数学分析习题解答

下　册

新乡师院数学系

目　　录

第Ⅵ篇　多元函数的微分学

第Ⅶ篇　多元函数的积分学

第Ⅷ篇　广义积分与带参变量的积分

第Ⅸ篇　变　分　法

第Ⅵ篇　多元函数的微分学

第十六章　多元函数的极限与连续性

§1. 引言

§2. 多元函数

1. 设函数$f(x,y)=x^3-2xy+3y^2$，试求：

(1) $f(-2,3)$；　　　　(2) $f(\frac{1}{x},\frac{2}{y})$；

(3) $\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$.

解：(1) $f(-2,3)=(-2)^3-2(-2)3+3(3)^2=31$；

(2) $f(\frac{1}{x},\frac{2}{y})=\frac{1}{x^3}-\frac{4}{xy}+\frac{12}{y^2}$，

(3) $\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$.

$$=\frac{[x^3-2x(y+h)+3(y+h)^2]-[x^3-2xy+3y^2]}{h}$$

$$=-2x+6y+3h$$

2. 确定下列函数的定义域，并画出定义域的图形：

(1)$f(x,y)=\ln[(16-x^2-y^2)(x^2+y^2-4)]$

解：$(16-x^2-y^2)(x^2+y^2-4)>0$

若$\begin{cases}16-x^2-y^2<0,\\x^2+y^2-4<0,\end{cases}$ 得$\begin{cases}x^2+y^2>16,\\x^2+y^2<4.\end{cases}$ 矛盾.

若$\begin{cases}16-x^2-y^2>0,\\ x^2+y^2-4>0,\end{cases}$

得 $$4<x^2+y^2<16.$$

故定义域为

$$D_1=\{(x,\ y);\ 4<x^2+y^2<16\}.$$

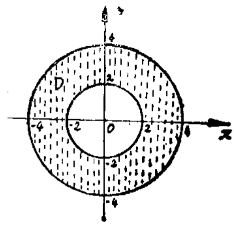


图16.2.1

如图16.2.1中的阴影部分所示(不包括边界)；

(2) $f(x,y)=\sqrt{6-(2x+3y)}$

解：$6-(2x+3y)\geqslant 0$ ∴定义域为

$$D_2=\{(x,\ y);\ 2x+3y\leqslant 6\},$$

如图16.2.2中的阴影部分所示(包括边界 $2x+3y=6$)；

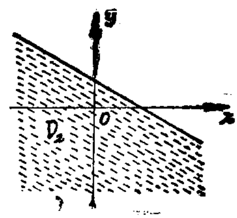


图16.2.2

(3) $f(x,\ y)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$

解：$1-x^2\geqslant 0$ $y^2-1\geqslant 0$

∴定义域为

$$D_3=\{(x,\ y);\ |x|\leqslant 1,\ |y|\geqslant 1\},$$

如图16.2.3中的阴影部分所示(包括边界)；

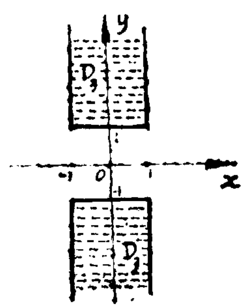


图16.2.3

(4) $f(x,\ y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2xy}}$

解：由$x^2-2xy>0$，可得

$$\begin{cases}x>0,\\ y<\dfrac{x}{2}\end{cases}$$

$$\text{或}\begin{cases} x<0, \\ y<\dfrac{x}{2}. \end{cases}$$

即定义域为 $D_4=\{(x,\ y);$

$x>0,\ y<\dfrac{x}{2}$ 或 $x<0, y>\dfrac{x}{2}\}$，

如图 16.2.4 中的阴影部分(不包括边界 $y=\dfrac{x}{2}$)。

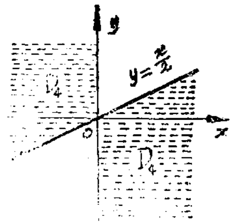


图16.2.4

2．画出下列函数的图形：

(1) $z=12-3x-2y \qquad (x\geqslant 0,\ y\geqslant 0)$

解：化为截距式

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{6}+\frac{z}{12}=1$$

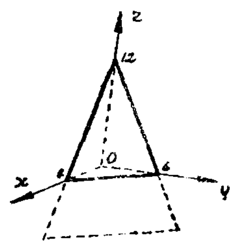


图16.2.5

(2) $z=x^2+y^2-1 \qquad (x^2+y^2\leqslant 1)$

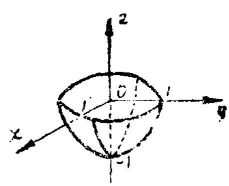


图16.2.6

§ 3. 多元函数的极限

1. 证明定理1之(V). 即证明

设 $\lim\limits_{X\to X_0} f(X)=A$，并且对于$X_0$附近*的$D$中的点$X\neq X_0$时，$u=f(X)\neq A$，又设$\varphi(u)$在$f(X)$的值域上有定义，且$\lim\limits_{u\to A}\varphi(u)=B$，则

$$\lim_{X\to X_0}\varphi[f(X)]=B.$$

证：设对于$U=\{X; \|X-X_0\|<\eta\}$内的D中的点$X\neq X_0$时，$u=f(X)\neq A$. 由题设，任给$\varepsilon>0$，有$\delta_1>0$，当$0<|u-A|<\delta_1$时，

$$|\varphi(u)-B|<\varepsilon.$$

又对此δ_1，存在δ：$0<\delta<\eta$，使得当

$$0<\|X-X_0\|<\delta$$

时有 $\quad |u-A|=|f(X)-A|<\delta_1$

从而当$0<\|x-x_0\|<\delta$时，$|\varphi(u)-B|<\varepsilon$，即

$$|\varphi[f(x)]-B|<\varepsilon.$$

故 $\quad \lim\limits_{X\to X_0}\varphi[f(x)]=B.$

2. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}\dfrac{3xy+x^2y^2}{x+y}$

解：因 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}(3xy+x^2y^2)=10$，

---

*一点附近指的是该点的某邻域.

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)}(x+y)=3,$$

故 $$\lim_{(x,y)\to(1,2)}\frac{3xy+x^2y^2}{x+y}=\frac{10}{3}.$$

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,3)}\dfrac{\sin xy}{x}$.

解：当 $|x|<1$，$|y-3|<1$时，$y\neq 0$，

故 $$\lim_{(x,y)\to(0,3)}\frac{\sin xy}{x}=\lim_{(x,y)\to(0,3)}y\frac{\sin xy}{xy}=3.$$

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\ln(x^2+y^2)$

解：因 $$|(x+y)\ln(x^2+y^2)|\leqslant\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}|\ln(x^2+y^2)|,$$

右端当$(x,y)\to(0,0)$时趋于0（注意$\lim\limits_{t\to0^+}t^{\frac{1}{2}}\ln t=0$），

所以 $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\ln(x^2+y^2)=0;$$

(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$

解：原题$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{(\sqrt{xy+1}-1)(\sqrt{xy+1}+1)}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}(\sqrt{xy+1}+1)=2;$$

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{x^2y^2}$

解：因 $$|\ln(x^2+y^2)^{x^2y^2}|=|xy\cdot xy\ln(x^2+y^2)|$$

$$\leqslant|xy|\left|\frac{x^2+y^2}{2}\right||\ln(x^2+y^2)|,$$

故 $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} ln(x^2+y^2)^{x^2y^2}=0,$$

所以 $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{x^2y^2}=1,$$

或 $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{x^2y^2}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left[(x^2+y^2)^{x^2+y^2}\right]^{\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}}=1.$$

(注意：$\lim\limits_{t\to0^+}t^t=1$； $\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}\leqslant\dfrac{1}{2}|xy|\longrightarrow0$，

当 $(x,y)\to(0,0)$时。)

3．设$f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$ $(x\neq y)$， 证明：

(1) 对任何实数K，总可适当地选取从原点出发的射线，使得当(x,y)沿该射线趋于$(0,0)$时，$f(x,y)$趋于K；

(2) $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}f(x,y)\neq\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}f(x,y)$.

证：(1) 对任何$K\neq-1$，取 $y=\dfrac{K-1}{K+1}x$，则沿该射线 $\dfrac{x+y}{x-y}=K$，当然结论成立。若 $K=-1$，取射线为 $x=0$ (即y轴)，则沿 $x=0$ 有：$\dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{y}{-y}=-1$ $(y\neq0)$，从而知结论亦成立。

(2) 因$\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}f(x,y)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x}=1$，

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x, y)=\lim_{y\to 0}\frac{y}{-y}=-1.$$

所以 $$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x, y)\neq \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y).$$

4．设$f(x, y)=\dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$，证明：

(1) 当(x, y)沿任何直线趋于原点时，$f(x, y)$趋于0；

(2) 不存在极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$.

证：(1) 设 $y=kx$（k为任意实数）为任一条直线（经过原点），当(x, y)沿该直线趋于原点时，有：

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} f(x, y)=\lim_{x\to 0}\frac{k^4x^8}{(x^2+k^4x^4)^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{k^4x^2}{(1+k^4x^2)^3}=0;$$

(2) 但当(x, y)沿$y^2=x$趋于原点时，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)=\lim_{y\to 0}\frac{y^{12}}{8y^{12}}=\frac{1}{8}\neq 0.$$

结合(1)即知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$不存在（定理2）.

5．设$f(x, y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$，证明：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x, y)=\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x, y)$;

(2) 不存在极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$.

证：(1) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x, y)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0}{x^2}=0$，

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x, y)=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2}=0,$$

故结论成立；

(2) 对任何固定的y，$\lim\limits_{x\to 0} f(x, y)=0$，同样对任何固定的$x$，$\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=0$。所以若极限$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$存在，根据命题2，应有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)=\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=0,$$

但当点(x, y)沿$y=x$趋于原点时，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4}=1\neq 0,$$

所以不存在极限$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$（或$f(x,y)$沿$y=x$趋于原点时极限为1，而沿$x=0$趋于原点时极限为0，因而由定理2知不存在极限$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$）。

6．证明：对于函数

$$f(x, y)=(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

累次极限$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$和$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$不存在，但

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)=0.$$

证：因对任意固定的$x\neq 0$，$\lim\limits_{y\to 0} f(x, y)$不存在。所以$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$不存在。同理可证，$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$

也不存在。但由

$$|f(x,\ y)|\leqslant|x|+|y|$$

知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$

$=0$.

7．证明存在极限 $\lim\limits_{X\to X_0} f(X)$ 的充要条件是对任意异于 X_0 且趋于 X_0 的点列 $\{X_n\}$，总存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(X_n)$.

证：必要性显然成立.

充分性：(i) 先证若对任意异于 X_0 且趋于 X_0 的点列 $\{X_n\}$，总存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(X_n)$，则必有相同的极限，不妨记为 A。因为倘若不然，那么存在两个满足条件的点列 $\{X_n\}$ 与 $\{Y_n\}$，使

$$\lim_{n\to\infty} f(X_n)=A,\qquad \lim_{n\to\infty} f(X_n)=B.$$

而 $B\neq A$。则取 $Z_1=X_1$，$Z_2=Y_1$，$Z_3=X_2$，$Z_4=Y_2$，…，$Z_{2n-1}=X_n$，$Z_{2n}=Y_n$，…，显然 $\{Z_n\}$ 亦为异于 X_0 且趋于 X_0 的点列，但 $\lim\limits_{n\to\infty} f(Z_n)$ 不存在，与题没矛盾.

(ii) 其次证明，当题设条件满足时，必有 $\lim\limits_{X\to X_0} f(x)=A$，事实上，若当 $X\longrightarrow X_0$ 时，$f(X)$ 不趋于 A，则存在 $\varepsilon_0>0$，对任意 $r_n>0$（不妨取 $r_n\downarrow 0$），都有 $X_n\neq X_0$，使 $0<|X_n-X_0|<r_n$，但

$$|f(X_n)-A|\geqslant\varepsilon_0 \tag{*}$$

而 $\{X_n\}$ 组成一个异于 X_0 且趋于 X_0 的点列，根据题意及(i)

应有$\lim\limits_{n\to\infty} f(X_n)=A$，与(*)式矛盾。

由(i)与(ii)的讨论即知充分性成立。

8．证明$\lim\limits_{X\to X_0} f(X)$存在的充要条件是对任意的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$0<\|X'-X_0\|<\delta$，$0<\|X''-X_0\|<\delta$时，有$|f(X')-f(X'')|<\varepsilon$成立(柯西收敛准则)。

证：必要性　设$\lim\limits_{X\to X_0} f(X)=A$，则任给$\varepsilon>0$，有$\delta>0$，只要$0<\|X-X_0\|<\delta$，便有

$$|f(X)-A|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

故当$0<\|X'-X_0\|<\delta$，$0<\|X''-X_0\|<\delta$时，

$$|f(X')-f(X'')|\leqslant|f(X')-A|+|f(X'')-A|$$
$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

充分性　设$\{X_n\}$为任一异于X_0且趋于X_0的点列，因而对任$\delta>0$，存在自然数N，使当$n\geqslant N$时，$0<\|X_n-X_0\|<\delta$，故由题设知，当m，$n\geqslant N$时，有

$$|f(X_m)-f(X_n)|<\varepsilon.$$

根据序列的收敛原理知$\lim\limits_{n\to\infty} f(X_n)$存在。再由上题的结果知$\lim\limits_{X\to X_0} f(X)$存在。

*9．证明$\lim\limits_{X\to X_0} f(X)=A$的充要条件是点$X$沿任意连续曲线趋于$X_0$时，$f(X)$趋于$A$。

证：必要性　由定理2，显然成立；

充分性　设点X沿任意连续曲线趋于X_0时，$f(X)$趋于A，要证$\lim\limits_{X\to X_0} f(X)=A$。反证，若不然，则存在$\varepsilon_0>0$，对

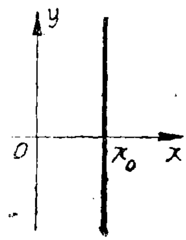
任何$r_n>0$（$n=1,2,\cdots$，且可取$r_n\downarrow 0$），总可找到点X_n（不妨设$X_{n+1}\neq X_n$），使$0<\|X_n-X_0\|<r_n$，但

$$|f(X_n)-A|\geqslant\varepsilon_0. \tag{1}$$

显然$\lim\limits_{n\to\infty}X_n=X_0$，记$X_0=(x_0, y_0)$，在$xy$平面内作直线$x=x_0$，则在

$$\{x=x_0\},\{x<x_0\},\{x>x_0\}$$

三部分上至少有一部分含有属于$\{X_n\}$的无穷多个点。



(i) 若在$\{x=x_0\}$上含有属于$\{X_n\}$的无穷多个点X_{n_k}（$n_1<n_2<\cdots$），则X沿直线$x=x_0$趋于X_0时，$f(X)$的极限必不是A（根据(1)式），与题设矛盾。

(ii) 若在$\{x<x_0\}$上含有$\{X_n\}$内的无穷多个点，那么任取其中的一点作为$X_{n_1}=(x_{n_1}, y_{n_1})$，由$X_n$的取法（互不相同）及$\lim\limits_{n\to\infty}X_n=X_0$知$\{x_{n_1}<x<x_0\}$上仍含有属于$\{X_n\}$的无穷多个点，因而可在$\{x_{n_1}<x<x_0\}$上任取一个属于$\{X_n\}$的点作为$X_{n_2}=(x_{n_2}, y_{n_2})$，$\cdots$，如果继续下去，得到$\{X_n\}$的一个子数列$\{X_{n_k}\}$，$X_{n_k}=(x_{n_k}, y_{n_k})$，$n_1<n_2<\cdots$，且满足

$$x_{n_1}<x_{n_2}<\cdots<x_{n_k}<\cdots<x_0.$$

易见$\lim\limits_{k\to\infty}X_{n_k}=X_0$。依次连结$X_{n_1}$，$X_{n_2}$，$\cdots X_{n_k}$，$\cdots$，便得到一条连续曲线$C$（因$x_{n_k}<x_{n_{k+1}}$，所以$C$是$x$的某个单

值函数的图象)。但由(1)式知，当X沿C趋于X_0时$f(x)$不趋于A，与题设矛盾。

(iii)同理可证，若$\{x>x_0\}$上有属于$\{X_n\}$的无穷多个点，亦与题设矛盾。

综合上述讨论，必有$\lim\limits_{X\to X_0} f(X)=A$。

§4. 平面点集

1．求出下列平面点集的聚点：

(1) $E=\{(\frac{1}{n},\frac{n+1}{n});\ n=1,2,\cdots\}$；

解：因$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$，故由命题4，点$X_n=(\frac{1}{n},\frac{n+1}{n})$当$n\to\infty$时趋于$X_0=(0,1)$，又$X_n$互异，且$X_0\overline{\in}E$，因而$X_0$的任一邻域内都有属于$E$且不等于$X_0$的点，由聚点的定义知$X_0$是$E$的聚点。

又若$X'=(x',y')\neq(0,1)$，取$\delta=\frac{1}{2}\|X'-X_0\|$，则当$n$充分大时，$U=\{X;\|X-X'\|<\delta\}$内将不再含有$E$中的点(除$X'$本身可能属于$E$外)，所以$X'$不是$E$的聚点。

所以E的聚点为$X_0=(0,1)$；

(2) $E=\{(\frac{1}{n},\frac{m+1}{m});\ m,n=1,2,\cdots\}$；

解：令$X_{n,m}=\left(\frac{1}{n},\frac{m+1}{m}\right)$，易见$\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} X_{n,m}=X_0$

$=(0,1)\in E$，又 $X_{n,m}$ 互异，故 $(0,1)$ 是 E 的聚点。

又对任一固定的 n，$\{X_{n,m}\}$ 成为各项互不相同的一维中的点列，且 $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{m+1}{m}=1$，故由第十一章§1习题4，$\{X_{n,m}\}$ 有唯一的聚点 $(\frac{1}{n},1)$ $(n=1,2,\cdots)$。

同样，对任一固定的 m，$\{X_{n,m}\}$ 有唯一的聚点 $(0,\frac{m+1}{m})$ $(m=1,2,\cdots)$。

所以 E 的聚点为

$$(0,1),\ (\frac{1}{n},1),\ (0,\frac{n+1}{n}),\ (n=1,2,\cdots);$$

(3) $E=\{(x,\operatorname{sgn}x);\ x\in D\}$（$D$ 为有理数集）。

解：由有理数的稠密性易知集合

$E_1=\{(x,1);\ x\geqslant 0\}$ 和 $E_2=\{(x,-1);\ x\leqslant 0\}$ 中任一点都是 E 的聚点。

又若 $X'=(x',y')\bar{\in} E_1\cup E_2$，即(i) $x'<0$，$y'\neq -1$，取 $\delta=\min\{|y'+1|,\sqrt{x'^2+(y'-1)^2}\}$，即 X' 与直线 $y=-1$ 和 X' 与点 $(0,1)$ 的距离的最小者，则在 $\{X;\ \|X-X'\|<\delta\}$ 内将不再含有 E 中的点，所以 X' 不是 E 的聚点；

(ii) 同理可证 $x'>0$，$y'\neq 1$ 时，X' 也不是 E 的聚点；

(iii) $x'=0$，$y'\neq\pm 1$，取 δ 为 X' 与 $(0,1)$ 及 X' 与 $(0,-1)$ 的距离的最小者，即

$$\delta=\min\{|y'-1|,\ |y'+1|\}.$$

则 $\{X;\ \|X-X'\|<\delta\}$ 内不含 E 中的点，故 X' 不是 E 的聚

点。

由上面讨论知E的聚点为

$$E_1=\{(x,1);\ x\geqslant 0\}\text{和}E_2=\{(x,-1);\ x\leqslant 0\},$$

即 $y=1\ (0\leqslant x<+\infty)$和$y=-1\ (-\infty<x\leqslant 0)$。

2．试就定理4，举例说明：

(1) 改设D是有界区域，M是一族开圆复盖了D，此时定理结论不真；

例如，取$D=\{(x,y),\ x^2+y^2<1\}$，$m=\{U_n\}$，其中$U_n=\{(x,y);\ x^2+y^2<1-\frac{1}{n+1}\}$ ($n=1,2,\cdots$)。易见M复盖了D，但M中任意有限多个元素（开圆）皆不可能复盖住D，所以此时定理结论不真。

(2) 改设D是闭区域，M是一族开圆复盖了D，此时定理结论不真；

例如，取$D=\{(x,y);\ 0\leqslant x\leqslant 2,\ -\infty<y<\infty\}$，$M=\{U_n\}$，其中$U_n=\{(x,y);\ (x-1)^2+(y-n)^2<4\}$ ($n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$)。显然D中任一点$X=(x,y)$，都有n_0，使$X\in U_{n_0}$，即M复盖了D。但M中任意有限多个开圆都不可能复盖住D。

(3) 改设M是一族闭圆，而D是有界闭区域，此时定理结论不真。

例如，取$D=\{(x,y);\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}$，$M=\{U_n,\ n=0,1,2,\cdots\}$，其中$U_0=\{(x,y);\ (x-1)^2+y^2\leqslant 1\}$，$U_n=\{(x,y);\ x^2+y^2\leqslant 2-\frac{1}{n}\}$

$(n=1, 2, \cdots)$. 则 D 上任一点 $X=(x, y)$（除点 $(1, 1)$ 外），都存在 n_0，使 $X\in U_{n_0}$（$n_0\neq 0$），而 $(1,1)\in U_0$. 所以 M 复盖了 D，但易知 M 中任意有限多个闭圆皆不可能复盖住 D.

3. 在平面上，分别举出符合下列要求的点集的例子：

(1) 开集而非区域；

例：点集 $\{x^2+y^2<1\}\cup\{(x-3)^2+y^2<1\}$①显然是开集，而不是区域；

(2) 不含内点的闭集；

例 取单点集 $\{(0, 0)\}$ 即可；

(3) 不包含聚点的有界无穷点集.

例 $E_1=\{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}); m, n=1, 2, \cdots\}$ 或更简单些的点集 $E_2=\{(\frac{1}{n}, 1); n=1, 2, \cdots\}$ 都符合要求.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续，证明

$$E=\{(x, f(x)); -\infty<x<+\infty\}$$

是平面上的闭集.

证法 1：若点 $P_0=(x_0, y_0)\in E'$，则存在一串点 $P_k=(x_k, y_k)\in E, k=1,2,\cdots$，使 $P_k\to P_0(k\to\infty)$. 从而 $x_k\to x_0$，$y_k\to y_0(k\to\infty)$. 由 $f(x)$ 的连续性知必有 $y_0=f(x_0)$. 故 $P_0(x_0, y_0)=(x_0, f(x_0))\in E$. 所以 $E\supset E'$，因而 $E=E'$. 故 E 为闭集.

证法 2：只需证明 E 外的任一点都不是 E 的聚点，亦即

---

① $\{x^2+y^2<1\}$ 表示 $\{(x,y); x^2+y^2<1\}$，其它类同.