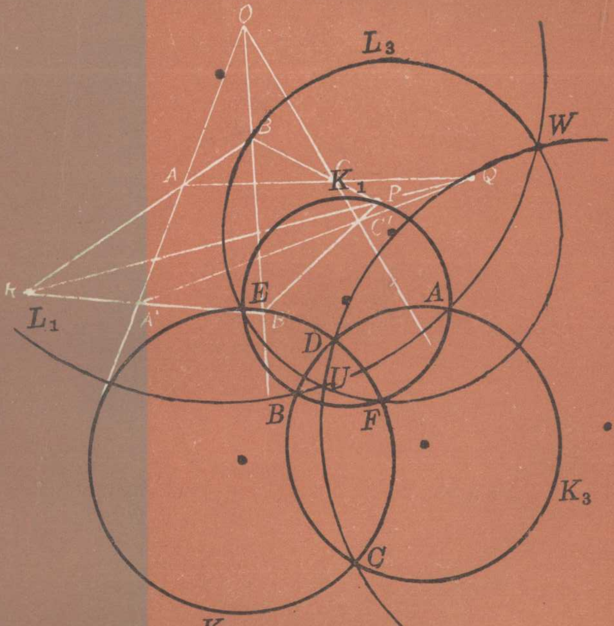
中学生文库

ZHONGXUESHENG WENKU

谈谈数学中的无限



上海教育出版社

中学生文库

ZHONGXUESHENG WENKU

谈谈数学中的无限

谷 超 豪

上海教育出版社

责任编辑　冯　贤
封面设计　范一辛

中学生文库　谈谈数学中的无限
谷超豪

上海教育出版社出版发行
（上海永福路123号）
各地新华书店经销　上海市印刷六厂印刷
开本 787×1092　1/32　印张 2.75　插页 2　字数 48,000
1988年8月第1版　1988年8月第1次印刷
印数 1–11,000 本

ISBN 7-5320-0285-3/G·232　定价：0.72元

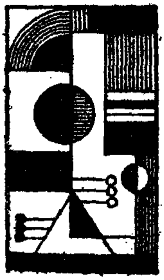
写在前面

当我在小学和中学里学习数学时，有几项内容对我有很深刻的印象。第一项是循环小数，这是我在小学三年级时所接触到的，这是我第一次遇到无限的概念。当时我感到很新奇，居然会有永远写不完的小数，同时我也为掌握了分数和循环小数互化的算法而感到高兴。第二项是：我在初中时，有一次听老师说，太阳离我们很远，它所射出的光线对我们来说是近似地平行的，所以平行线也可以看成为在无限远处相交的直线。我觉得这很有道理，并且感到无限远并不是不可捉摸的，几何学和光学都很需要它。第三项是在高中时期，我在一本数学课外书上读到，整数的全体和偶数的全体在某种意义上说是“一样多”的，这使我十分惊异，仔细一回味，对于无限来说，“一样多”这几个字实际上是另有意义的，而且是颇有道理。第四项是在高中里学了无限级数，知道了无限项可以相加，有时会得出有限的和来，这其实是一种无限逼近的概念，有很多的妙处。循环小数，仅仅是其中的一个非常特殊的情形。这四项内容大大地促进了我对数学的兴趣。

在学了一些高等数学之后，我才逐步地体会到无限在数学中的重要性.我所感到兴趣的那几项内容，实际上都是高等数学中的相当根本的事项. 无限小数（特别是不循环的）构成了实数理论的基础，也是形和数相统一的基础；极限即无限逼近是近代分析数学的最基本的概念，没有极限，就不能有微积分，更谈不上其它的高等数学了；而在几何学中，无限远点的引进以及对无限的不同的想象，促使几何学获得了非凡的进步，不单是数学，理论物理也受到了深刻的影响；至于整数的全体，偶数的全体这些概念，在十九世纪中发展成为集合论，而现在的纯粹数学，不管是分析，几何或代数，都是把集合作为出发点的. 各种各样的集合，加上由各种各样的公理所体现出的数学结构，就成了各门纯粹数学的基础。

这样，我便有了一个想法：如何使现在中学里的同学们，对无限的概念也能发生兴趣，对它能有一些清晰的了解，又不会被复杂的计算或论证所迷惑. 现在这本小书就是怀着这个目的而写的. 它实际上分成了实数系、级数和极限、几何学和集合等四块，希望通过这些内容，使同学们对高等数学也能发生兴趣，在以后接触到这些内容时，由于先有了一些印象而能学得更好. 我感到，学数学不仅仅是学习解题的技巧，会多解难题（这当然是必要的），而且也需要有丰富而严密的思维和想象的能力.大家从这本书里，也许可以见到一些数学概念的产生的背景和过去的数学家们的创造力与想象力，这对于提高数学能力是有好处的.

目 录



一、从循环小数说起

我最初接触到无限的概念是在小学里学除法的时候，老师要我们做以三除一，结果是永远除不尽，得到的是

$$1\div 3=0.3333\cdots$$

这里的3可以一直写下去，无论写多少次，总是不能得到完全准确的答案．老师说，这是循环小数，可以写成

$$\frac{1}{3}=0.\dot{3}.$$

也就是说，设想我们可以把除法无限地进行下去，$\frac{1}{3}$这个分数也就可以表示为循环小数了．这里，就有了我们的一种想象：可以把除法手续无限地进行下去，而它也可以被认为是合理的计算，尽管作无限次的除法是不可能真正做到的．从这里可以得到一个认识：如果没有无限的概念，连最简单的分数往往也不能用小数来表示．由此可见，数学的发展是无法躲开无限这个概念的．

再稍微仔细看一下，对于一个分数$\frac{p}{q}$，这里p、q都是整

数，而且假定它们没有公因子，又 $q\neq 1$. 我们可以区分出两种情形，一种是除得尽的，这就是说它可以表示成整数或有限小数；另一种是除不尽的，这就是说，它必须用无限小数来表示. 这两种情形如何区别呢？

假使$\frac{p}{q}$属于前面一种情形，那么它就可以写作

$$\frac{p}{q}=N.a_1a_2\cdots a_s.$$

这里 N 是整数，$a_1, a_2, \cdots a_s$ 是 $0, 1, \cdots$, 8 或 9，但最后一位数 $a_s\neq 0$. 所以

$$\frac{p}{q}=\frac{N\times 10^s+a_1\times 10^{s-1}+a_2\times 10^{s-2}+\cdots+a_s}{10^s}$$

这里右边的分子表示一个整数，分母也是一个整数，它的约数只有 2, 5 以及它们的某些乘积（包括幂次），通过约分成为$\frac{p}{q}$（p, q 互素）之后，就可以知道 q 一定是 2^a5^b 的形式，这里 a 与 b 都是非负整数. 相反地，如果 q 取 2^a5^b 这种形式，那么$\frac{p}{q}$也一定能够写成有限小数. 这件事情可以有如下的证明：

如果 $a\geqslant b$，

$$\frac{p}{q}=\frac{p}{2^a5^b}=\frac{p\times 5^{a-b}}{10^a};$$

如果 $a<b$，

$$\frac{p}{q}=\frac{p\times 2^{b-a}}{10^b}.$$

而这两个式子的右边就只能是有限小数．我们知道，一个正整数一定可以通过分解因子而写成

$$q=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_n^{a_n}$$

的形式，式中 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 是素数，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是正整数，所以只有 $n=2$，$p_1=2$，$p_2=5$ 这样两种非常特殊的情形，$\frac{p}{q}$才能够是有限小数，除此之外，所有的分数都不能表示为有限小数，而只能表示为循环小数．

为什么一定会是循环的呢？因为在这种情形做除法时，一定会有余数，并且（乘以10的适当幂次后）总是1，2，…，$q-1$ 这 $q-1$ 个数中的一员，所以，再进行了 q 次除法，一定会在某个时候出现相同的余数，于是小数就循环了．大家还可以注意到，这种循环不一定在除了 q 次之后才出现，有时，可能出现得早些．

所以，当我们用小数来表示分数时，出现有限小数的机会是很少的．在绝大多数的情形下，我们会遇到循环小数．值得注意的是，我们明明知道循环小数是写不完的，但是我们又无法避开它们．当然我们也可以取某几位有效数字，硬把它截断（或再做一次四舍五入）成为有限小数，但这只是近似而并不是精确的表达，总有误差．从应用的观点来看，我们必须容许误差，但在建立数学的理论时，我们不能只有近似值而没有精确的数值，这是大家都能够理解的．

二、用尺能测量哪些长度

通常，我们总是拿尺子来测量一条线段的长度．一根理想的尺子，可以设想它有很精细的刻度，有分米，有厘米，有毫米，甚至更细一点．如果线段的长度是有限小数，我们可以认为这根尺子可以精确地量出这条线段的长度来，只要我们的这根尺有足够细的刻度．这样说已有了一定的理想化的成份，因为无论科学技术怎样进步，总有非常小的长度，依然是无法辨认的．

如果这线段的长度是一个分数$\frac{p}{q}$，它又不能表示为有限小数，那么用上述办法去测量，便成为永远测不完了．但是，在古希腊的几何学中，人们已经知道，只需用到直尺和圆规就能把一个线段分为q个等分．如果用这根尺的q等分作为一根小尺子，那么长度$\frac{p}{q}$也就可以量出来了．在这种意义上说，人们进行精确的，理想化的测量的可能性又大大地增加了．

希腊的毕达哥拉斯学派曾经相信，任何两条直线段的长度之比总是整数之比．如果事实真是这样，那么任何一个直线段的长度总可以用上面所说的那些小尺子来精确地测量了．但是，这个学派的研究否定了自己的信条．

最简单的例子是两腰等于1的等腰直角三角形斜边的长度，它应该等于$\sqrt{2}$，但$\sqrt{2}$不能是两个正整数之比，这是因为：如果$\sqrt{2}=\dfrac{p}{q}$，p、q是无公因子的正整数，那么就有$2q^2=p^2$．因为奇数的平方一定是奇数，从上式可见，p必须是偶数．设$p=2m$，m是正整数，从这里又可以推出$q^2=2m^2$，从此又得出q必须是偶数（仍然因为奇数的平方不会是偶数）．这样，p和q必须有公因子2，这就跟原来的假设发生了矛盾．从而，人们就知道存在一些直线段，它们的长度之比不是正整数的比．

于是有两种处理问题的方法．一种是避免用数来表示线段的长度，欧几里得把几何学理论化、系统化时所采取的就是这种方法．出现了可通约线段和不可通约线段的概念，可通约线段的长度之比是两个正整数之比，后来称为**有理数**（rational number 有人认为译为比数更恰当）．如果出现了不可通约线段的情形，希腊时代的数学家就用可通约线段的比来无限地近似它，这种无限的过程就是后来的极限过程的萌芽，我们以后要讨论它．

另一种方法是把数的概念加以推广，例如对$\sqrt{2}$，我们可以一位一位小数地计算下去，这样算下去也得到$\sqrt{2}=$

1.414…我国古代很早就会作这种计算。这种开方计算是永远不会完的(否则$\sqrt{2}$就是一个有限小数，从而是有理数了)，也不会得到循环小数(否则$\sqrt{2}$也会成为有理数的)．所以计算的"结果"是不循环的无限小数，称为**无理数**(irrational number，译为非比数可能更恰当)．无理数被引进之后，我们就能够用数来表示直线段的长度了．这里的数是指有理数或无理数，人们就把它们的全体总称为实数．这样，我们就可以说用无限细分的(十进制)尺子能量出任一直线段的长度来．当然，如果尺子的长度和要量的长度之比不是正整数和有限小数的话，我们要无限次地看尺子上的刻度，而且永远看不完，因为这长度是个无限小数．所以，这里又是一种对无限的想象．有了这种想象，我们就有了把实数和直线段的长度一一对应起来的原始思想了．这便构成了解析几何的最初的概念：数轴的概念．作一直线，选取一点O作为原点，在其右侧选一点A(A不重于O)作为单位点，O点到A点的距离记为$|OA|$(图1)．对于O右

图 1

侧的一点B，如O和B的距离$|OB|=k|OA|$，就称B点有坐标k(距离$|OB|$、$|OA|$等总取正值，但$|OO|=0$)．若B在O的左侧而$|OB|=k|OA|$，则称B点有坐标$-k$．这样，我们不但要求直线上每点有它的坐标，而且还要求，对于

每一个实数，一定有直线上的一个点以它为坐标，这实质上是对直线所作的一个假定，同时也是解析几何的理论根据。

三、无限个数的相加

有限个数相加是大家都会做的．特别，如果不牵涉到无理数的情形，也就是有限个分数的相加，总是可以用有限个步骤完成的（用通分、相加、再约分的手续）．如果那些数中有无理数，那可能要复杂一些．例如，化成无限小数的相加，其步骤显然和有限小数相加相类似，但要从$\frac{1}{10}$的一位再开始做，然后，做$\frac{1}{100}$位等等，要做无限次，而且有时一个进位可以影响许多项．但无论如何，我们总认为已能进行这种运算．

现在设想无限个数的相加，例如：

(1) $1+1+1+1+\cdots$

(2) $1+2+3+4+\cdots$

(3) $0+0.3+0.03+\cdots$

这种无限个数所成的和式叫做无限级数，它们的最初几项的和叫做部分和．一般地说，一个无限级数可以写作

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$$

的形式，也可以简单地记作$\sum_{k=1}^{\infty}a_k$，而由 n 项所成的部分和就是

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k.$$

部分和是有限项的和，所以是完全可以做的，有的时候还可以有相当简单的表达式．例如对前面的无限级数(1)，有$S_n^{(1)}=n$，对(2)，有$S_n^{(2)}=\frac{n(n+1)}{2}$，对(3)，有 $S_n^{(3)}=0.33\cdots3$(n 位)．就 $S_n^{(1)}$而言，当项数越取越多，即 n 越取越大时，和数不仅越取越大，而且能够取到和超过任何正整数．当 n 增加时，$S_n^{(2)}$的增长更快，它当然能够超过任何正整数，所以在这两个例子中，当项数取得越来越多时，部分和会超过比你所能想象的任何大的正数．这时，无限项的相加不能够用一个有限的、确定的数来表示它们的和．

但对于第三个例子来说，$S_n^{(3)}$显然也是随着 n 而继续增大，但每添加一项，部分和的增长却越来越小，而且永远不会超过$\frac{1}{3}$．实际上，(3)式还可以写作

$$0.3333\cdots$$

这就是一开始讲过的循环小数，我们已把它理解为$\frac{1}{3}$．

从这些例子来看，无限项作加法有时不能用一个数来表示它们的总和，有时却又能够用一个数来表示它们的总和．

为了区分这两种情形，我们必须有极限的概念. 上面所说的部分和 S_n 是一个有次序的无限数列，即数 $S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$ 可以依一定的次序无限地写下去. 在情形(3)时，这个数列中的数 $S_n^{(3)}$，只要 n 相当大，它能够与 $\frac{1}{3}$ 任意地接近. 举例来说，我们有

$$0<\frac{1}{3}-S_1^{(3)}<0.1=10^{-1},$$

$$0<\frac{1}{3}-S_2^{(3)}<0.01=10^{-2},$$

…………

$$0<\frac{1}{3}-S_n^{(3)}<\overbrace{0.0\cdots01}^{n}=10^{-n},$$

如果说 10^{-100} 是一个很小的数，那么，当 $n>99$ 时，

$$\left|\frac{1}{3}-S_n^{(3)}\right|<10^{-100}.$$

如果对于任意小的一个正数 ε，那么一定会有一个 N，使得 $10^{-N}<\varepsilon$（比如说，$\varepsilon=0.0\cdots0731$ 这里 7 的前面有 30 个 0，要使 $\varepsilon<10^{-30}$，N 就取 30）. 因此当 $n>N$ 时，$\left|\frac{1}{3}-S_n^{(3)}\right|<\varepsilon$. 在这个时候，我们就说无限数列 $S_n^{(3)}$ 当 n 趋向无限时，以 $\frac{1}{3}$ 为极限，记作

$$\lim_{n\to\infty} S_n^{(3)}=\frac{1}{3}$$

更一般地说，设$S_1, S_2, S_3, \cdots, S_n, \cdots$是一个无限序列，简记为$\{S_n\}$，如果存在一个数$S$，使得$n$变得足够大时，$S_n$和$S$以任意程度接近，我们就称$S$是序列$\{S_n\}$的极限．这里有“足够大”和“任意程度接近”两句话，在现代的数学家的眼中，还是不够精确的，所以进一步的精确化的叙述应该是：对于任何一个不论是怎样小的数$\varepsilon>0$，总存在一个正数N，使得当$n>N$时（即n足够大时），不等式$|S_n-S|<\varepsilon$总能成立．因为ε是先任意给的小的正数（如前面例子中的$10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-100}$等等），所以后一不等式就意味着$S$和$S_n$任意接近，但在后文的多数场合中，我们并不要求有这样精确的叙述，这种叙述的好处，要从高等数学中逐步领悟出来．

当S_n是无限级数的部分和时，如果$\{S_n\}$的极限存在，并等于S，我们就说这个无限级数收敛，S就是这个无限级数的和．

所有(0, 1)之间的无限小数，例如取

$$0.b_1b_2b_3\cdots b_n\cdots$$

可以把它写成

$$\frac{b_1}{10}+\frac{b_2}{10^2}+\cdots+\frac{b_n}{10^n}+\cdots$$

这就是一个无限级数，这里所有的$b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots$都是0, 1, $\cdots$, 9中的一个，这时我们有$a_n=\frac{b_n}{10^n}$，因为这时

$$S_n=\frac{b_1}{10}+\cdots+\frac{b_n}{10^n}.$$