概率素数论

GAILU SUSHU LUN

熊一兵◎著

$$\pi(N)=li(x)-\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}-\sqrt[6]{x}}{\ln x-1}\pm\sqrt{2\Pi(x)\ln\ln x}$$

西南交通大学出版社
SWJUP Http://press.swjtu.edu.cn

概率素数论

熊一兵　著

西南交通大学出版社
·成　都·

内 容 简 介

书中定理均获得已有实际数据的支持．用本方法证已有定理时，所得结果与原来的结果等价．本书为概率论及素数论提供了一套解决问题的新方法，在解决或部分解决素数论中的若干问题时，发展了概率论．作为一种全新思维模式的初创理论，笔者感到用它解决某些问题会相对容易简洁，是大学生、研究生在做毕业论文时切入前沿性课题的一个机会，可作为数学爱好者、数学工作者、大学及研究生的教材．

图书在版编目（CIP）数据

概率素数论 / 熊一兵著．—成都：西南交通大学出版社，2008.8
ISBN 978-7-81104-955-8

Ⅰ．概… Ⅱ．熊… Ⅲ．①概率论②—素数 Ⅳ．0211 0156.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 107493 号

概 率 素 数 论

熊一兵 著

*

责任编辑 张宝华
封面设计 跨克创意
西南交通大学出版社出版发行
（成都市二环路北一段 111 号 邮政编码：610031 发行部电话：028-87600564）
http://press.swjtu.edu.cn
四川森林印务有限责任公司印刷

*

成品尺寸：170 mm×230 mm 印张：22.625
字数：432 千字
2008 年 8 月第 1 版 2008 年 8 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-81104-955-8
定价：45.00 元

图书如有印装质量问题 本社负责退换

前　　言

阅读本书需大学二、三年级的数学知识.

本书将概率论与素数论相结合，产生了一个数论新分支 —— 概率素数论. 它吸收概率论与素数论两者的优势：计算理论值 —— 概率量时，使用概率的方法、定义、定理等；表达实际值 —— 频率量时，力求使用素数论的方法，以建立相关的方程、表达式等，并转换成对应的概率量进行计算. 同时，还将概率素数论的方法，应用在数码、格点问题中，形成概率数码论、概率格点论. 这些基本上都是概率素数论这一方法的应用，故本书仍定名为概率素数论.

概率素数论与概率论的比较：

（1）相同点：两者都是研究分析不存在简单规律的指定事件，在统计意义上出现的规律性.

（2）不同点：前者研究随机事件，后者研究确定事件.

（3）注意事项：用概率论研究素数问题时，必须验证理论结果与实际数据是否相符. 其原因在于素数问题有自身的规律，在不能保证任何素数问题出现的规律时，一定等价于随机事件.

概率素数论中的频率量与素数论中密率的比较[1]P584：

（1）相同点：两者虽然名称不同，但表达的数学思想实质上是相同的，即都能借助于素数论的方法研究素数问题.

（2）不同点：建立相关公理后，前者可借助于概率论的方法研究素数问题，而后者却不能.

（3）意义：从理论上讲，用后者方法获得的结果，都可以用前者方法获得；反之，不一定行.

概率素数论与素数论的比较：

素数论经过长期发展，其中的定理比较成熟，对某些不确定量阶的估值，做得较好；而概率素数论在这方面的工作做的较少，边界只是界定了不确定量的最大值，仍有不少问题亟待解决：如是否还可以研究边界的分布 —— 边界的边界问题. 众多素数论的分布问题，及它们的内在规律、外部面貌及实际应用，均为概率素数论的发展提供了丰富的素材，也为这些问题的解决增加了一个可能的途径.

作者参加过四川省内江市 1988 年的数学年会，并在年会上介绍了论文：

本书的核心内容及1983年写的费马大定理的证明及推广. 2006年12月14日在四川省版权局申报版权保护（登记号：21—2007—A—<2260>—015）.

1982年秋，笔者大学物理专业毕业，1983年春，尝试研究数学问题. 鉴于自己非数学专业毕业，缺乏这方面的资料，依稀想起了1978年春轰动全国的徐迟报告文学所提到的陈景润及哥德巴赫猜想，进而不切实际地将哥德巴赫猜想当成了目标. 查阅资料后，明白了它的含意：偶数可表为两素数之和.

人们在素数复杂的分布中，通过长期努力均未能找到简单确定的规律，致使出现了孪生素数猜想、哥德巴赫猜想、黎曼猜测等世界难题.

作为数学爱好者，想在艰难的素数问题上有所作为，放弃主流数学使用的高深繁杂方法、放弃通往素数论前沿中漫长而又困苦的现成道路、放弃不必要的众多数学知识的学习，运用已有知识并将有限精力和时间投入到创新中，成了寻求捷径争取成功的一种选择，进而将缺少素数论知识的劣势，变成不受传统数学思想约束、轻装上阵的优势，凭借仅有知识寻求突破. 在思索约三个月后产生了第一个想法：将命题“偶数可表为两素数之和”变为“计算偶数表为两素数之和的表法个数”，如果证明了它大于1，那么哥德巴赫猜想就成立了. 顺着这个思路获得了平均值的表达式，借助素数定理得到了平均值的近似公式，经手工小范围计算获得的实际数据支持了这一理论结果. 将此法用在其他素数问题中所获得的结果，均得到了找到的实际数据或已有定理的支持. 分析后发现，只有概率论能对这些结果给出合理解释. 这一思想的产生，得益于笔者在西南交通大学学习过程中，所受到的良好的思维训练和老师经常反复传授的“要大胆向现在知识、现在书本挑战，从最熟视无睹的现象中寻找真理”；也许还得益于笔者所具有的物理思维背景 —— 从实际数据中寻找规律、从规律中寻找原因；也许还得益于非数学思维背景 —— 不受已有数学思想约束，……一个是解决随机问题的工具 —— 概率论，一个是具有确切分布规律的问题 —— 素数分布，如何调和这一对立并有悖传统数学思想的矛盾，最初的做法是简单并违背常理地把素数定义成“随机事件”. 为使这一新方法能在数学上站稳脚跟，并说服数学界认可它，使用它，发展它并服务于数学，多年后产生了一个折中方案：将素数出现的不规律性，看成与随机事件中在统计意义上的等价，并设定了素数公理，为素数论中全面引进概率论铺平道路. 随着微机的普及和性能的提高，笔者自己、或请热心网友编程、或请网友帮我在网上寻找并获得了更大范围的更多、更精确的数据，使实际数据证实理论值的精度不断提高、个数不断增加，促使笔者对本理论的公理基础 —— 素数是“随机事件”的信心成了我在前途不明的艰难探索中的原动力. 为强化概率论的功能，使它既能描述可能性，又能描述肯定性，为解决哥德巴赫猜想、黎曼（Riemann）假设等问题扫清障碍，笔者通过边界公理的设置，建立了边界. 将频率、概率、方差、概率分布密度

函数等概率论的方法引入素数论中，初步建立素数论分支——概率素数论，简称概素论．这一理论解决了若干涉及素数的问题．书中，给出了最大误差，即边界的计算方法，并计算出几个函数的边界，可同时将它应用在任何概率函数边界问题的计算中，故可用等号联结放大后的边界．

除完备素数问题外，书中大部分结果均涉及一个未能从理论上确定、其极限是常数的系数——同阶函数．虽可由实际数据估值，却使问题的完美解决尚存一步之遥．这是概率素数论的一个重要的努力方向．庆幸的是，由概率素数论获得的素数定理、哥德巴赫猜想分析解——哥数定理等问题，不受此困扰，并在分析的基础上解决了希尔伯特第八问题．为求得精确的哥数理论解，笔者曾较长时间地研究对数函数倒数的近似积分，无意间获得了 1/lnt 类一至三次幂函数的较精确的近似积分．在这个结果基础上，又经过多年努力，终于在最近获得了突破：建立了一个笔者命名为“熊氏积分”——针对 1/lnt 类函数的一个积分方法．这是一个含待定系数并用“优选法”确定其值的分步积分方法，是中国人在经典微积分理论上的一点贡献．

作为由一名数学爱好者草创的理论，它的逐渐完善需要大家共同努力．由于笔者能力所限，书中不当不足、笔误错误之处，恳请大家提出，大家共同改进．有些仍未彻底解决的问题，虽使用的方法思路不能保证最终能达到目的，若笔者认为对问题的最终解决可能有所帮助时，仍将这些不成熟的思想写入书中，希望有益于解决这些问题．有些比较明显成立的性质、结论、公式，并未提供严格的证明而直接列出，希望再版时能做得更好．

笔者可以认为《概率素数论》是一门实验数学，但还不能保证用目前的理论解决新的素数问题，因为它需要实际数据的检验．同时，作为科学研究，当理论不正确时，就需要对现有理论进行补充、修改和发展，直到正确为止．

书中提出的等几公理，其数学内涵需要深入挖掘．无简单分布规律的确定事件，为什么能与等几随机事件在统计意义上等价？如何判断在哪些情况下两者等价？笔者目前无力解决这些问题，只能用模糊的语言叙述其公理．

一个理论的出现或问题的解决，虽有一定的随机性，然而，相当多的情况是随机中存在着必然，这可能更多地表现在时间先后的不同上．关于这一点，是否可用概率思想进行理解：大量小概率事件（许多人攻克某问题的成功率）累计到足够多时，必发生指定事件——某个或几个人获得成功（书中将此现象发生的条件定义为边界）．这也是笔者提出的一个概率论问题：重对数定理给出了发生事件的上限，那么，发生事件的下限是多少？如勾股定理，就是在不同国家，不同时间，用相同或不同方法独立地得到解决，甚至还有几乎同时相互独立地用相同方法解决同一问题的巧合，如牛顿和莱布尼兹独立建立的微积分．

作者在探索过程中，得到了许多帮助、支持和启发．

感谢数学家华罗庚、陈景润等数学前辈的著作和成果.

感谢诗人徐迟的报告文学《哥德巴赫猜想》.

笔者感谢《概率素数论》在 1988 年 4 月申报国家自然科学基金时，内江师范学院数学系黄教授、杨荣先教授及笔者所在单位铁二局子弟学校张伏瑞副校长所给予的支持和帮助（虽未能得到国家批准）.

本书书写过程中用过免费排版软件：LaTaX 软件，感谢中文网站 CTEX 中，aloft 们的鼎力相助.

感谢网站“东陆论坛”为本书的一些结果提供了一个公之于众的交流平台，并得到了该论坛上，Crank，Junerr，Wtquan，火大不、申一言、天山草、刘守身等众网友的帮助、关心和支持. 是网友们的一些灵感、想法与问题，及帮我编程计算所获得的若干宝贵数据、在网上为我查找的资料数据、丰富并充实了本书，在此一并致谢.

感谢沈仁义、付佑举、刘亚丁、邓新民以及妻子钟克励等亲朋好友、老师、同学及家人的支持帮助.

2004 年，在熊一鸣的帮助下，用 CTEX 免费软件排版并在内江版权局用内部书号出版了本书摘要，在资中县科技局局长曹兵的帮助下，本书概要发表在 2004 年第六期《内江科技》上，借此致谢.

感谢母校西南交通大学和授课老师，是他们使笔者在求学过程中，学习、分析及解决问题的能力得到了显著提高，为本书的写作打下了基础.

感谢母校郭可詹教授、刘学峰教授、杨国忠教授，以及同学王祖源、陈景星等的支持与帮助.

母校理学院王黎院长等大力支持本书的出版，为笔者联系专家教授审稿，联系出版，借此致谢.

熊一兵

2002 年 10 月初稿于四川省资中县

2008 年 5 月

目　　录

第 1 章　理论基础 …… 1
1.1　概　念 …… 1
1.2　数学表达符的定义 …… 3
1.3　左侧符号 …… 5
1.4　一般问题的解 …… 10
1.5　素数分类 …… 11
1.6　等几公理 …… 12
1.7　素数率 …… 14
1.8　素数均分函数 …… 17
1.9　整数率 …… 21
1.10　概率论知识 …… 23
第 2 章　边　界 …… 25
2.1　边界概念 …… 25
2.2　重对数值域边界 …… 28
2.3　平均值定义域边界 …… 30
2.4　边界的应用 …… 37
2.5　比值边界 …… 43
2.6　边界原则 …… 44
第 3 章　自然数中的素数问题 …… 45
3.1　素数个数及大小 …… 45
3.2　自然数中的回文素数问题 …… 62
第 4 章　函数素数问题 …… 79
4.1　整数变量函数的素数问题 …… 79
4.2　整数变量指数函数的素数个数 …… 88

4.3 素数变量函数的求和问题 ······ 94
4.4 函数中的回文素数问题 ······ 101

第 5 章 熊氏积分 ······ 106

5.1 基本方法 ······ 106
5.2 $\int^x t_m \ln^{-S} t \mathrm{d}t$ 的熊氏积分 ······ 113
5.3 $U_k(t)$ 函数值 ······ 129
5.4 $\int^{0.5x} \mathrm{li}(t)\ln^{-S}(x-t)\mathrm{d}t$ 的近似积分值 ······ 140

第 6 章 哥德巴赫猜想 ······ 145

6.1 哥德巴赫方程 ······ 146
6.2 哥德巴赫“1 + u”问题 ······ 154
6.3 哥德巴赫数准确值 ······ 159
6.4 哥德巴赫数定理准确值 ······ 160
6.5 哥德巴赫数定理渐近解 ······ 163
6.6 哥德巴赫数的估值 ······ 165
6.7 哥德巴赫数渐近解 ······ 166
6.8 哥德巴赫数定理精确值 ······ 168
6.9 广义哥德巴赫方程 ······ 172

第 7 章 K 生素数问题 ······ 184

7.1 二生素数问题 ······ 184
7.2 二生素数定理的应用及推广 ······ 201
7.3 K 生素数 ······ 210
7.4 相邻 K 生素数问题 ······ 216
7.5 $\Pi_{i=1}^{u-1} K_{u-i}$ 生素数问题 ······ 248

第 8 章 熊一兵-哥德巴赫问题 ······ 258

8.1 熊一兵-哥德巴赫方程 ······ 258
8.2 熊一兵-哥德巴赫“1 + u”问题 ······ 262
8.3 熊一兵数准确值 ······ 263

8.4　熊一兵数定理准确值……264
8.5　熊一兵数定理渐近解……266
8.6　熊一兵数的估值……268
8.7　熊一兵数渐近解……268
8.8　广义熊一兵-哥德巴赫方程……275
第 9 章　若干条件素数问题……276
9.1　柯召素数问题……276
9.2　卡米歇尔数……279
9.3　亲和数……280
9.4　欧几里得素数定理……282
9.5　偶数表为两个素数之差……288
9.6　含 k 个因子的自然数个数……289
9.7　最小素数问题……290
9.8　连续自然数素数……292
9.9　超级素数……292
9.10　希尔伯特第八问题……295
第 10 章　自然数的性质……296
10.1　最多不同因子的个数……296
10.2　仅一个数码不同的素数……296
10.3　出现 t 种因子的概率……304
第 11 章　概率数码论……305
11.1　随机数……305
11.2　等几公理——数码子公理……305
11.3　数码串定理……305
11.4　随机数码素数定理……308
11.5　圆周率序列中的素数……310
第 12 章　新证已有定理……312
第 13 章　概率格点论……315
13.1　格点及格点线……315
13.2　格点公理……317
13.3　闭合线格点定理……319

13.4　反比曲线格点定理 ······ 323
13.5　圆内格点定理 —— 高斯格点问题 ······ 327
13.6　立体闭合曲面格点定理 ······ 329
13.7　*R* 维空间闭合曲面格点定理 ······ 329

第 14 章　其他问题 ······ 331

14.1　费马大定理的证明 ······ 331
14.2　层流能耗功率密度 ······ 332

附　录 ······ 335

参考文献 ······ 352

第 1 章 理论基础

1.1 概 念

1.1.1 概率确定论

概率论是 17 世纪，研究赌博这一随机事件（现象）过程中建立起来的，已广泛应用在各个领域的随机事件中. 应用概率论近似求解某些微分方程，是它在确定事件中的首次应用，不妨将此方法称为：概率方程论. 这里暂不讨论概率方程论. 本书中，将概率论用在另外三个确定事件中：① 素数的分布；② 数码的分布；③ 格点的分布，从而建立了《概率素数论》、《概率数码论》及《概率格点论》. 甚至可以沿着这一思路，将它应用在其他学科的确定事件中，如与模糊数学结合可以建立《概率模糊论》，如图 1.1 所示.

$$\text{概率论} \Rightarrow \begin{cases} \text{概率随机论} \\ \text{概率确定论} \\ \text{概率模糊论} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{概率素数论} \\ \text{概率数码论} \\ \text{概率格点论} \\ \text{概率方程论} \end{cases}$$

图 1.1

本书中，利用概率论研究目前在理论上不能准确计算的素数论问题. 概率素数论与概率论，虽研究的对象不同，但处理问题的方法思路却相似，即在公理支持下，将概率论中的量引入素数论. 为方便理解，定义了若干相似的名称. 在理论值的计算中，一般只进行连续函数的积分计算. 关于相应的离散函数的求和，可用积分近似代替. 书中，前面已证明过的定理、引理等常直接使用；求和值、积分上限或结果中变量的值是有限值时，一般要求它不小于足够大的常量，否则，可能给所得结果增加误差，后面一般不再叙述这个条件.

为叙述方便，重叙某些定义等已有知识.

定义 1 若随机事件 ξ 的分布函数为 $F(x)$，ξ 的平均值为 $E\xi$，ξ^2 的平均值为 $E\xi^2$，则

$$\left.\begin{aligned} E\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} x\,\mathrm{d}F(x) \\ E\xi^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2\,\mathrm{d}F(x) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

引理 1 若均方差为 $\sigma(x)$，则

$$\sigma^2(x) = E\xi^2 - (E\xi)^2 \tag{2}$$

证明

$$\sigma^2(x) = E(\xi - E\xi)^2 = E\left[\xi^2 - 2\xi E\xi + (E\xi)^2\right]$$

整理上式即可得本引理.

1.1.2 理论值与实际值

一般用小写字母开头的字符串代表实际值，如用 $\pi(x)$ 表示小于 x 的自然数中，素数的实际个数，它对应概率论中的频率.

一般用大写字母开头的字符串代表理论值，如用 $\Pi(x)$ 表示小于 x 的自然数中，素数的理论个数，它对应概率论中的最可几值.

约定：理论值用连续可积可微函数表达.

1.1.3 随机事件和确定事件的定义

事件可分为随机事件和确定事件两类，定义如下：

定义 2 对某一系列事件，在相同条件下重复任意次，每次所得结果完全相同，称它为确定事件；否则，称为随机事件.

素数分布、无理数的数码分布、格点分布等，都是确定事件；射击等文体比赛成绩、扑克游戏等都是随机事件.

1.1.4 Q 数及 Q 数定理

定义 3 将变量 t 或函数 $h(t)$ 满足涉及某素数条件 Q 数的实际值及理论值，称为变量 t 或函数 $h(t)$ 的 $q(t)$，$q(h(t))$，$Q(t)$，$Q(h(t))$ 数，将它们在条件 $t\leqslant x$ 下的求和值记为 $\pi(q(x))$，$\pi(q(h(x)))$，$\Pi(Q(x))$，$\Pi(Q(h(x)))$，这两组表达式，分别简称为 Q 数及 Q 数定理，则

$$\pi(q(x)) = \sum_{t \leqslant x} q(t) \quad (3)$$

$$\Pi(q(x)) = \int^{x} q(t)\,\mathrm{d}t \quad (4)$$

$$\pi(q(h(x))) = \sum_{t \leqslant x} q(h(t)) \quad (5)$$

$$\Pi(Q(h(x))) = \int^{x} Q(h(t))\,\mathrm{d}t \quad (6)$$

定义 3 将素数定理作了一般性推广，并可得到 Mersenne(2^p-1)素数定理 $\pi_M(x)$，$\Pi_M(x)$，费马 ($2^{2^n}+1$) 素数定理 $\pi_F(x)$，$\Pi_F(x)$，哥数定理 $\pi_G(x)$，$\Pi_G(x)$等.

1.1.5 Q 数及 Q 数定理的性质

一般地，t 的 Q 或 $Q(h(t))$ 数的值，不易精确描述，而当 Q 数定理 $\pi_Q(x)$，$\Pi_Q(x)$ 或 $\pi_Q(h(x))$，$\Pi_Q(h(x))$，在 x 值足够大时，可对 Q 数定理 $\pi_Q(x)$，$\pi_Q(h(x))$ 等的值进行精确描述．因为统计的样本值越多，其均值的相对波动就越小，相对精度就越高．

如 t 是否是素数不能确定，但对素数定理，书中已作了精确描述，从理论上讲可以确定理论值与实际值的相对误差，它与统计范围平方根的倒数相当，实际数据也支持这个结论．

虽然，在理论上不能确定实际值，但列出实际值后，常能帮助我们分析与它对应的理论值各个量之间的关系，故书中常并列地写出实际值与理论值的函数表达式．与概率论一样，概素论的任务，也是分析素数事件的各种理论值，并由此描述实际值的分布情况．这就是本书的任务．

1.2 数学表达符的定义

1.2.1 极值选择表达符

为简捷又方便地表达数学含意，下面更新或定义新的数学表达符．

定义 4　最大值选择表达符 $\max\{H_{r,J}\}_{r=a}^{r=b}$，表示 r 在定义域 (a, b) 内取值时，选择 $H_{r,J}$ 中的最大值．

定义 5　最小值选择表达符 $\min\{H_{r,J}\}_{J=a}^{J=b}$，表示 J 在定义域 (a, b) 内取值时，

选择 $H_{r,J}$ 中的最小值.

1.2.2 重复表达符

定义 6 将多次相同或相似的运算表达形式，用符号简单表示如下：

$$\left.\begin{aligned}
&\prod_{J=1}^{\bar{m}} H(J)[R]=\begin{cases}\prod_{J=1}^{\bar{m}} H(J)R=\overbrace{H(1)H(2)\cdots H(m)}^{m\text{ 个 }H(J)}R\\ \prod_{J=1}^{\bar{m}} H(J)=\overbrace{H(1)H(2)\cdots H(m)}^{m\text{ 个 }H(J)}\end{cases}\\
&\prod_{J=1}^{\bar{m}} H[R]=\overbrace{HH\cdots H}^{m\text{个}H}[R]=\begin{cases}\prod_{J=1}^{\bar{m}} H[R]=\overbrace{HH\cdots H}^{m\text{个}H}R\\ \prod_{J=1}^{\bar{m}} H=\overbrace{HH\cdots H}^{m\text{个}H}\end{cases}\\
&\prod_{J=0}^{\bar{1}}\prod_{K=1}^{\bar{J}} H[t]=tHt\\
&\prod_{J=0}^{\bar{2}}\prod_{K=1}^{\bar{J}} H[t]=tHtHHt\\
&\prod_{J=0}^{\bar{3}}\prod_{K=1}^{\bar{J}} H[t]=tHtHHtHHHt
\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

举例如下：

$$\prod_{J=1}^{\bar{0}}\ln[t]=t,\quad \prod_{J=1}^{\bar{1}}\ln[t]=\ln t,\quad \prod_{J=1}^{\bar{2}}\ln[t]=\ln\ln t,\quad \prod_{J=1}^{\bar{3}}\ln[t]=\ln\ln\ln t$$

$$\prod_{J=0}^{\bar{1}}\prod_{K=1}^{\bar{J}}\ln[t]=t\ln t,\quad \prod_{J=0}^{\bar{2}}\prod_{K=1}^{\bar{J}}\ln[t]=t\ln t\ln\ln t,\quad \prod_{J=0}^{\bar{3}}\prod_{K=1}^{\bar{J}}\ln[t]=t\ln t\ln\ln t\ln\ln\ln t$$

$$\left(\prod_{L=1}^{\bar{1}}\ln\left[{}^{1+\varepsilon}t\right]\right)\prod_{J=0}^{\overline{L-1}}\prod_{K=1}^{\bar{J}}\ln[t]=t\ln{}^{1+\varepsilon}t$$

$$\left(\prod_{L=1}^{\bar{2}}\ln\left[{}^{1+\varepsilon}t\right]\right)\prod_{J=0}^{\overline{L-1}}\prod_{K=1}^{\bar{J}}\ln[t]=t\ln t\ln\ln{}^{1+\varepsilon}t$$

$$\left(\prod_{L=1}^{\bar{3}}\ln\left[{}^{1+\varepsilon}t\right]\right)\prod_{J=0}^{\overline{L-1}}\prod_{K=1}^{\bar{J}}\ln[t]=t\ln t\ln\ln t\ln\ln\ln{}^{1+\varepsilon}t$$

$$\vdots$$

$$\prod_{J=1}^{\overline{S-1}}\int_{t_{J-1}}^{\frac{1}{\sqrt[k]{S+1-J}}}\mathrm{d}t_J=\int_{t_0}^{\frac{1}{\sqrt[k]{S}}}\mathrm{d}t_1\int_{t_1}^{\frac{1}{\sqrt[k]{S-1}}}\mathrm{d}t_2\cdots\int_{t_{S-3}}^{\frac{1}{\sqrt[k]{3}}}\mathrm{d}t_{S-2}\int_{t_{S-2}}^{\frac{1}{\sqrt[k]{2}}}\mathrm{d}t_{S-1}\quad(2\leqslant S)\tag{8}$$

此类符号称为重复运算表达符，简称重表符.

1.3　左侧符号

1.3.1　左下标 —— 函数名

定义 7　函数 ${}_{\psi}u(x)$ 中，左侧下标符号“ψ”是函数 $u(x)$ 的名称，称为函数名. 它用来特指函数簇 $u(x)$ 中某一指定函数. 可用任意符号作函数名.

现在的上下标，一般标注在字母或字符串的右边，如 a_1，$G_1(x)$. 为简捷地定义、表达、传递及丰富字符串的含意，本书增加了在字母或字符串的左边定义上下标的功能.

左下标定义函数名，既方便区别同名函数，又让右下标方便定义级数或多项式等，常用于下面将介绍的同阶函数和渐近函数等函数中.

左上标定义了两类量：

（1）边界表达符：在“边界”一章专门介绍.

（2）左上角函数：分别有上限函数、下限函数、同阶函数、渐近函数等.

1.3.2　上限函数${}^{\leqslant}1$及上限常数$\leqslant C$

若 $u(x)$ 的最大阶可表为 $U(x)$，则可用传统最大阶符号 $O(\,)$ 表达如下：

$$\left.\begin{aligned}|u(x)|&\leqslant CU(x)\\u(x)&=O(U(x))\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

下面定义一个与最大阶符号 $O(\,)$ 功能相似，但更简捷的上限函数符号${}^{\leqslant}1$.

定义 8　若函数 $u(x)$ 的最大阶不大于某已知函数 $U(x)$ 的阶，则称 $U(x)$ 是 $u(x)$ 的上限函数（supper function）；若 $u(x)$ 的值不能或不必确定正负时，记为 $\pm{}^{\leqslant}1U(x)$ 或 $\pm{}^{\leqslant}U(x)$，否则，记为 $+{}^{\leqslant}U(x)$ 或 $-{}^{\leqslant}U(x)$. 将符号${}^{\leqslant}1$或${}^{\leqslant}$，称为上限函

数，它的变量隐含在函数 $U(x)$ 中（下同），即

$$u(x)=\begin{cases}\pm^{\leqslant}U(x) \\ +^{\leqslant}U(x) \\ -^{\leqslant}U(x)\end{cases}\quad\begin{pmatrix}|u(x)|<U(x) \\ 0<u(x)<U(x) \\ -U(x)<u(x)<0\end{pmatrix}\tag{10}$$

上式中，若已知函数 $U(x)$，是一已知常数 C 时，将 $^{\leqslant}C$ 称为上限常数.

1.3.3 下限函数 $^{\geqslant}1$ 及下限常数 $^{\geqslant}C$

若 $u(x)$ 的最小阶可表为 $U(x)$，则可用传统最小阶符号 $o(\ )$ 表达如下：

$$\left.\begin{matrix}|u(x)|\geqslant CU(x) \\ u(x)=o(U(x))\end{matrix}\right\}\tag{11}$$

下面定义一个与最小阶符号 $o(\ )$ 功能相似，但更简捷的下限函数符号 $^{\geqslant}1$.

定义 9 若函数 $u(x)$ 的最小阶，不小于某已知函数 $U(x)$ 的阶，则称 $U(x)$ 是 $u(x)$ 的下限函数（lower function）. 若 $u(x)$ 的值不能或不必确定正负时，记为 $\pm^{\geqslant}U(x)$，否则，记为 $+^{\geqslant}U(x)$ 或 $-^{\geqslant}U(x)$. 将符号 $^{\geqslant}1$ 或 $^{\geqslant}$，称为下限函数，即

$$u(x)=\begin{cases}\pm^{\geqslant}U(x) \\ +^{\geqslant}U(x) \\ -^{\geqslant}U(x)\end{cases}\quad\begin{pmatrix}|u(x)|>U(x) \\ u(x)>U(x) \\ u(x)<-U(x)\end{pmatrix}\tag{12}$$

上式中，若已知函数 $U(x)$是一已知常数 C 时，将 $^{\geqslant}C$ 称为下限常数.

1.3.4 同阶函数 $^{\pm}1$

定义 10 若函数 $u(x)$ 与已知函数 $U(x)$ 之比的极限接近 1，即

$$\left|1-\lim_{x\to\infty}\frac{u(x)}{U(x)}\right|\ll 1\tag{13}$$

则将函数 $U(x)$ 称为 $u(x)$ 的同阶函数（same order functions），可用同阶函数符号 $^{\pm}1$，$^{\pm}_{\psi}1$等将两者表达如下：

$$u(x)={}^{\pm}U(x)={}^{\pm}_{\psi}U(x)=\frac{^{\pm}u(x_0)}{U(x_0)}U(x)\quad(1\ll x_0)\tag{14}$$

说明：（1）$u(x)={}^{\pm}U(x)$ 是粗略表达式，$u(x)={}^{\pm}U(x)\,u(x_0)\div U(x_0)$ 是较好表达式.

（2）左下标“ψ”是同阶函数的名称，可用任何字符作名称. 无名称的同