分别与 CC_1 、 C_1B_1 、 C_1D_1 交于点 L 、 M 、 N , 则四面体 C_1LMN 的体积为_____.

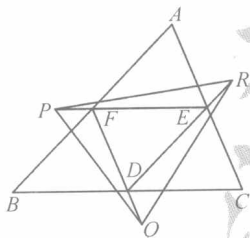
12 已知半径为 R 的圆 O 外有一条直线 l , O 在 l 上的投影为 H , $OH = d$, OH 与圆 O 交于点 C 、 D , $CH > DH$. 设 P 、 Q 为 l 上的点, P 、 Q 在 H 的同侧, 且 $PH = a$, $QH = b$, $a > b$, 圆 O 中有 2 008 条平行于 l 的弦 A_iB_i ($i = 1, 2, \dots, 2\,008$), 且这 2 008 条弦与 CD 的交点均分 CD , 则

$$\frac{1}{2\,008} \sum_{i=1}^{2\,008} (PA_i^2 + PB_i^2 + QA_i^2 + QB_i^2)$$

的值为(用 a 、 b 、 d 、 R 表述)_____.

三、解答题(每小题 20 分, 共 60 分)

13 如图, 已知锐角 $\triangle ABC$ 的三边 BC 、 CA 、 AB 的中点分别为 D 、 E 、 F , 在 EF 、 FD 、 DE 的延长线上分别取点 P 、 Q 、 R , 若 $AP = BQ = CR$,



(第 13 题)

证明 $\triangle PQR$ 的外心为 $\triangle ABC$ 的垂心.

14 已知数列 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 满足: $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+1} = \frac{n^2 a_n^2 + 5}{(n^2 - 1)a_{n-1}} (n \geq 2)$, 求 a_n 的通项公式.

15 有 10 个选手 $A_1, A_2, \dots, A_{10}$, 他们的积分分别为 9、8、7、6、5、4、3、2、1、0, 名次分别为第 1、2、3、4、5、6、7、8、9、10. 现进行单循环比赛, 即任意两个选手之间都恰进行一场比赛, 且每场比赛都要分出胜负. 若名次靠前的选手胜了名次靠后的选手, 则胜者得 1 分, 负者得 0 分; 若名次靠后的选手胜了名次靠前的选手, 则胜者得 2 分, 负者得 0 分, 全部比赛结束后计算每个选手的累计积分(即这次单循环所得的分数与之前的积分相加所得的和), 并根据累计积分进行重新排名, 求新的冠军累计积分的最小值(名次并列是允许的).

解 答

1 因为

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= (x^2 - 3x + 2)^2 - 3(x^2 - 3x + 2) + 2 \\ &= x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 3x, \end{aligned}$$

所以

$$x(x-3)(x^2-3x+1)=0,$$

则

$$x_1 = 0, x_2 = 3, x_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2},$$

因此原方程有 4 个不同实根. 故选 D.

注 也可以讨论 $f(x) = 0$ 根的分布情况. 因为当 $x \leq \frac{3}{2}$ 时, 函数

$f(x)$ 单调递减, 当 $x > \frac{3}{2}$ 时, 函数 $f(x)$ 单调递增, 且 $f(x) = 0$ 的两个根

为 1、2. 所以当 $x \leq \frac{3}{2}$ 时, 函数 $f(x) \in [-\frac{1}{4}, +\infty) \supset [1, 2]$, 因此

$f(f(x)) = 0$ 有两个不同实根; 当 $x > \frac{3}{2}$ 时, 函数

$$f(x) \in \left(-\frac{1}{4}, +\infty\right) \supset [1, 2],$$

因此 $f(f(x)) = 0$ 也有两个不同实根.

综上所述, 原方程有 4 个不同实根.

2 抛物线 $y = ax^2 + bx + 1$ 顶点的坐标为 $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4a-b^2}{4a}\right)$, 设 $x = -\frac{b}{2a}$, $y = \frac{4a-b^2}{4a}$, 则有 $\frac{b}{a} = -2x$, $y = 1 - \frac{b^2}{4a} = 1 + \frac{bx}{2}$. 因为 $a \neq 0$, 所

以 a, b 满足的条件等价于 $8 + 4\frac{b}{a} = b\left(\frac{b}{a}\right)^2$, 于是有

$$8 + 4(-2x) = b(-2x)^2 = 4x(2y - 2),$$

即 $xy = 1$. 故选 B.

3 设 $\triangle ABC$ 的三边长及半周长分别为 a, b, c, p , 则

$$BQ = AE = p - b, \quad BP = CD = p - b,$$

所以 $BQ = BP$. 因为 LM 平行于 AB , 所以

$$LF = LP = BP - BL = p - b - \frac{a}{2} = \frac{c-b}{2},$$

于是有

$$FM = LM - LF = \frac{b}{2} = AM,$$

$$\angle MAF = \angle AFM = \angle FAB,$$

所以 AF 是 $\angle A$ 的角平分线. 故选 A.

4 方程 $a^x + 2x - 4 = 0$ 等价于 $\frac{a^x}{2} = 2 - x$, 其根即为 $y = \frac{a^x}{2}$ 与 $y = 2 - x$ 的交点的横坐标. $\log_a^{2x} + x - 2 = 0$ 等价于 $\log_a^{2x} = 2 - x$, 其根即为 $y = \log_a^{2x}$ 与 $y = 2 - x$ 的交点的横坐标. 因为 $y = \frac{a^x}{2}$ 与 $y = \log_a^{2x}$ 互为反函数, 所以它们的图象关于 $y = x$ 对称, 因此所有根的算术平均值就是