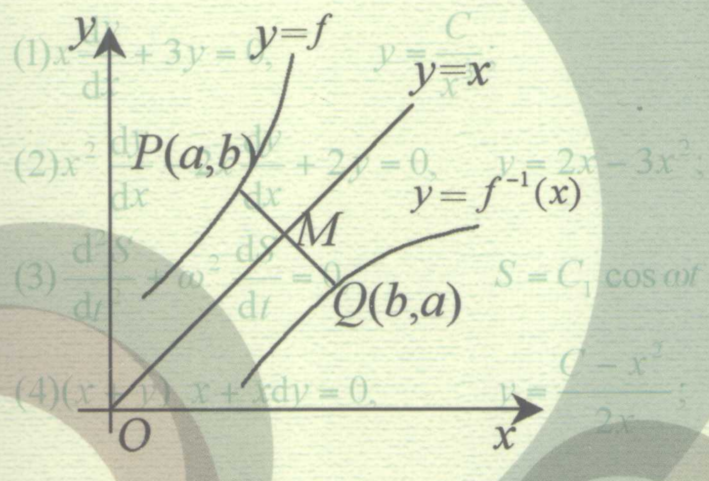
全国高等农林院校"十一五"规划教材

微积分

WEIJIFEN

经管类专业用

汪宏喜◎主编



中国农业出版社

全国高等农林院校“十一五”规划教材

微　积　分

经管类专业用

汪宏喜　主编

中 国 农 业 出 版 社

图书在版编目（CIP）数据

微积分/汪宏喜主编．—北京：中国农业出版社，
2009.7
全国高等农林院校“十一五”规划教材
ISBN 978-7-109-13840-7

Ⅰ．微… Ⅱ．汪… Ⅲ．微积分-高等学校-教材 Ⅳ．
O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 066700 号

中国农业出版社出版
（北京市朝阳区农展馆北路 2 号）
（邮政编码 100125）
责任编辑 朱 雷 魏明龙

中国农业出版社印刷厂印刷 新华书店北京发行所发行
2009 年 7 月第 1 版 2009 年 7 月北京第 1 次印刷

开本：820mm×1080mm 1/16 印张：22.25
字数：530 千字
定价：33.00 元

内 容 简 介

本书是全国高等农林院校“十一五”规划教材。教材按照教育部非数学类专业数学基础课程教学指导委员会制定的《经济管理类本科数学基础课程教学基本要求》及考研大纲进行编写，兼顾农林院校及经济管理类本科专业的特点，结合多年来的教学经验，对教材进行了一些有益的改革尝试。

全书共十章，主要内容包括：函数的极限与连续、一元函数微分学及其应用、一元函数积分学及其应用、多元函数微分学、二重积分、无穷级数、常微分方程和差分方程。

本书可以作为高等院校经济管理类专业高等数学课程教材，也可供报考经济管理类研究生复习选用。

编　写　人　员

主　编　汪宏喜（安徽农业大学）

副主编　单鉴华（浙江大学）

张长勤（安徽农业大学）

李玉凤（海南大学）

参　编　曹宗宏（安徽农业大学）

毛旭强（海南大学）

前　　言

本书是全国高等农林院校“十一五”规划教材，主要面向高等农林院校的经济管理类各专业，也可适用于普通高等院校的经济管理类各专业。该教材按照教育部非数学类专业数学基础课程教学指导委员会制定的《经济管理类本科数学基础课程教学基本要求》及考研大纲进行编写，兼顾高等农林院校的特点，旨在传授基本数学知识，提高读者的数学素养和能力，培养读者运用数学知识分析和解决实际问题的能力。

高等数学课程是经济管理类专业十分重要的一门基础课程，是许多后继课程的基础，对培养具有良好科学素养以及应用数学知识解决实际问题的人才起着重要作用。教材编写过程中，我们主要考虑以下几个方面：(1) 考虑中学教材中极坐标内容不作要求，在第一章中增加了极坐标方程的内容。(2) 根据经济管理类专业的特点，在相关的章节都编写了微积分在经济上的应用，强调数学在经济上的应用，以提高学生的数学素养和分析解决实际经济问题的能力。(3) 尽量使内容安排趋于合理，符合学生的认知规律。(4) 编者精选了例题和习题，力求使例题不仅配合所授内容，而且让学生能够从中获取分析问题、解决问题的思想和方法。特别是各章最后安排的总复习题，可以提高学生综合运用本章所学知识解决问题的能力。

安徽农业大学汪宏喜编写第六章、第七章、第九章、第十章，浙江大学单鉴华编写第八章、安徽农业大学张长勤编写第一章和第二章，海南大学李玉凤编写第四章，安徽农业大学曹宗宏编写第三章，海南大学毛旭强编写第五章。全书由汪宏喜教授统稿。

由于编者水平所限，本书的错误和不足之处在所难免，恳请广大读者和授课教师提出批评和建议，以便今后再版时改进。

编　者

2009 年 3 月 28 日

目　录

第一章　函数与极限

函数是数学中最重要的基本概念之一，是微积分学的主要研究对象，而研究函数最基本的工具是极限．本章我们首先论述函数的一般概念，引入函数极限的概念及其性质与运算，并运用函数的极限讨论函数的连续性．另外，我们对于经济学中所涉及的常用经济函数进行了简单的介绍与分析．

第一节　函数概念

一、数集的初步概念

不论是在数学还是在日常生活中，我们经常会遇到集合这个概念．

所谓**集合**就是指一些特定事物的全体，其中事物个体称为这个集合的**元素**．我们常用大写字母 A，B，C，…表示集合，用小写字母 a，b，c，…表示集合中的元素．如果 a 是集合 S 中的元素则称 a **属于** S，记作 $a\in S$，反之就称 a **不属于** S，记作 $a\notin S$. 记号 $\forall$ 为数学中的全称量词，对应日常语言中的“一切”，“所有的”，“任意的”等词，$\forall x\in S$ 意为集合 S 中的任意一个元素，或全体元素；记号 $\exists$ 为存在量词，对应日常语言中的“存在着”，“有一个”，“至少有一个”等词，$\exists x\in S$ 意为在集合 S 中存在着某个元素，或在 S 中有一个元素．

我们在中学曾对集合进行了详尽的讨论，这里不再赘述．在微积分学的研究中经常用到的是数集，即由数所构成的集合．一般的数集有

全体自然数组成的集合 $\{0, 1, 2, \cdots\}$ 称为**自然数集**，记作 $\mathbf{N}$；

全体正整数组成的集合 $\{1, 2, \cdots\}$ 称为**正整数集**，记作 $\mathbf{N}^+$；

全体整数组成的集合 $\{0, \pm1, \pm2, \cdots\}$ 称为**整数集**，记作 $\mathbf{Z}$；

全体有理数组成的集合 $\left\{\dfrac{p}{q}\,\middle|\, p\in\mathbf{Z}, q\in\mathbf{N}, 且\ q\neq0\right\}$ 称为**有理数集**，记作 $\mathbf{Q}$；

全体实数组成的集合称为**实数集**，记作 $\mathbf{R}$.

在数集中，区间和邻域是常用的概念．

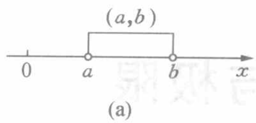
设 a，$b\in\mathbf{R}$，且 $a<b$，我们分别称 $\mathbf{R}$ 的两个子集 $\{x \mid a<x<b\}$ 和 $\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 为以 a，b 为端点的**开区间**和**闭区间**，并分别记作 (a, b) 和 $[a, b]$，即

$$(a, b)=\{x \mid a<x<b\}, [a, b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}.$$

从几何上看，开区间 (a, b) 表示数轴上以 a，b 为端点的线段上点的全体，而闭区间 $[a, b]$ 则表示数轴上以 a，b 为端点且包括 a，b 两端点的线段上点的全体（图 1－1）．

类似地，可定义半开半闭区间：

$$(a, b]=\{x \mid a<x\leqslant b\}，称之为\textbf{左开右闭区间}；$$



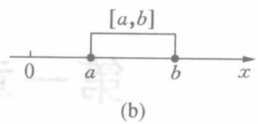


图 1-1

$[a, b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$，称之为**左闭右开区间**.

上述四种区间统称为**有限区间**，此外还有下列类型的无限区间：

$$(-\infty, a) = \{x \mid -\infty < x < a\}, \ (-\infty, a] = \{x \mid -\infty < x \leqslant a\},$$

$$(a, +\infty) = \{x \mid a < x < +\infty\}, \ [a, +\infty) = \{x \mid a \leqslant x < +\infty\},$$

$$(-\infty, +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\} = \mathbf{R}.$$

上述各种区间统称为**区间**，且常用字母 I 来表示某个给定的区间.

设 a，$\delta \in \mathbf{R}$，且 $\delta > 0$. 我们称开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 为 a 的 δ **邻域**，记作 $U(a, \delta)$. a 和 δ 分别称为这邻域的**中心**和**半径**. 由于 $x \in (a-\delta, a+\delta)$ 当且仅当 $a-\delta < x < a+\delta$，亦即 $|x-a| < \delta$，因此有

$$U(a, \delta) = \{x \mid |x-a| < \delta\}.$$

如果再把这邻域中的中心 a 去掉，就称它为 a 的 δ **去心邻域**，记作 $\mathring{U}(a, \delta)$，即

$$\mathring{U}(a, \delta) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}.$$

所谓 a 的 δ 邻域，指的是 a 点附近的那个范围，大多数情形下并不一定需要指明半径 δ 的大小，这样我们往往把 a 的邻域和 a 的去心邻域分别简记为 $U(a)$ 和 $\mathring{U}(a)$.

二、函数概念

1. 映射

映射是指两个集合之间的一种对应关系.

定义 1 设 X，Y 是两个非空集合，若按照某种确定的规则 f，使得对集合 X 中的每一个元素 x，都可以找到集合 Y 中唯一确定的元素 y 与之对应，则称这个对应规则是从集合 X 到集合 Y 的一个**映射**，记为

$$f: X \to Y, \text{或 } f: x \mapsto y = f(x), \ x \in X.$$

其中 y 称为在映射 f 之下 x 的**像**，x 称为映射 f 之下 y 的**逆像（或原像）**. 集合 X 称为映射 f 的**定义域**，记为 $D_f = X$，而在映射 f 之下，X 中的元素 x 的像 y 的全体称为映射 f 的**值域**，记为 R_f：

$$R_f = \{y \mid y \in Y, \text{且 } y = f(x), \ x \in X\}.$$

例 1 设某高等学校学生的学号均为 8 位数字，X 是由该校全体学生构成的集合，Y 是全部 8 位数构成的集合. 若定义规则

$$f: x \mapsto y(y \text{ 是 } 8 \text{ 位数}), \ x \in X.$$

则显然 f 是一个映射，其中 $D_f = X$，$R_f \subset Y$.

例 2 记 $X = \{a, b, c, d, e\}$，$Y = \{\alpha, \beta, \gamma\}$，下面对应的规则也是一个映射：

$$f(a) = \beta, \ f(b) = \gamma, \ f(c) = \alpha, \ f(d) = \alpha, \ f(e) = \beta,$$

而 f 的定义域与值域分别为

$$D_f = X = \{a, b, c, d, e\}, \quad R_f = \{\alpha, \beta, \gamma\}.$$

其中 $D_f = X$，$R_f = Y$.

2. 函数的定义

我们现在用映射的概念来引入函数．

在定义 1 中，特别地，取集合 $X \subset \mathbf{R}$，集合 $Y \subset \mathbf{R}$，则映射

$$f: X \to Y, \quad x \mapsto y = f(x)$$

就称为**一元函数**，简称**函数**．由于函数表示的必是实数集与实数集之间的对应关系，所以在其映射表示中，一般就写成

$$y = f(x), \quad x \in X (= D_f).$$

读作“函数 $y=f(x)$”或“函数 f”．这里 f 表示一种对应规则，对于每一个 $x \in D_f$，它确定了唯一的 $y = f(x) \in \mathbf{R}$ 与之对应．

这与我们熟悉的下列函数定义是完全吻合的：

定义 2　设 D 是实数集 $\mathbf{R}$ 的子集，f 是一个对应法则．如果对于 D 中的每一个 x，按照对应法则 f，都有唯一确定的实数 y 与之对应，则称 f 为定义在 D 上的**函数**．集合 D 称为函数 f 的**定义域**，一般记为 D_f，与 D 中 x 相对应的 y 称为 f 在 x 的函数值，记作 $y=f(x)$．全体函数值的集

$$R_f = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为函数 f 的**值域**．

如果把 x，y 分别看作 D，R_f 中的变量，则称 x 为**自变量**，y 为**因变量**．

例 3　自由落体问题

一个物体做自由落体运动，从开始下落时算起经过的时间设为 t(s)，在这段时间中落体的位移设为 s(m)．由于只考虑重力对落体的作用，而忽略空气阻力等其他外力的影响，故由物理学相关知识知道 s 与 t 之间有如下依赖关系

$$s = \frac{1}{2} g t^2, \tag{1}$$

其中 g 为重力加速度（在地面附近它近似于常数，通常取 $g=9.8\ \mathrm{m/s^2}$）．

如果落体从开始下落到着地所需的时间为 T，则变量 t 的变化范围（或称变域）为 $0 \leqslant t \leqslant T$.

当 t 在变域内任取一值时，由式（1）可求出 s 的对应值．例如，

当 $t = 1$(s) 时，$s = \frac{1}{2} \times 9.8 \times 1^2 = 4.9$(m)；当 $t = 2$(s) 时，$s = \frac{1}{2} \times 9.8 \times 2^2 = 19.6$(m).

例 4　某化工公司统计去年农用化肥月生产量如表 1－1 所示：

表 1－1

月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
月产量（万吨）	5.1	5.2	5.6	6.2	5.9	5.5	5.8	5.0	6.1	5.4	4.2	4.1

从表 1－1 可以看出过去一年该公司月产量 x（万吨）与月份 t 之间有着确定的对应关系．当月份 t 在 1 至 12 之间每取一整数值时，从表中便得出月产量 x 的唯一确定的对应值．

例 5 图 1－2 是气温自动记录仪描出的某一天的温度变化曲线，它给出了时间 t 与气温 T 之间的依赖关系．

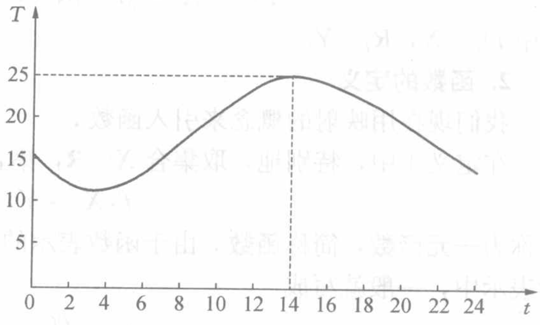


图 1－2

时间 t(h)的变化范围是 $0\leqslant t\leqslant 24$，当 t 在这个范围内任取一值时，从图 1－2 中的曲线可找出气温的对应值．例如，$t=14$ 时，$T=25$ ℃，为一天中的最高温度．

以上的例子所描述的问题虽各不相同，但却有共同的特征：它们都表达了两个变量之间的相互依赖关系，当一个变量在它的变域中任取定一值时，另一个变量按一定法则就有一个确定的值与之对应．把这种确定的依赖关系抽象出来，就是函数的概念．

作为两个实数集之间的映射，函数的定义中有两个基本要素，就是定义域与对应规则．下面对这两个要素作一简要说明．

(1) 定义域 D_f：函数的定义域是指自变量所能取得的那些数的范围．视具体情况可分为实际定义域和自然定义域．实际定义域要根据函数的实际意义来确定．在例 3 中，$s=\frac{1}{2}gt^2$ 所描述的是下落距离 s 与下落时间 t 之间的函数关系，其中自变量 t 的变化范围是从物体开始下落的时刻（设 $t=0$）到物体到达地面的时刻（设 $t=T$），故该函数的定义域 D_f 为 $[0, T]$．而自然定义域是指它的自变量的最大取值范围．若在上面函数关系中不考虑它的实际意义，则 D_f 为 $(-\infty,+\infty)$．

(2) 对应法则 f：对应法则是因变量 y 与自变量 x 之间函数关系的具体表现，它的表示方法很多，通常有**公式法**、**列表法**和**图示法**．在前面的例子中，例 3 所用的是公式法，例 4 所用的是列表法，而例 5 则采用了图示法．

在函数的定义中，并没要求在整个定义域上只能用一个表达式，也就是根据情况的不同，可在定义域的不同范围用不同的表达式来表达函数关系，这种表示法称为函数的分段表示法，相应的函数称为**分段函数**．若设 X_1，X_2 是两个互不相交的实数集合，$f_1(x)$，$f_2(x)$是分别定义在 X_1，X_2 上的函数，则

$$f(x)=\begin{cases}f_1(x), & x\in X_1,\\ f_2(x), & x\in X_2\end{cases}$$

就是定义在 $X_1\cup X_2$ 上的分段函数．事实上，分段表示可以分为任意有限或无限多段．

例 6 设

$$f(x)=\begin{cases}1-x^2, & -1\leqslant x<0,\\ x-1, & 0\leqslant x<1.\end{cases}$$

这是一个分段函数，其定义域为 $[-1, 1)$，函数图形如图 1－3所示．

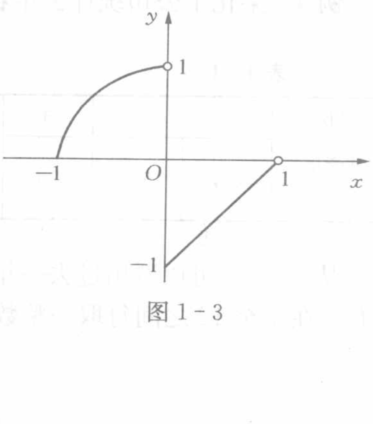


图 1－3

例 7　根据《中华人民共和国个人所得税法》（2007 年 12 月 29 日第五次修正），工资、薪金所得缴纳个人所得税的税率如表 1－2 所示：

表 1－2

级数	月工资（x）	税率（%）
0	$0\leqslant x\leqslant 2\,000$	0
1	$2\,000<x\leqslant 2\,500$	5
2	$2\,500<x\leqslant 4\,000$	10
3	$4\,000<x\leqslant 7\,000$	15
4	$7\,000<x\leqslant 22\,000$	20
5	$22\,000<x\leqslant 42\,000$	25
6	$42\,000<x\leqslant 62\,000$	30
7	$62\,000<x\leqslant 82\,000$	35
8	$82\,000<x\leqslant 102\,000$	40
9	$x>102\,000$	45

并且采用超额累进计算税费的方法．若记月工资为 x，应缴纳的税款为 y，则 y 是 x 的函数．根据超额累进计算税费的方法，该函数为

$$y=f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 2\,000,\\ 0.05(x-2\,000), & 2\,000<x\leqslant 2\,500,\\ 25+0.1(x-2\,500), & 2\,500<x\leqslant 4\,000,\\ 175+0.15(x-4\,000), & 4\,000<x\leqslant 7\,000,\\ 625+0.2(x-7\,000), & 7\,000<x\leqslant 22\,000,\\ 3\,625+0.25(x-22\,000), & 22\,000<x\leqslant 42\,000,\\ 8\,625+0.3(x-42\,000), & 42\,000<x\leqslant 62\,000,\\ 14\,625+0.35(x-62\,000), & 62\,000<x\leqslant 82\,000,\\ 21\,625+0.4(x-82\,000), & 82\,000<x\leqslant 102\,000,\\ 29\,625+0.45(x-102\,000), & x>102\,000.\end{cases}$$

显然，这是一个分段函数．

下面来看几个常用的分段函数．

例 8　绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$$

其图形如图 1－4 所示．

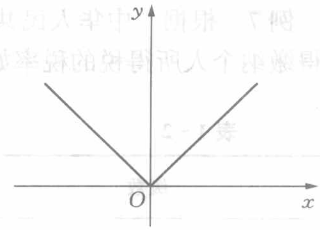


图 1－4

例 9 符号函数

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0,\end{cases}$$

其图形如图 1－5 所示．

例 10 整数部分（取整）函数（图 1－6）

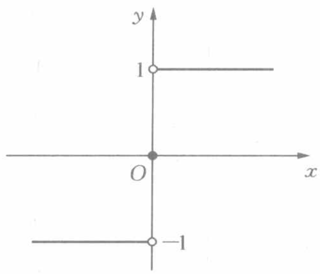


图 1－5

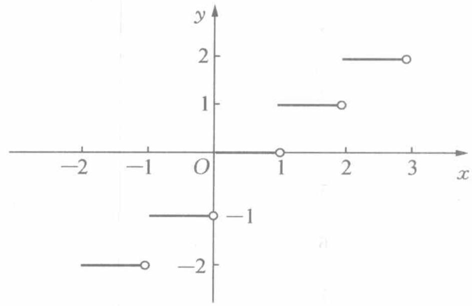


图 1－6

$$y=[x]=n,\ n\leqslant x<n+1,\ n\in \mathbf{Z},$$

其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数．

三、函数的几种特性

1. 有界性

设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义，若存在常数 M(或 m)，使对 $\forall x\in D$ 有

$$f(x)\leqslant M(\text{或 } f(x)\geqslant m),$$

则称 **$f(x)$ 在 D 上有上界（或有下界）**．

若存在正数 K，使对 $\forall x\in D$，有

$$|f(x)|\leqslant K,$$

则称 **$f(x)$ 在 D 上有界**．

如果这样的 K 不存在，即对任给的正数 K，总存在 $x_1\in D$，使 $|f(x_1)|>K$，就称 **$f(x)$ 在 D 上无界**．

函数的有界性与集合 D 有关．例如，$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上有界，因为存在 $K=1$，使对 $\forall x\in[1,+\infty)$ 有 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$. 但它在 $(0,1)$ 内却是无界的，因为对任给的正数 $K>1$，总存在 $x_1=\dfrac{1}{2K}\in(0,1)$，使 $|f(x_1)|=\left|\dfrac{1}{x_1}\right|=2K>K$.

一个函数如果在其定义域上有界，就称它为**有界函数**．有界函数的图形必位于两条直线 $y=K$ 与 $y=-K$ 之间．例如，$y=\sin x$ 是有界函数，因为在它的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内总有