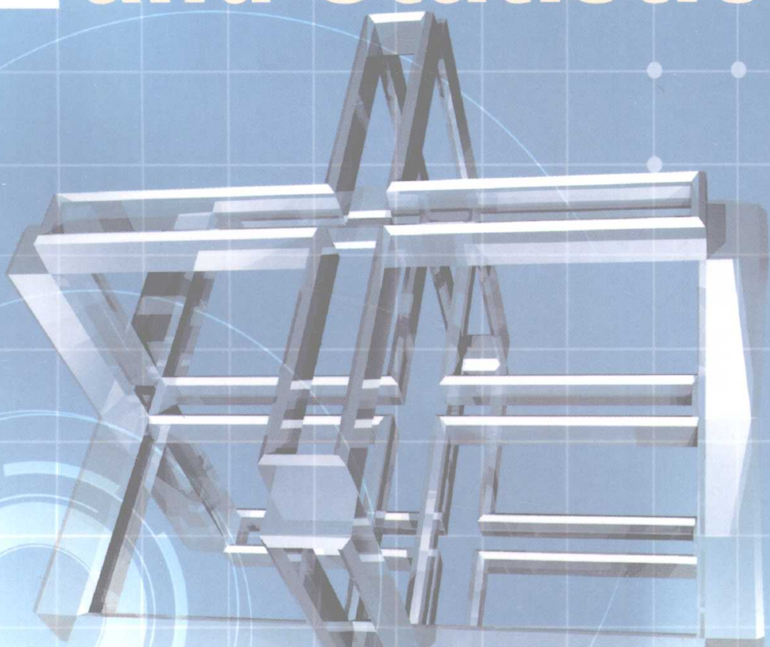
独立学院系列教材

概率论与数理统计

刘晓石　编著

Probability and Statistics



四川大学出版社

独立学院系列教材

概率论与数理统计

刘晓石　编著

四川大学出版社

责任编辑:廖庆扬
责任校对:段悟吾
封面设计:罗　光
责任印制:李　平

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计 / 刘晓石编. —成都：四川大学出版社，2008.12
ISBN 978-7-5614-4207-4

Ⅰ. 概…　Ⅱ. 刘…　Ⅲ. ①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材　Ⅳ. 021

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 192829 号

内 容 提 要

本书主要是针对一般大学本科生学习概率统计的需要而编写的，适用于大学本科理工、管理、经济等各类专业. 其特点是适当压缩概率论中较繁难的部分，注重对解决实际问题能力的培养，以及增加数理统计中的基本思想、推断方法等方面的描述，力争使读者在有限的学习时间内对概率统计这门课程有较全面的了解.

本书力求做到重点突出，难点分散，文字通顺，深入浅出. 每章末均附有相当数量且层次深浅适当的练习题，以供选用. 书后附有一系列的数值表及习题答案.

书名　概率论与数理统计

编　著　刘晓石
出　版　四川大学出版社
地　址　成都市一环路南一段 24 号 (610065)
发　行　四川大学出版社
书　号　ISBN 978-7-5614-4207-4
印　刷　郫县犀浦印刷厂
成品尺寸　185 mm×260 mm
印　张　13
字　数　309 千字
版　次　2009 年 1 月第 1 版
印　次　2009 年 1 月第 1 次印刷
印　数　0 001~4 000 册
定　价　23.00 元

◆读者邮购本书,请与本社发行科联系。电 话:85408408/85401670/85408023　邮政编码:610065
◆本社图书如有印装质量问题,请寄回出版社调换。
◆网址:www.scupress.com.cn

前　言

概率论与数理统计是高等学校大学生的一门必修的基础课程，它在自然科学及社会科学的各个方面有着极其广泛的应用. 本书是以教育部颁布的高等学校非数学专业类数学课程教学的基本要求为依据编写的，主要是作为高等学校本科理工、管理、经济等专业的概率统计课程教材，亦可作为工程技术人员的参考用书.

为加强学生数学素质的培养，本书在内容安排上作了以下处理：(1)尽力以实际例子引入概率统计的基本概念、基本方法，理论推导力求简明扼要；(2)每章后配以精心挑选的适量习题，以利于学生学习及基本运算能力的培养；(3)离散型及连续型随机变量分别单独列章讨论，便于初学者掌握；(4)尽力联系实际，注重提高学生运用概率统计方法解决实际问题的能力；(5)按照国家标准，采用规范的概率统计用语.

全书共分 9 章，内容包括：随机事件及概率，离散型随机变量，连续型随机变量，数字特征，大数定律与中心极限定理，抽样分布，参数估计，假设检验，回归分析与方差分析.

本书的编写得到谢勉中、周厚隆老师的大力支持及帮助，对此谨表衷心感谢.

限于编者的水平，书中难免有不妥之处，衷心欢迎读者批评指正.

编者

2008 年 12 月

目　　录

第 1 章 随机事件及概率

在自然界及人类的社会活动中，可以观察到各种现象. 这种现象大体上可以分为两种类型：一类是确定性现象，例如天体的运行，电荷的排斥与吸引，一定气压下液体的沸腾温度等等，只要在一定条件下进行观察或试验，其结果是确定的，是人们可以预知的. 另一类现象则是不确定性现象，人们在未作观察或试验之前，并不能预知其结果. 例如，向桌上抛一枚硬币，我们不能预知向上的是正面还是反面；随机地找一户家庭调查其收入情况，我们亦不能预知其收入是多少. 另一方面，对这些不确定性现象进行大量、重复的观察时，人们发现，其结果会出现某种"统计规律性"：重复抛一枚硬币多次，出现正、反两面的次数大致会各占一半；调查多户家庭，其收入会呈现"两头小，中间大"的状况，即处于中间状态的是大多数.

这种在每次试验中呈现不确定性，而在大量重复试验中又呈现某种统计规律性的现象叫随机现象. 概率统计就是研究随机现象并揭示其统计规律性的一个数学分支，它在自然科学及社会科学的诸多领域都有着广泛的应用.

1.1 随机事件及运算

1.1.1 随机试验

对随机现象进行研究时，人们通常要进行大量的观察、试验. 如果试验具有以下三个特点则称之为**随机试验**：

(1) 可以在相同条件下重复进行；

(2) 试验结果不止一个，且可以预知一切可能的结果的取值范围；

(3) 试验前不能确定会出现哪一个结果.

随机试验是一种含义较广的术语，它包括对随机现象进行观察、测量、记录或进行科学实验等，以后简称为试验. 下面是几个随机试验的例子.

例 1.1.1 掷一枚骰子，记录其点数.

例 1.1.2 记录某电话传呼台一小时内收到的呼叫数.

例 1.1.3 掷二枚硬币，记录正、反面出现的情况.

例 1.1.4 一天中任取一时刻，记录下当时的气温.

例 1.1.5 把一尺之棰任截成三段，记录各段长度.

1.1.2 样本空间及随机事件

既然随机试验的结果不止一个，且能知道一切可能的结果的取值范围，我们就可以把一切可能的结果用集合的形式写出，记为 Ω，称之为样本空间；组成样本空间的元素称为样本点，记为 ω. 对应于前面几个随机试验，可分别写出样本空间如下：

在例 1.1.1 中，$\Omega_1=\{1,2,3,4,5,6\}$.

在例 1.1.2 中，$\Omega_2=\{0,1,2,\cdots\}$.

在例 1.1.3 中，$\Omega_3=\{(-,-),(-,+),(+,-)(+,+)\}$，这里"$-$"表示出现反面，"$+$"表示出现正面，"$(-,-)$"表示第一枚硬币出现反面，第二枚也出现出反面，其余类似.

在例 1.1.4 中，设当天最低气温为 a℃，最高气温为 b℃，则 $\Omega_4=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 或 $\Omega_4=[a,b]$.

在例 1.1.5 中，$\Omega_5=\{(x,y,z)\mid x>0,y>0,z>0,\text{且}\ x+y+z=1\}$.

从上面这些例子可以看到，样本空间可以是有限集或无穷集；可以是一维点集或多维点集；可以是离散点集，亦可以是欧氏空间的某个区域. 有时候，为了数学处理方便，还可以把样本空间作适当扩大. 例如，例 1.1.4 中，可以取 $\Omega_4=(-273℃(\text{绝对零度}),+\infty)$，若有必要，甚至可以取成 $(-\infty,+\infty)$.

在实践中，人们常需要研究由样本空间中满足某些条件的样本点组成的集合，即关心满足某些条件的样本点在试验后是否会出现. 例如，在汛期，水文站关心的是江河水位是否达到或超过警戒水位；抽查产品时，检验人员关心的是产品某方面指标是否达到合格标准，等等. 我们称样本空间 Ω 中满足某些条件的样本点构成的子集为**随机事件**，简称**事件**. 通常用 $A,B,C,\cdots$ 表示. 若试验后的结果 $\omega\in A$，则称事件 A 发生，否则称 A 不发生. 只含有一个样本点 ω 的事件叫**基本事件**，记为 $\{\omega\}$.

样本空间 Ω 也是它自己的子集，因而也是事件，它叫**必然事件**；空集 $\varnothing$ 中不含 Ω 中任何元素，它叫**不可能事件**. 例如，在例 1.1.1 中，设 A 表示"掷一枚骰子，出现的点数 $\leqslant 6$"，则 $A=\Omega$，是必然事件；设 B 表示"出现 8 点"，则 B 是 Ω 中空子集，因而是不可能事件；设 C 表示"出现偶数点"，则 $C=\{2,4,6\}$，若实际掷出 2 点，我们便说事件 C 发生了；设 D 表示"掷出 2 点"，则 $D=\{2\}$ 是基本事件. 显然，一切事件均可分解为若干基本事件的并集，而基本事件则不可再分.

1.1.3　事件之间关系及运算

随机事件是一个集合，因此事件之间的关系及运算可以按集合论中的知识处理，但应根据"事件发生与否"，给出它们在概率论中的提法.

1. 事件的包含与相等

若事件 A 发生则导致事件 B 发生，即 A 中每个样本点都属于 B，则称 A 含于 B 或 B 包含 A，记为 $A\subset B$. 若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称 A 与 B **相等**，记为 $A=B$.

易知 $A\subset B$ 的等价说法是：若 B 不发生，则 A 必不发生. 对于任何事件，有 $\varnothing\subset A\subset\Omega$.

2. 事件的和(并)

设 A,B 为两事件，则事件"A 发生或者 B 发生"记为 $A\cup B$，称为 A 与 B 的**和(并)**事件. 它是由 A,B 中一切样本点共同组成的集合.

一般地，n 个集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$，可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的和事件记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$，它们都表示所列诸事件中至少有一个发生.

3. **事件的积(交)**

设 A,B 为两事件,则事件"A 与 B 都发生"记为 $A\cap B$ 或 AB,称为 A 与 B 的**积(交)事件**.它是由既属于 A 又属于 B 的样本点构成的集合.

一般地,n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 之积记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$;可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 之积记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$,它们都表示所列诸事件全都发生.

4. **事件的差**

设 A,B 为两事件,则事件"A 发生但 B 不发生"记为 $A-B$,称为 A 与 B **之差**,这是由属于 A 但不属于 B 的样本点组成的集合.

例如,参军体检中,设 A 表示"身高合格",B 表示"血压合格",则 $A-B$ 表示"身高合格但血压不合格".

5. **互斥(不相容)事件**

若事件 A 与 B 不能同时发生,即 $AB=\varnothing$,则称 A 与 B 为**互斥**事件或**不相容**事件,这时 A 与 B 没有公共的样本点.显然,不同的基本事件是互不相容的.

6. **互逆(对立)事件**

设 A,B 为两事件,若 $AB=\varnothing$ 且 $A\cup B=\Omega$,则称 A 与 B 为**互逆**事件或**对立**事件,这时 B 叫 A 的逆事件,记为 $\bar{A}$,即 A 不发生.显然,这时有 $B=\bar{A},A=\bar{B}$.于是易知,若 A,B 是任意两事件,则

$$A\bar{A}=\varnothing,A\cup\bar{A}=\Omega,A-B=A\bar{B},\bar{\bar{A}}=A.$$

例如,设 $\Omega=\{1,2,3,\cdots,10\},A=\{1,3,5,7,9\},B=\{2,4,6,8,10\},C=\{2,4,6\}$,则 A 与 B 互逆,A 与 C 互斥,且易知 $B-C=B\bar{C}=\{8,10\}$.

为了直观,人们还常用图形法表示事件的运算.如果用平面上的矩形区域表示样本空间 Ω,用圆形区域表示事件 A,B,则它们之间的关系及运算可表示如图 1.1.

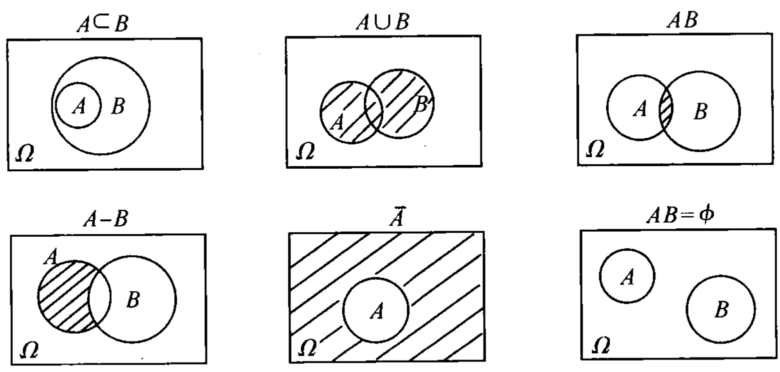


图 1.1

和集合论中运算一致,事件间的运算有以下性质:

(1) 交换律　$A\cup B=B\cup A,AB=BA$.

(2) 结合律　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$;

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

(3) 分配律 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

(4) 德·摩根(De Morgan) 律

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B},\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}.$$

对于任意多个事件,有

$$\overline{\bigcup_i A_i}=\bigcap_i\overline{A_i},\ \overline{\bigcap_i A_i}=\bigcup_i\overline{A_i}.$$

De Morgan律在这里的意义是很明显的. 例如,$\overline{A\cup B}$表示"事件A与B至少一个发生是不可能的",而$\overline{A}\,\overline{B}$表示"事件$A$与$B$都不发生",两者显然等价. 其余等式的含义请读者自行给出.(见习题1第2题)

例 1.1.6 某灯泡厂取样检查出厂灯泡的寿命,设A表示"灯泡寿命大于1500小时",B表示"灯泡寿命在1000到2000小时之间",请用集合形式写出下列事件:$\Omega,A,B,A\cup B,AB,A-B,B-A$.

解 $\Omega=[0,+\infty),A=\{x\mid x>1500\}=(1500,+\infty)$,

$B=\{x\mid 1000\leqslant x\leqslant 2000\}=[1000,2000],A\cup B=[1000,+\infty)$,

$AB=(1500,2000],A-B=(2000,+\infty)$,

$B-A=[1000,1500]$.

例 1.1.7 甲、乙、丙三人各向靶子射击一次,设A_i表示"第i人击中靶子",$i=1,2,3$. 试用事件的运算关系表示下列事件:(1) 仅有乙未击中靶;(2) 甲、乙至少一人击中而丙未击中靶子;(3) 至少两人击中靶;(4) 靶上仅中一弹.

解 (1) 仅有乙未击中靶:$A_1\overline{A}_2A_3$;

(2) 甲、乙至少一人击中,而丙未击中靶:$(A_1\cup A_2)\overline{A}_3$;

(3) 至少两人击中靶:$A_1A_2\cup A_2A_3\cup A_1A_3$;

(4) 靶上仅中一弹:$A_1\overline{A}_2\,\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$.

1.2 频率与概率

1.2.1 频率及其性质

一个随机试验有多个可能的结果,但人们在实践中常常发现,各种可能的结果出现的机会并不尽相同. 就是说,在多次重复试验中,有些结果出现的次数明显要多些,有些则要少些,它们具有统计规律性. 例如,我国人口中具有O型血的人数明显地高于其他血型. 为了揭示这种规律性,下面给出一个定量的描述.

定义 1.2.1 在n次重复试验中,若事件A发生了k次,则称k为事件A发生的**频数**,称$\frac{k}{n}$为事件A发生的**频率**,记为$f_n(A)=\frac{k}{n}$.

由这个定义,易知频率具有以下性质:

(1)$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$;

(2)$f_n(\Omega)=1$;

(3) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_r$ 为 r 个两两不相容事件,则

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^{r} A_i\right) = \sum_{i=1}^{r} f_n(A_i).$$

这最后一条性质叫频率的有限可加性,它在定义概率时起了重要作用. 我们在这里仅就这一条性质给出一个简单证明:

设两事件 A, B 不相容,又设在 n 次试验中,$A, B, A \cup B$ 发生的频数分别为 n_A, n_B, $n_{A\cup B}$. 由于 A 与 B 不能同时发生,故有 $n_{A\cup B} = n_A + n_B$,从而

$$f_n(A \cup B) = \frac{n_{A\cup B}}{n} = \frac{n_A + n_B}{n} = \frac{n_A}{n} + \frac{n_B}{n} = f_n(A) + f_n(B).$$

频率的大小反映了事件 A 发生的频繁程度. 频率越大则意味着事件在试验中发生的可能性就越大. 但是,用频率来表示一个事件发生的可能性的大小却是行不通的. 这是因为频率具有波动性,即使在相同条件下重复做多个 n 次试验,其频率值亦可能大不相同. 但是,人们在实践中发现,随着试验次数 n 的逐渐增加,事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 一般会逐渐稳定在一个常数 p 附近,n 越大,摆动的幅度会越小. 请看下面"抛硬币"试验的实例,见表 1.1.

表 1.1　抛硬币试验

实验者	投掷次数 n	出现正面次数 k	频率 $f_n(A)$
德·摩根	2048	1061	0.5181
蒲丰	4040	2048	0.5069
K. 皮尔逊	12000	6019	0.5016
K. 皮尔逊	24000	12012	0.5005
维尼	30000	14994	0.4998

该实验表明,尽管频率随试验次数的不同而改变,但当次数 n 越来越大时,它就越趋稳定于 0.5 这个常数附近. 这种在多次重复试验中出现的频率稳定性,通常称之为随机事件的统计规律性,它就是概率这一概念的经验基础. 我们称这个频率稳定值为随机事件 A 发生的概率,记为 $P(A)$.

事件的频率稳定性是一个客观存在,它不断地为人们的实践所证实. 例如,多年医学研究表明,初生婴儿性别的数量比约为男:女 = 1.06:1;我国人群中各血型人数比约为 O:A:B = 36.5%:27.5%:32.3%(见上海医科大学《实用内科学》编辑委员会,《实用内科学》(第 8 版),人民卫生出版社,1988 年). 又如,统计表明,汉语文献中,99% 左右的用字出自于 3000 余个常用汉字,而其他汉字的使用频率约占 1%. 英语也有类似情况,字母 E,T,A 出现的频率要明显高于其他字母. 因此,在实际生活中,人们常用统计频率作为概率的近似值.

1.2.2　概率的公理化定义及基本性质

上面我们用频率的稳定值来定义概率. 但在实际问题中,有时不可能做大量重复试验,而且,一切事件的频率稳定值各等于多少,也是无法一一加以检验的. 因此,为了理论分析及实际计算的需要,我们从频率的三条性质出发,将其略加改造,总结出三条公理,用以定义概率,这就是概率的公理化定义.

定义 1.2.2　设 Ω 为一个随机试验的样本空间,对 Ω 中任一事件 A,规定一个实数 $P(A)$. 如果这样的集函数 P 满足以下三个条件,则称 $P(A)$ 为事件 A 发生的概率:

(1) 非负性:$P(A) \geqslant 0$;

(2) 规范性:$P(\Omega) = 1$;

(3) 可列可加性:设 $A_1, A_2, \cdots$ 是可列个两两不相容事件,则

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k). \tag{1.2.1}$$

由概率的上述三条公理,可以推出概率的一些基本性质如下:

(1)$P(\varnothing) = 0$.

证明 由于 $\varnothing = \varnothing \cup \varnothing \cup \cdots$,由(1.2.1)式得

$$P(\varnothing) = P(\varnothing) + P(\varnothing) + \cdots,$$

而 $P(\varnothing) \geqslant 0$,故必有 $P(\varnothing) = 0$.

(2) 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为有限个两两不相容事件,则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \tag{1.2.2}$$

这一条叫概率的有限可加性.

证明 令 $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \varnothing$,由(1.2.1)式有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

(3)$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. (1.2.3)

证明 因为 $A \cup \bar{A} = \Omega, A\bar{A} = \varnothing$,由(1.2.2)式得

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}),$$

即得

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

(4) 若 $B \subset A$,则 $P(A - B) = P(A) - P(B)$,且有 $P(A) \geqslant P(B)$. (1.2.4)

证明 因为 $A = B \cup (A - B)$ 且 $B(A - B) = \varnothing$,由(1.2.2)式得

$$P(A) = P(B) + P(A - B),$$

从而

$$P(A - B) = P(A) - P(B).$$

又因为 $P(A - B) \geqslant 0$,故得 $P(A) \geqslant P(B)$.

推论 设 A, B 为任意两事件,则 $P(A - B) = P(A) - P(AB)$.

证明 由于 $AB \subset A$,

故

$$P(A - B) = P(A - AB) = P(A) - P(AB).$$

(5) 对于任意事件 A,有 $P(A) \leqslant 1$.

证明 由 $A \subset \Omega$ 及(1.2.4)式知 $P(A) \leqslant P(\Omega) = 1$.

(6) 设 A, B 是任两个事件,则

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB). \tag{1.2.5}$$

证明 易知 $A \cup B = A \cup (B - AB)$,且 $A(B - AB) = \varnothing, AB \subset B$,由(1.2.2)及(1.2.4)式得

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - AB) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

这个式子可以推广到更多事件上去,例如我们可以得出以下推论.

推论 设 A, B, C 为任意三个事件,则

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB)$$

$$-P(BC)-P(AC)+P(ABC). \tag{1.2.6}$$

证明　左端 $=P(A\cup(B\cup C))=P(A)+P(B\cup C)-P(A(B\cup C))$

$$=P(A)+P(B\cup C)-P(AB\cup AC)$$

$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(BC)-P(AB)-P(AC)+P(ABC).$$

例 1.2.1　设 A,B 为两事件,已知 $P(A)=0.8,P(B)=0.7,P(B-A)=0.3$,求 $P(A\bar{B})$.

解　由于 $0.3=P(B-A)=P(B)-P(AB)$,故

$$P(AB)=P(B)-0.3=0.4,$$

于是

$$P(A\bar{B})=P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.8-0.4=0.4.$$

例 1.2.2　已知 $P(AB)=0.5,P(C)=0.2,P(AB\bar{C})=0.4$,求 $P(\overline{AB\cup\bar{C}})$.

解　$P(\overline{AB\cup\bar{C}})=1-P(AB\cup\bar{C})$

$$=1-[P(AB)+P(\bar{C})-P(AB\bar{C})]$$

$$=1-(0.5+0.8-0.4)=0.1.$$

1.3　等可能概型

等可能概型是指在一次试验中,样本空间的每个样本点被取到的可能性相等的随机试验类型,这是一种最简单的概率类型.

1.3.1　古典概型

在概率论的发展史上,人们最早研究的随机试验是"抛硬币、掷骰子"之类问题的概率计算.这些试验的共同特点是:

(i) 试验全部可能的结果是有限个,即样本空间是一个有限集;

(ii) 每次试验中,各样本点出现的可能性相同,即每个基本事件发生的概率相等.

我们称具有以上两个特点的随机试验所对应的概率模型为古典概型.例如,掷一枚均匀的骰子,每一面出现的概率都是$\frac{1}{6}$;一袋中装有 n 个大小相同的小球,从中任取一球,则每个球被取到的概率都是$\frac{1}{n}$.

定理 1.3.1　在古典概型中,设样本空间 Ω 有 n 个样本点,A 是 Ω 中事件,且 A 中有 k 个样本点,则事件 A 发生的概率为

$$P(A)=\frac{k}{n}. \tag{1.3.1}$$

证明　设 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$,由题设知

$$P(\{\omega_1\})=P(\{\omega_2\})=\cdots=P(\{\omega_n\}).$$

由于各基本事件是两两互斥的,于是有

$$1=P(\Omega)=P(\bigcup_{i=1}^{n}\{\omega_i\})=\sum_{i=1}^{n}P(\{\omega_i\})=nP(\{\omega_i\}),$$

即得
$$P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n},\ i = 1,2,\cdots,n.$$

由于事件 A 中有 k 个样本点，不妨记 $A = \{\omega_{i_1},\omega_{i_2},\cdots,\omega_{i_k}\}$，则
$$P(A) = \sum_{j=1}^{k} P(\{\omega_{i_j}\}) = \frac{k}{n}.$$

例 1.3.1　把一枚质地均匀的骰子抛掷两次，设 A 表示"点数和等于 10"，B 表示"第一次出现奇数点"，求 $P(A)$，$P(B)$.

解　试验的样本空间 $\Omega = \{(1,1),(1,2),\cdots,(6,6)\}$，共 $6 \times 6 = 36$ 个样本点，且每个样本点出现是等可能的. 又由题设，知
$$A = \{(4,6),(5,5),(6,4)\},$$
即 A 中有三个样本点.
$$B = \{(1,1),(3,1),\cdots,(5,6)\},$$
即 B 中共 $3 \times 6 = 18$ 个样本点，从而
$$P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12},\quad P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}.$$

在求 $P(A)$ 时，如果样本空间取 $\Omega^* = \{2,3,4,\cdots,12\}$，即一切两次点数之和，则不能用古典概型公式计算了，因为各样本点的出现不是等可能的. 所以，在计算这一类概率时，如何正确确定样本空间是重要的.

在计算古典概率时，所使用的基本工具是排列组合计算法，所使用的基本模型是"摸球"模型. 以下我们分别举例说明.

1. 样本空间点数以排列计算

设一袋中有 n 个编好号码的小球，从中抽取 r 次，每次一球. 抽取方法分两种：

(1) 有放回抽取，即每次取出一球记下号码后放回袋中，混合后再进行下次抽取. 这时样本点总数为 n^r 个.

(2) 不放回抽取，即每次取出一球后不再放回又抽取下一球. 这时样本点总数为
$$A_n^r = n(n-1)\cdots(n-r+1).$$

显然，前一种抽取时，r 可以大于 n；而后一种抽取时有 $r \leqslant n$.

例 1.3.2　某市的电话号码是 7 位数，某人忘记了他朋友的电话号码的后四位，于是随便拨号. 求他拨一次号就拨通电话的概率.

解　这显然是一种有放回抽样. 由于此人记得前三位数，所以只考虑后四位数. 每位数有 10 种取法，故样本点总数记为 10^4，设 A 表示"拨到正确号码"，则 A 中只有一个样本点. 于是
$$P(A) = \frac{1}{10^4} = 0.0001.$$

这个事件的概率很小，我们称之为"小概率事件". 实践表明，小概率事件在一次试验中是几乎不可能发生的.

例 1.3.3　一袋中有 7 个白球和 5 个红球，从中摸取两次，每次一球. 设 A 表示"两次都取到红球"，B 表示"至少一次取到红球". 请在(1) 有放回抽样，(2) 不放回抽样条件下求 $P(A)$，$P(B)$.

解　显然袋中有 12 个球.

(1) 有放回抽样时,样本点总数为 $n=12\times 12$,A 中样本点数为 $k=5\times 5$,于是

$$P(A)=\frac{5\times 5}{12\times 12}=0.1736.$$

又设 C 表示"恰有一次取到红球",则 $B=A\cup C$,且 A 与 C 不相容,而 C 中样本点数为 $2\times(5\times 7)$ 个,从而

$$P(B)=P(A)+P(C)=\frac{5\times 5+2\times(5\times 7)}{12\times 12}=0.6597.$$

显然 $\overline{B}$ 表示"两次都取得白球",故下面的计算更简单:

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{7\times 7}{12\times 12}=0.6597.$$

(2) 不放回抽样时,样本点总数为 $A_{12}^2=12\times 11$,A 中样本点数为 5×4,故

$$P(A)=\frac{5\times 4}{12\times 11}=0.1515,$$

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{7\times 6}{12\times 11}=0.6818.$$

例 1.3.4　从 $0,1,\cdots,7$ 共八个数中任取四个,随机地排成一个四位数,问它正好是一个偶数的概率是多少?

解　由于零不能放在第一位上,故样本点总数为

$$A_8^4-A_7^3=1470;$$

又设 A 为所求事件,则易知 A 中点数为

$$A_7^3+3\times 6\times 6\times 5=750$$

(零作尾共 A_7^3 个,2,4,6 作尾,零不作头有 $3\times 6\times 6\times 5$ 个). 故

$$P(A)=\frac{750}{1470}=0.5102.$$

2. 样本空间点数以组合计算

一袋中装有 N 个小球,其中 m 个红球,余下为白球. 从袋中任取出 $n(n\leqslant N)$ 个小球,问恰有 $k(k\leqslant m)$ 个红球的概率是多少?

这个模型不要求摸球的顺序,故用组合式计算. 所有可能的取法共有 C_N^n 种,设变量 X 表示"取得 n 个球中红球的数量",则对应的事件可表为"$X=k$",其概率为

$$P(X=k)=\frac{C_m^k C_{N-m}^{n-k}}{C_N^n}. \tag{1.3.2}$$

X 取值的概率情况称为超几何分布. 显然,X 可能的取值为 $0,1,\cdots,m$.

例 1.3.5　一只箱中共装有 100 件某产品,其中有 8 件次品,余下为正品. 今从中任取出 5 件,求:(1) 至多一件次品的概率;(2) 至少两件次品的概率.

解　设 X 表示取得的次品数量,A,B 分别表示(1),(2) 所述的事件,则

$$P(A)=P(X=0\text{ 或 }X=1)=\frac{C_8^0C_{92}^5+C_8^1C_{92}^4}{C_{100}^5}=0.95,$$

又显然 $B=\overline{A}$,故

$$P(B)=1-P(A)=0.05.$$

例 1.3.6　桥牌比赛中,四人从 52 张牌中各分得 13 张,求四张 A 集中在一人手中的概率.

解 把52张牌平均分成四组,易知样本点总数为$C_{52}^{13}C_{39}^{13}C_{26}^{13}C_{13}^{13}$. 又设$B$为所求事件,要$B$发生,可考虑从四人中任选出一人拿4张A再配上9张其他牌,然后把其余39张牌平均分成三组. 从而得到

$$P(B)=\frac{C_4^1C_4^4C_{48}^9C_{39}^{13}C_{26}^{13}C_{13}^{13}}{C_{52}^{13}C_{39}^{13}C_{26}^{13}C_{13}^{13}}=\frac{4C_{48}^9}{C_{52}^{13}}=0.0106.$$

亦可以这样考虑:4张A集中在特定一人手中的概率为$C_4^4\cdot\frac{C_{48}^9}{C_{52}^{13}}$,从而4张A集中在一人手中的概率为

$$P(B)=4C_4^4\frac{C_{48}^9}{C_{52}^{13}}=0.0106.$$

1.3.2 几何概率

在概率论的发展初期,人们就认识到,仅假定样本空间为有限集是不够的,有时需要处理有无穷多个样本点的情形. 我们先看下面两个例子.

例 1.3.7 用计算机在[0,1]区间上任打出一个随机数x,求x小于$\frac{1}{3}$的概率.

例 1.3.8 随机地在单位圆内任掷一点M,求M点到原点距离小于$\frac{1}{2}$的概率.

以上两个例子都具有"等可能性"的性质. 在前一例中,我们认为随机数x在[0,1]上任何一处出现的机会均等,其概率应只与区间$\left[0,\frac{1}{3}\right]$的长度有关,应该等于$\frac{1}{3}$;后一例中,我们亦认为单位圆中每一点被掷到的机会均等,只要M点落入以原点为圆心,以$\frac{1}{2}$为半径的小圆内,对应的事件就会发生,其概率应该为小圆面积与大圆面积之比,即为$\frac{1}{4}$.

联系于这些随机试验的样本空间Ω,都是欧氏空间的一个区域,其样本点具有"均匀分布"的性质(此处我们暂不作精确的数学定义). 设区域$A\subset\Omega$,如果样本点落入A中,我们就说事件A发生了. 这样可作以下定义.

定义 1.3.1 设Ω为欧氏空间的一个区域,以$m(\Omega)$表示Ω的度量(一维为长度,二维为面积,三维为体积等). $A\subset\Omega$是Ω中一个可以度量的子集,定义

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}\tag{1.3.3}$$

为事件A发生的概率,这一概率称为**几何概率**.

例 1.3.9 设电台每到整点均报时,一人早上醒来后打开收音机,求他等待时间不超过10分钟就能听到电台报时的概率.

解 显然样本空间$\Omega=[0,60]$(单位:分钟). 设A表示"等待时间不超过10分钟",则$A=[50,60]$. 从而

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}=\frac{10}{60}=\frac{1}{6}.$$

例 1.3.10 某货运码头仅能容一船卸货,而甲、乙两船在码头卸货时间分别为1小时和2小时. 设甲、乙两船在24小时内随时可能到达,求它们中任何一船都不需要等待码头空出的概率.

解　设 x,y 分别为甲、乙两船的到达时刻，则 (x,y) 为一个样本点，从而样本空间

$$\Omega=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 24,0\leqslant y\leqslant 24\}\quad(\text{单位:小时}).$$

又设 A 为所求事件，则易知

$$A=\{(x,y)\in\Omega\mid x-y>2\text{ 或 }y-x>1\},$$

如图 1.2 中阴影部分所示. 于是

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}=\frac{\frac{1}{2}\times 23^2+\frac{1}{2}\times 22^2}{24\times 24}=0.8793.$$

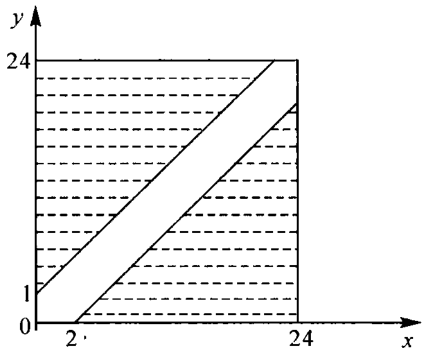


图 1.2

例 1.3.11　从区间 $[0,1]$ 中任取三个随机数，求三数和不大于 1 的概率.

解　设 x,y,z 分别表此三数，则易知样本空间

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant z\leqslant 1\}.$$

这是三维空间中一个棱长为 1 的正方体. 设 A 表示"三数和不大于 1"，则有

$$A=\{(x,y,z)\in\Omega\mid x+y+z\leqslant 1\}.$$

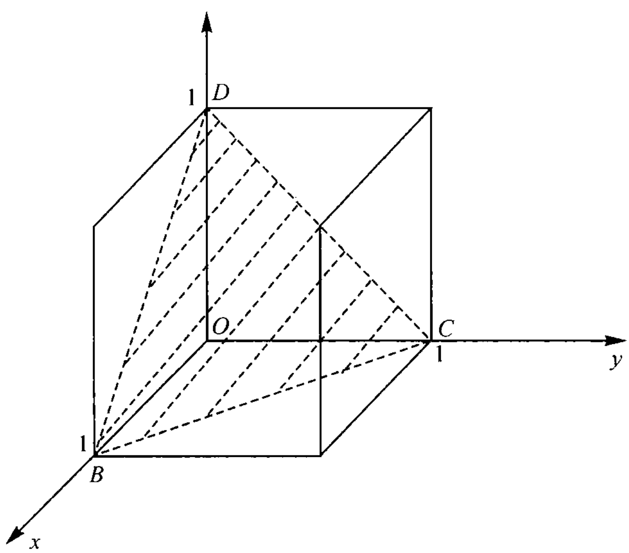


图 1.3

A 中样本点组成如图 1.3 中锥体 $O-BCD$，于是有