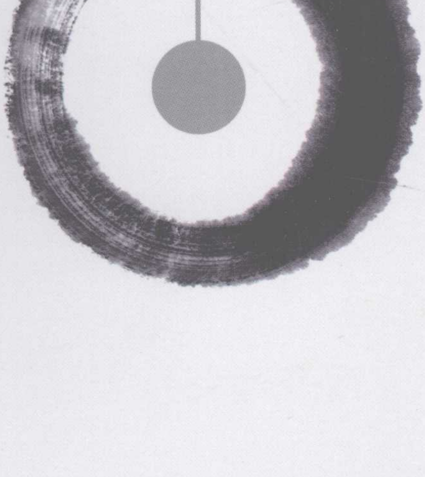
多值逻辑的方法和理论

——非正规多值逻辑研究

霍书全 著



科学出版社
www.sciencep.com

教育部人文社会科学重点研究基地
中山大学逻辑与认知研究所资助

多值逻辑的方法和理论

——非正规多值逻辑研究

霍书全 著

科 学 出 版 社

北 京

图书在版编目（CIP）数据

多值逻辑的方法和理论：非正规多值逻辑研究/霍书全著. —北京：科学出版社，2009

ISBN 978-7-03-023247-2

Ⅰ. 多… Ⅱ. 霍… Ⅲ. 多值逻值（数理逻辑）-研究 Ⅳ. O141.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 164827 号

责任编辑：侯俊琳 郭勇斌 卜 新 / 责任校对：赵桂芬

责任印制：赵德静 / 封面设计：无极书装

编辑部电话：010-64035853

E-mail：houjunlin@mail.sciencep.com

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009 年 4 月第 一 版 开本：B5（720×1000）

2009 年 4 月第一次印刷 印张：11 1/4

印数：1—2 500 字数：178 000

定价：32.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

在现代逻辑产生以前，逻辑学以非形式化的方式出现，即逻辑学是用自然语言来表达的。在现代逻辑产生以后，逻辑学走向了形式化、数学化的道路，人们把逻辑规律用数学符号表示。于是，传统逻辑中原有的各种思想都逐渐采用形式化的方式来处理，这就产生了各种各样的逻辑分支。在逻辑学中，较为基础的部分称为经典逻辑，包括命题逻辑和一阶谓词逻辑。其他逻辑分支一般称为非经典逻辑，而多值逻辑就是非经典逻辑的重要一支。多值逻辑的思想来源是多方面的，与未来偶然命题、模态命题、逻辑悖论、概率等都有关系。与经典逻辑的不同在于，多值逻辑认为命题的真值不仅仅只有真假两种情况，“真”的程度可以是多种多样的。多值逻辑的这些思想有客观的认识基础，弥补了经典逻辑的不足，从而不断受到重视。

历史上很多人提出了自己的多值逻辑思想，本书将对这些思想给以简单总结。现代逻辑研究不仅仅是提出一种逻辑思想，更主要是从技术上开展研究，即建立逻辑系统，研究逻辑系统的性质、代数语义、与其他逻辑的关系等。本书将从这些方面对一类非正规多值逻辑进行处理。

现代多值逻辑产生于20世纪20年代早期，首先由波兰人 Jan Lukasiewicz 和美国人 Emil L. Post 分别提出，后来逐渐成为研究的热点。迄今为止，对多值逻辑的许多问题都有很好的研究，得出了一些重要成果。要构建一个逻辑可以建 Hilbert 系统，J. B. Rosser 和 A. R. Turquette 1952 年的专著 Many-valued logics 是一本经典之作。Grzegorz Malinowski 的专著 Many-valued logics（Clarendon Press，1993）对多值逻辑的研究成果做了一个全面的介绍。S. Gottwald 的专著 A treatise on many-valued logics（Research Studies Press Ltd.，2001）对现代多值逻辑的研究成果进行了较全面的汇总。Leonard Bolc 和 Piotr Borowik 的著作 Many-valued logics（1，2）（Berlin，Heidelberg：Springer-Verlag，1992，2003）包含了与多值逻辑有关的概率推理和模糊逻辑的成果以及多值逻辑在计算复杂性方面的成果。从代数的角度研究逻辑是现代逻辑的一个主要方面，这也是多值逻辑中很有活力的部分，有丰富的成果。V. Boicescu、A. Filipoiu、G. Georgescu 和 S. Rudeanu 的著作 Lukasiewicz-Moisil algebras（North-Holrznd Inc.，1991）对与 Lukasiewicz 有穷逻辑密切相关的 Lukasiewicz-Moisil 代数、Heyting 代数和 Post 代数等形态做了深入的研究。Roberto L. O. Cignoli、Itala M. L. D'Ottaviano 和 Daniele Mundici 的 Algebraic foundations of many-valued reasoning（Dordrecht：Kluwer Academic Publishers，2000）对 C. C. Chang 提出的 MV 代数进行了深入的研究，收集了前沿的研究成果。多值逻辑的函数完备性理论是一个专门的研究课题，我国学者罗铸楷做出过突出贡献，专著《多值逻辑的理论及应用》（罗铸楷，胡谋，陈廷槐，科学出版社，1992）系统介绍了这个理论。现在，对多值逻辑与其他逻辑的融合、多值逻辑在计算机科学中的应用以及多值逻辑的代数理论都有很多研究。可以看出，多值逻辑已经是一个很广泛的研究领域。

本书包括 4 章，内容如下：

第 1 章是导论，介绍了多值逻辑的思想来源和早期多值逻辑研究的一些成果，对鞠实儿提出的一种非正规多值逻辑给以介绍。

第 2 章对多值逻辑联结词及其判定问题给出了论述。对正规的和非正规的多值逻辑联结词给予介绍，对多值逻辑的函数完备性理论给出了介绍，并给出了具体的分析。

第 3 章为一类非正规的多值逻辑建立了 Hilbert 系统，并研究了系统的元逻辑性质。该逻辑系统可以把鞠实儿的逻辑作为一种子系统来处理。该证明方法也为其他逻辑系统的构建提供了一个一般性的方法。

第 4 章从代数的角度对多值逻辑进行研究。回顾了多值逻辑代数研究的成果，为建立逻辑系统 L^* 构建一种代数形态。最后，对代数逻辑的现代研究方法及其成果给予介绍，这是研究多值逻辑代数的工具和方法。

开展对非正规多值逻辑的研究是鞠实儿教授为研究生确定的研究方向之一，而我本人的主要研究方向是多值逻辑，自然得到了他的指导。应该说对多值逻辑的研究是比较困难的：一是因为当今对多值逻辑做纯数学的研究较多，需要做许多艰难的工作；二是因为很多人认为多值逻辑缺乏直观的语义解释，对其持一种排斥的态度。但是，在国外，多值逻辑研究已有很大进展，在电路设计、错误诊断、容错推理、概率推理、模糊逻辑、密码学、人工智能以及人文社会科学等方面都有应用，这是研究多值逻辑的意义所在。在鞠实儿教授的鼓励下，我坚持了对多值逻辑的研究。可以说，没有他的鼓励和敦促，这种研究是难以坚持的。

本书的内容是我在中山大学逻辑与认知研究所做博士后期间的研究项目和一部分工作。鞠实儿教授审阅了书稿，并提供了不少内容，在此表示感谢。同时，也感谢我的导师李娜教授，她的严格要求使我有所长进。

由于作者的水平有限，本书肯定会有错误和不妥之处，希望逻辑学界的同人不吝赐教。

霍书金

2008 年 6 月

目　　录

1 导　论

1.1　多值逻辑思想简史

探讨多值逻辑的来源要追溯到亚里士多德的逻辑思想。早在2000多年前，亚里士多德的早期著作《命题篇》提到下面一个推理：

如果：

(1)明天将有海战，或者明天将没有海战。

那么：

(2)或者陈述句“明天将有海战”是真的，而“明天将没有海战”是假的；或者陈述句“明天将有海战”是假的，而“明天将没有海战”是真的。

他说：“相反陈述句中的每一肯定陈述句和否定陈述句，并不必一个是真的，而另一个是假的。因为在只是可能存在而不是实际存在的情况下，那适用于实际存在的东西的规则并不是有效的。”这说明他看到了命题不一定都只取二值，未来偶然命题就是例外。但是，亚里士多德并没有很好地解决包含未来偶然命题的推理。我们看(2)和下面的(3)、(4)构成的推理：

(3)如果“明天将有海战”现在是真的，则就现在这个事实而言，明天必将有海战；同样，如果“明天将没有海战”现在是真的，则就现在这个事实而言，明天必将没有海战。

(4)明天要发生的事情不管我们怎样努力总之已经被决定了，所以一切考虑是无济于事的。

亚里士多德似乎承认从(2)和(3)推出(4),不接受(1)推出(2)。在这里亚里士多德倾向于否定二值原则而肯定排中律(威廉·涅尔,玛莎·涅尔,1995)。亚里士多德关于未来偶然命题的讨论引起了人们的争论。许多人认为未来偶然命题是既不真也不假,承认有真假之外的第三真值存在。但也有不少人只接受二值律(law of bivalence),否认第三真值存在。如古希腊伊壁鸠鲁学派拒绝二值律,而斯多葛学派是坚定的决定论者,只接受二值律。承认未来偶然命题有第三真值状态的思想成为最初多值逻辑产生的哲学基础。

到中世纪,在伊斯兰国家和说拉丁语的欧洲有很多逻辑学家对未来偶然命题的真值问题进行了大量的讨论。有一种观点将它们归为不确定命题。然而,他们的主张在伊斯兰世界和基督教信徒中没有得到认可,因为它会威胁到有神论的基本信条。事实上,如果未来偶然命题既不真又不假怎么有神的先知呢?

在 15 世纪,以 Peter de Rivo 为代表的真值非决定论者似乎与这两种观点都不同,他们的观点可以用下面两个命题说明:

(1)“明天将下雨”(4 月 12 日断定);

(2)“昨天下过雨”(4 月 14 日断定)。

这两个命题是否取不同的真值很难做出断定,因为两个命题(从不同的时间角度)都对同一个事实做出了同样的断定,即 4 月 13 号下雨。如果未来偶然命题是不确定的,那么命题(1)是不确定的,但命题(2)是确定的。按照神学目的论,两个命题都应是确定的,但我们人类却无法确定。这样一来,第三真值是否存在,是否可以确定,成为没有定论的哲学问题。尽管如此,在历史上关于未来偶然命题具有不确定真值的想法为 Lukasiewicz 创建三值逻辑提供了思想基础。

除了未来偶然命题,命题模态的概念也为建立多值逻辑提供了灵感。从亚里士多德开始,逻辑学家就不满足于把命题的真值简单地二分为真和假。在古代,逻辑学家就设想出了更精细的模态划分法,即如下所谓的 alethic(必然性)模态:

必然真

偶然真(事实上但不是必然的真)

偶然假

必然假

事实上,亚里士多德大量的逻辑论文都在致力于把这个命题模态理论系统化。

这些非二分的真值在事实真和事实假之间开辟了一个非决定和偶然的领域,正如1966 年 Nicholas Rescher 指出的:在这些真值的基础上建立逻辑系统的想法为多值逻辑的产生提供了重要的动力。

现代逻辑产生前夕,多值逻辑曾以非形式化的方式出现。其主要创建人是19 世纪中后期的美国人 Charles Sanders Peirce 和俄罗斯人 Nikolai A. Vasil'ev (Rescher,1969,1 ~ 16)。

Peirce 从几个方面入手建立多值逻辑。首先,针对传统的亚里士多德未来偶然问题,他提出了构建中性真值的思想。1902 年,他在题为"Minute logic"(《细致的逻辑》)一书中,构造了一种被后人理解为基于三值逻辑的数学。他曾考虑过大量的三值逻辑联结词,这些联结词后来被其他人重新发现,如 Lukasiewicz 的三值否定、E. L. Post 的循环三值否定、Slupecki 的 *T*- 函数、Lukasiewicz 的三值析取和合取、Bochvar 的三值析取和合取(Kleene 的弱析取和合取)等。不过,令人遗憾的是 Peirce 没有进一步发展这些思想胚芽, 也没有把他的发现公之于众。

1910 ~ 1914 年,Nikolai A. Vasil'ev 发表了一系列论文,提出了所谓"想象中的非亚里士多德逻辑",试图构建一种不同于亚里士多德逻辑的逻辑,并认为这种逻辑与亚里士多德逻辑的关系类似于非欧几何与欧几里得几何的关系。按 Vasil'ev 的观点,逻辑由两部分构成:①固定不变的元逻辑原理,这是逻辑之所以是逻辑的必要部分;②一组可变的逻辑规则,这些规则以所知道的物体的性质为本体论基础。他把矛盾律表述为"物体不可以有一个和它矛盾的谓词",把排中律表述为"一个物体要么有一个谓词,要么有该谓词的否定"。他认为这两个规则应属于逻辑的本体论方面而不应属于"元逻辑"方面,应适宜于现实世界而不应适宜于每一个可能的世界,是可以改变的。他把矛盾律和不自相矛盾律区分开来,后者被表述为"一个同样的判断不能同时既真又假",这是一个不可改变的元逻辑原理。

这样的逻辑系统允许他放弃一些可变的逻辑规则,创建"非亚里士多德主义的逻辑"。Vasil'ev 假定有一个世界,在其中某些物体有谓词 A,某些物体有谓词非 A,还有一些物体同时有谓词 A 和非 A。在这样的世界中,逻辑必然是三值的,因为把物体的性质用命题表述出来会对应于三个不同的事物状态。这时排四律成立,而排中律不成立。Vasil'ev 还继续把他的三态本体论推广到相互排斥的 n 个状态的情形。在这些系统中,以本体论形式出现的排中律和矛盾律都不成立,但排

$(n+1)$律总成立。

多值逻辑的实际建立应追溯到20世纪20年代早期，波兰人Jan Lukasiewicz和美国人Emil L. Post分别发表了开拓性的论文，建立了系统化的多值逻辑。

1920年以前，Lukasiewicz在一个演讲上曾公布了他的三值逻辑系统。在1920年正式发表的论文中，他主张彻底抛弃二值逻辑，提倡三值逻辑。Lukasiewicz建立三值逻辑的思想来源于多方面，除了与未来偶然命题有直接关系，还与模态命题，概率论，非决定论有关，他还试图解决"罗素悖论"问题。Lukasiewicz及其追随者把他的第三值解释为"不确定的"、"可能的"、"不一定的"和"是悖论"等。Krolikoski(1979)对此做了深入的分析，指出了这些解释的不恰当性和相互之间的不协调性。Lukasiewicz还把他的逻辑从三值推广到多值乃至无穷值，但并没有对这些逻辑值给出解释，因此McCall(1967, 40~65)评论说：这种推广只是纯形式的，没有充分的哲学根据。

Post(1921)独立于Lukasiewicz发现了自己的多值系统。不过，他此后没有继续研究这一课题，也没有发表相应的出版物。与Lukasiewicz不同，Post以更一般化的形式推广了他的n值逻辑。然而，虽然Post系统可以推广到无穷值情形，但他并没有仔细考虑无穷值系统的思想，没有给出逻辑系统的直观语义解释。

从形式公理化的角度看，多值逻辑史上的一个重要的开创性结果是由Mordchaj Wajsberg1931年做出的。他对Lukasiewicz三值逻辑进行了公理化(McCall, 1967,264~284)，给出如下优美的公理集(包括MP规则和代换规则)：

$W_1: p\to(q\to p)$

$W_2: (p\to q)\to((q\to r)\to(p\to r))$

$W_3: (\neg p\to\neg q)\to(q\to p)$

$W_4: ((p\to\neg p)\to p)\to p$

Wajsberg得出了这一结果，但当时没有发表。这种公理化系统的出现使得多值逻辑真正走向了形式化公理化的道路，成为现代逻辑的分支。

自此之后，在不同的学术背景下多值逻辑的理论和应用朝着多种不同方向发展，一系列多值逻辑系统先后展现在学术舞台上。在这方面做出突出贡献的早期逻辑学家有Arend Heyting, Kurt Gödel, D. A. Bochvar和Stephen C. Kleene等。

数学一直是逻辑学发展的重要推动力，这在多值逻辑领域中也不例外。在直

觉主义数学背景下研究多值逻辑,1925 年,荷兰数学家 L. E. J. Brouwer 进行了开拓性的工作。1956 年,Arend Heyting 对直觉主义命题逻辑系统化做出突出贡献,建立了一个三值逻辑。1932 年,Gödel 试图按照真值来理解直觉主义逻辑,构建了几个多值逻辑系统;同时证明直觉主义逻辑并不具有有穷真值特征的逻辑矩阵。1936 年,Jaskowski 为直觉主义逻辑构建了一个无穷值特征矩阵;然而,这个矩阵没有得到一个合适而简单的直觉主义解释。回顾这段历史,我们观察到这样一个事实:直觉主义思想来源于对数学中实无穷和潜无穷问题的讨论,直觉主义的多值逻辑试图对这种思想进行形式化,但由此产生的多值逻辑并没有能成功地刻画这种思想。

1938 年,美国逻辑学家 Kleene 将三值逻辑应用于部分函数和关系。他的研究受到了数学基础和递归论研究的启示,他建立的逻辑允许在某个阶段上某些命题具有不确定性,并引进第三逻辑值表示不确定状态。他建立了两个三值系统:强逻辑系统和弱逻辑系统。如果把恒取真值不确定或真的公式作为重言式,强逻辑系统可以同构于经典逻辑系统。值得一提的是:Kleene 联结词也引起了哲学家的关注,1975 年,Kripke 利用该联结词提出真理逻辑,它目前成为决定真值修正理论中的固定点的重要工具。

在代数方面, Moisil(1939)提出 Moisil 代数对 Lukasiewicz 逻辑进行代数方面的研究。Rosenbloom(1942)提出了 Post 代数。后来,Moisil 代数和 Post 代数的理论及其推广得到了极大的发展,许多重要的成果相继发表。历史上,在这方面做出突出贡献的有 Wade、Epstein、Traczyk、Dwinger、Rasiowa、Rousseau、Orlowska 等。现在,这仍是个活跃的研究课题,仍有许多后来者做出杰出的工作。

多值逻辑理所当然地推动了逻辑学其他分支的发展。Gödel(1932)把多值逻辑用于模态逻辑和模态思想。虽然 Dugundji(1940,1941)证明,按照 Gödel 的方法不能对 Lewis 系统 S1-S5 给出有穷特征的矩阵表示,从而证明了有穷多值逻辑和 Lewis-型模态逻辑之间有一个不可逾越的界限。但是,随后的研究表明,无穷值真值表可以弥合这个界限(McCall, 1967)。

1939 年,俄罗斯逻辑学家 D. A. Bochvar 将三值逻辑应用于悖论研究。她用三值逻辑中"真"、"假"值之外的第三个真值表示"无意义的"或"不确定的",认为这一真值对应于产生悖论的命题。Tameharu Shirai, Moh Shaw-Kwei(莫绍揆,1954)等试图把多值逻辑应用于发展不含悖论的集论。在这方面作出重要进展的

有 Thoralf Skolem 和 Chang(1965, 93 ~ 100)。

随着多值逻辑的研究方法被广泛地运用于各个不同的领域，它本身的性质和特点也引起了逻辑学家的关注。由于试图刻画不同的对象,不同的多值逻辑系统往往具有不同的联结词。因此,把握联结词的性质是多值逻辑研究的重要任务。为了保证联结词的函数完全性,1936 年,Jerzy Slupecki 最先找出了特殊的多值联结词,如给恒取中间真值的联结词 T,把它加入 Lukasiewicz 三值逻辑,可以使其函数完备。1938 年,Slupecki 给出了一个函数完全的 n 值逻辑公理化系统(Bolc, Borowik,1992,79)。Webb(1935)找到了第一个单独函数完备的二元多值函数(联结词),该联结词也称为 Sheffer 联结词,它是对经典二值逻辑 sheffer 函数的推广。20 世纪五六十年代,函数完备性理论成为一个热门的研究课题。(Wernick,1942; Wheeler,1961,1962;Jobe,1962;Schofield,1966,1969;Rousseau,1967;J. Rosenberg, 1968;Zaharova, et al.,1969;Ellozy, Patt,1972;I. G. Rosenberg,1974,1977;Miyakawa et al.,1986;罗铸楷,1963,1982;庞云阶,1962;罗铸楷等,1992)

20 世纪 50 年代可称为多值逻辑研究的黄金时期,有如下重要结果:①McNaughton (1951)定理刻画了 Lukasiewicz 无穷值命题逻辑的公式的特征,证明了每一个公式都可用几个一次整系数代数式表示。②Rose 和 Rosser (1958)用传统的代数方法证明 Lukasiewicz 无穷值命题逻辑系统的完全性; Chang (1958, 1959)通过引进 MV 代数也对它给出了证明。③Dummett(1959)证明 Gödel 无穷值命题逻辑系统的完全性,并用 Skolem 方法证明了无穷值逻辑的集论的一致性。④1955 年,Karl Schroter 提出构建多值逻辑 Gentzen 系统的方法(Schroter, Rousseau,1967, 23 ~ 33)。

20 世纪 60 年代以后, Zadeh (1965,1975,1978,1979)开始用推广的集论方法形式化模糊概念,这导致与多值逻辑关系密切的模糊逻辑的产生,这为多值逻辑的发展注入了新的活力。人们试图通过多值逻辑的方法为模糊集合论寻找理论基础,导致人们对多值逻辑进一步深入研究。目前,将模糊逻辑纳入多值逻辑理论体系中加以叙述已经习以为常。

20 世纪 80 年代以后,多值逻辑的研究方向趋向分支化和多元化,其中包括:多值逻辑在模糊集论中的应用、对多值逻辑相应代数系统的详细考察、多值逻辑中复杂问题的探讨等。同时,新的多值逻辑不断出现,如一种基于 t-范数的模糊

逻辑被详细研究。多值逻辑的各个分支不断与边缘科学结合,出现了新的研究领域。例如,多值逻辑与代数结合、多值逻辑函数与密码学结合、多值逻辑应用于软计算等都是热门的研究方向。时至今日,多值逻辑在语言学、逻辑学、哲学、硬件检验和设计、人工智能、数学基础等许多领域均得到了广泛的应用,这种应用为研究多值逻辑提供了有力的支持(Hurst,1984;Dubois et al., 1999; Fitting, Orlowska, 2003)。

1.2 经典多值逻辑的语义

1.2.1 Lukasiewicz 三值逻辑的语义

Lukasiewicz 引进第三个逻辑值的原因是多方面的,其中一个主要原因来自于亚里士多德关于未来偶然事件的论述。他以"我在明年 12 月 21 日中午将在华沙"这句话为例,说明关于未来偶然事件的命题既不是真的也不是假的,因为否则就会得出关于未来偶然事件的必然性和不可能性的宿命论结论。他用值 1/2 表示这类命题的真值情况。除此之外他还对自由、决定论、模态以及集合论悖论等观念进行了哲学研究。他用 1 表示真,0 表示假,把真假之外的真值情况用 1/2 表示,建立了他的三值逻辑。起初,Lukasiewicz 把这第三个逻辑值,即 1/2,解释为"可能性"或"非决定性",并且他遵循关于这些概念的直觉,推广了对否定和蕴涵的经典解释,给出其值表如下:

α	$\neg\alpha$
0	1
1/2	1/2
2	0

$\rightarrow$	0	1/2	1
0	1	1	1
1/2	1/2	1	1
1	0	1/2	1

其他的析取、合取和等值等联结词通过以下定义引进:

$$\alpha \vee \beta =_{df} (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta$$

$$\alpha \wedge \beta =_{df} \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$$

$$\alpha \equiv \beta =_{df} (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$$

它们的值表是:

$\vee$	0	1/2	1
0	0	1/2	1
1/2	1/2	1/2	1
1	1	1	1

$\wedge$	0	1/2	1
0	0	0	0
1/2	0	1/2	1/2
1	0	1/2	1

$\equiv$	0	1/2	1
0	1	1/2	0
1/2	1/2	1	1/2
1	0	1/2	1

在 Lukasiewicz 三值逻辑中,公式的一个赋值是与以上真值表相容的任一函数 v: For →{0, 1/2, 1},这里 For 是语言中的合式公式集。重言式是在任一赋值下总取特指值(designated value)1 的公式。

Lukasiewicz 三值逻辑重言式的集合与经典逻辑的二值重言式集合是不同的。例如,在 L_3(Lukasiewicz 三值逻辑)中,既没有排中律,也没有无矛盾律。为说明这一点,对 p 指派 1/2:任一这样的赋值使 $p \vee \neg p$ 和 $p \wedge \neg p$ 得 1/2。按照 Lukasiewicz 的意见,彻底拒斥这两个规律,是想要使非决定论原理合法化。

该语义的另一性质是,经典逻辑中某些不一致的公式在 L_3 中不再是矛盾的。例如:

$$(\star)p \equiv \neg p,$$

在 p 为未来偶然命题时是个真公式,这个公式还涉及著名的罗素(Russell)悖论:"所有不是自身元素的集合组成的集合属于该集合。"罗素悖论在 L_3 中不再是一个悖论,因为对 p 取 1/2,这就使公式为真,从而($\star$)是不矛盾的。Lukasiewicz 发现这是有利于他的三值逻辑的一个很强的论证。

Lukasiewicz 还试图把关于可能性和必然性的模态算子 M 和 L 加以形式化。他领悟到在真值函项的经典逻辑中表示这些算子是不可能的,从而提出了以三值逻辑作为它们的基础。1921 年,Tarski 使用了满足 Lukasiewicz 要求的两个联结词——否定和蕴涵,提出了 M 和 L 的简单定义:

α	M_α
0	0
1/2	1
1	1

α	L_α
0	0
1/2	0
1	1

$$M_\alpha =_{df} \neg\alpha \rightarrow \alpha$$

$$L_\alpha =_{df} \neg M \neg\alpha = \neg(\alpha \rightarrow \neg\alpha)$$

1922 年,Lukasiewicz 推广了他的三值逻辑并且定义了一族有穷值和无穷值的多值逻辑。一个 Lukasiewicz n 值矩阵具有以下形式:

$$M_n = (L_n, \neg, \rightarrow, \vee, \wedge, \equiv, \{1\})$$

这里,对自然数集合 $\boldsymbol{N}$

$$L_n = \begin{cases} \{0, 1/(n-1), 2/(n-1), \cdots, (n-2)/(n-1), 1\}, & \text{如果 } n \geqslant 2,\ n \in \boldsymbol{N} \\ \{s/w : 0 \leqslant s \leqslant w; s, w \in N \text{ 并且 } w \neq 0\}, & \text{如果 } n = \aleph_0 \\ [0, 1], & \text{如果 } n = \aleph_1 \end{cases}$$

在 L_n 上定义的函数如下:

$$\neg x = 1 - x$$

$$x \rightarrow y = \min\{1, 1 - x + y\}$$

$$x \vee y = (x \rightarrow y) \rightarrow y = \max\{x, y\}$$

$$x \wedge y = \neg(\neg x \vee \neg y) = \min\{x, y\}$$

$$x \equiv y = (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x) = 1 - |x - y|$$

对这些新多值逻辑的引进 Lukasiewicz 并没有给出充分的理由和合理的语义解释。他只是强调,因为对 $n=3$,人们恰好获得他 1920 年三值逻辑的矩阵,所以,这种推广是无可厚非的。然而后来的历史表明,Lukasiewicz 逻辑有许多性质,使得它们进入许多重要的逻辑构造之中,因此 Lukasiewicz 逻辑一直成为很活跃的研究领域。

Lukasiewicz 矩阵 $\boldsymbol{M}_2$ 与经典逻辑的矩阵相同。此外,集合 $\{0, 1\}$ 对所有 Lukasiewicz 联结词是封闭的,这是对这种推广所具有的保守特征的另一种表达。因此,L_2 是任一代数 $(L_n, \neg, \rightarrow, \vee, \wedge, \equiv)$ 的子代数,$\boldsymbol{M}_2$ 是 $\boldsymbol{M}_n$ 的子矩阵。所以,Lukasiewicz 命题演算的所有重言式集包含于经典的重言式集 TAUT:

$$E(\boldsymbol{M}_n) \subseteq E(\boldsymbol{M}_2) = \text{TAUT},$$

$E(\boldsymbol{M}_n)$ 是矩阵 $\boldsymbol{M}_n$ 的内容,即恒取特指值的公式集(Malinowski, 1993)。

Lukasiewicz 本人所提供的直观语义并不是完美的,不断遭到批评(Urquhart, 1973; Krolikoski, 1979; Gabbay, Guenthner, 2001)。但是,20 世纪八九十年代,Pelc (1987) 和 Mundici (1993) 等为 Lukasiewicz 多值逻辑给出了容许谎言的 Ulam 博弈语义。这是一个重要的解释,它使得用 Lukasiewicz 多值逻辑刻画容错推理成为可能(Cignoli et al., 2000, 103 ~ 109; 霍书全)。

1.2.2 Post 逻辑的语义解释

Post 于 1920,1921 年分析了一族有穷值的命题逻辑。他受怀特海(Whitehead)和罗素的《数学原理》中的经典命题演算(CPC)的形式化、真值表方法以及经典逻辑具有函数完全特征的启示,构建了函数完备的有穷值逻辑系统。

Post 按《数学原理》的做法,取否定¬和析取∨作为初始联结词(Post 否定与 Lukasiewicz 否定有不同的含义,本节用"¬"表示)。对任一自然数 $n \geqslant 2$,他考察了对象的一个全序集

$$P_n = \{c_1, c_2, \cdots, c_n\}$$

$c_i < c_j$ 当且仅当 $i < j$,配备有相应于联结词的两种运算:一元的旋转(rotation)或循环的否定(cyclic negation)¬和二元的析取∨。它们的定义如下:

$$\neg c_i = \begin{cases} c_{i+1}, & \text{如果 } i \neq n \\ c_1, & \text{如果 } i = n \end{cases} \qquad c_i \vee c_j = c_{\max\{i,j\}}$$

这些等式对给定的 $n \geqslant 2$ 确定了 n 值的否定和析取的真值表。如 $n = 5$,真值表是:

x	$\neg x$
c_1	c_2
c_2	c_3
c_3	c_4
c_4	c_5
c_5	c_1

$\vee$	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
c_1	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
c_2	c_2	c_2	c_3	c_4	c_5
c_3	c_3	c_3	c_3	c_4	c_5
c_4	c_4	c_4	c_4	c_4	c_5
c_5	c_5	c_5	c_5	c_5	c_5

当 $n = 2$ 时,Post 逻辑就与否定 - 析取型的经典命题逻辑(CPC)相同,集合 $P_2 = \{c_1, c_2\}$ 可视为等同于只包含 0 和 1 的集合,这样,Post 的否定和析取就是经典否定和析取的同构变形(isomorphic variants)。当 $n > 2$ 时,Post 逻辑同 CPC 的关系就不复存在了,因为在所有这些情况下,否定词的值同经典的否定词真值表是不相容的。为说明这一点,请注意由于析取的性质,c_1 总是对应于 0 并且 c_n 总是对应于 1。虽然 $\neg c_n = c_1$,$\neg c_1 = c_2$,而 c_2 并不是 c_n。因此,我们可以说 n 值 Post 代数(n valued post algebra)

$$P_n = (\{c_1, c_2, \cdots, c_n\}, \neg, \vee)$$