职业高中试用教材

数学

高等教育出版社

第二册

李方烈 刘嘉琨 殷慧中 高敬东 编

ZHIYE GAOZHONG SHIYONG JIAOCAI

职业高中试用教材

数　　学

第二册

李方烈　刘嘉琨　殷慧中　高敬东　编

高等教育出版社

内 容 提 要

本书是职业高中数学试用教材第二册，内容包括数列与数学归纳法、不等式、复数及排列与组合、二项式定理等四章。其中标有*的章节可作为选学内容。

这套教材的编写提纲经十四省市职业高中教师代表及有关单位代表参加的“职业高中《语文》、《数学》试用教材编写提纲讨论会”审定。适用于招收具有初中文化水平的各类职业高中及相应的职业学校，也可作为有关培训班的文化课教材及自学者参考书。

(京) 112号

职业高中试用教材

数　学

第 二 册

李方烈　刘嘉琨　殷慧中　高敬东　编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京新华印刷厂印装

*

开本 787×1092　1/32　印张5.375　字数 110 000

1986年10月第1版　1992年5月第9次印刷

印数　335 133—367 143

ISBN 7-04-000653-7/O·189

定价　1.35 元

目　录

第一章　数列与数学归纳法

一　数　　列

1.1　数列的一般概念

按一定次序排列的一列数叫做**数列**.

例如，在实际中，常把一批钢管堆放成如图 1-1 所示的样子. 这里共放了 7 层，从最上面一层起，各层的钢管数依次为

$$3,4,5,6,7,8,9. \tag{1}$$

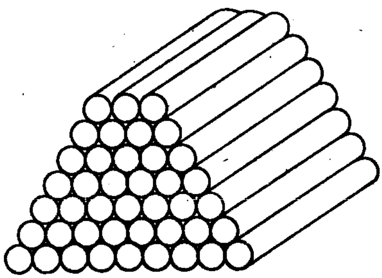

图　1-1

自然数依次排成

$$1,2,3,4,5,\cdots. \tag{2}$$

正奇数从 1 起按由小至大的顺序排列成一列数:

$$1,3,5,7,9,\cdots. \tag{3}$$

有限个数的排列 $-\frac{1}{2},1,2,4,8,16.$ (4)

$\sqrt{2}$ 的精确到 1, 0.1, 0.01, 0.001, …的不足近似值排成一列数：

$$1, 1.4, 1.41, 1.414, \cdots. \tag{5}$$

零和-1的 1 次幂, 2 次幂, 3 次幂, 4 次幂, …：

$$0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, \cdots. \tag{6}$$

这些都是按一定次序排列的一列数，它们都是数列. 数列的一般表达形式为

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots, a_n, \cdots,$$

也可以记作数列$\{a_n\}$. 如数列(2)记作数列$\{n\}$. 一个数列的每一个确定的位置上都有一个确定的数，每一个数都叫做数列的**项**. 在第 n 个位置上的数 a_n 叫做第 n 项. 一个数列的第 n 项 a_n 与项数 n 间的对应关系，如果能够用一个式子表达，那么这个表达式就叫做这个数列的**通项公式**. 例如, 数列(2)的通项公式为

$$a_n=n.$$

数列(3)的通项公式为

$$a_n=2n-1.$$

数列$\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \cdots$的通项公式为

$$a_n=\frac{1}{3^n}.$$

项数有限的数列叫做**有穷数列**，项数无限的数列叫做**无穷数列**. 前面的数列(1)，(4) 都是有穷数列, 数列(2), (3), (5), (6)都是无穷数列.

例 1 写出数列$\left\{(-1)^n \cdot \frac{n}{n+1}\right\}$的前 6 项.

解： 依次用 $n=1,2,3,4,5,6$ 代入 $a_n=(-1)^n\cdot\frac{n}{n+1}$，得

$$a_1=-\frac{1}{2}, a_2=\frac{2}{3}, a_3=-\frac{3}{4}, a_4=\frac{4}{5}, a_5=-\frac{5}{6},$$

$$a_6=\frac{6}{7}.$$

∴所求数列的前六项为

$$-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, -\frac{5}{6}, \frac{6}{7}.$$

例 2　设 $a_n=\frac{1}{2n+1}$，写出这个数列的前 4 项.

解： 依次用 $n=1,2,3,4$ 代入 $a_n=\frac{1}{2n+1}$，得

$$a_1=\frac{1}{3}, a_2=\frac{1}{5}, a_3=\frac{1}{7}, a_4=\frac{1}{9}.$$

∴这个数列为 $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}$.

例 3　函数 $f(n)=3n-1$，求自变量依次为 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$ 所得的函数值组成的数列.

解：
$$a_1=f(1)=3\times1-1=2,$$
$$a_2=f(2)=3\times2-1=5,$$
$$a_3=f(3)=3\times3-1=8,$$
$$a_4=f(4)=3\times4-1=11,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

∴所求数列为

$$2, 5, 8, 11, \cdots, 3n-1, \cdots.$$

由上述几个例看出：数列可以看作一个定义域为自然数

集N(或它的有限子集$\{1,2,\cdots,n\}$)的函数当自变量从小到大依次取值时对应的一列函数值.函数可以用图象来表示,数列也可以用图象来表示，不同的只是由于自变量仅仅取自然数，所以数列的图象是由一群孤立的点表示. 例3 数列的图象如图 1-2 所示.

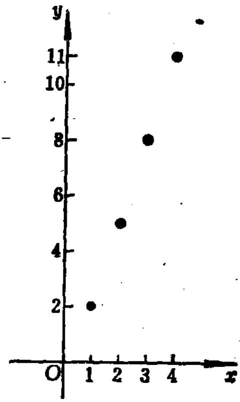

图 1-2

例 4 写出下列各数列的一个通项公式，使它的前 4 项分别是下列各数:

(1) $\frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{2\cdot 3}, \frac{1}{3\cdot 4}, \frac{1}{4\cdot 5}$;

(2) $-1, 4, -9, 16$;

(3) $1\times 1, -2\times 4, 3\times 7, -4\times 10$.

解: (1) 从数列前四项与相应的序号之间的联系看出: 分母为序号与序号加 1 的积,分子为 1. 所以通项公式可写为

$$a_n=\frac{1}{n(n+1)}.$$

(2) 从数列前四项看出: 奇数项为负、偶数项为正,所以每项含因子$(-1)^n$;又各项的绝对值是序号的平方，所以通项公式可写为

$$a_n=(-1)^n\cdot n^2.$$

(3) 从数列前四项看出: 偶数项为负、奇数项为正;每项的第一个因子的绝对值与序号相同，第二个因子是序号的三

倍减2，所以这个数列的通项公式可写为

$$a_n=(-1)^{n+1}\cdot n(3n-2).$$

练　　习

1. 根据下列通项公式，求出数列的第 6 项和第 10 项：

(1) $a_n=\dfrac{2n+1}{n^2}$；　　(2) $a_n=(-1)^n\dfrac{n}{(n+1)}$；

(3) $a_n=\sin\dfrac{n\pi}{4}$；　　(4) $a_n=(-1)^{n+1}\cdot n(2n-1)$.

根据下列通项公式，写出数列的前 5 项：

(1) $a_n=n^3$；　　(2) $a_n=1+(-1)^n$；

(3) $a_n=\dfrac{2n+1}{n^2}$；　　(4) $a_n=\cos\dfrac{n\pi}{4}$.

3. 写出数列的一个通项公式，使它的前 4 项分别是下列各数：

(1) 5，10，15，20；

(2) $-\dfrac{1}{1\cdot3}$，$\dfrac{1}{2\cdot4}$，$-\dfrac{1}{3\cdot5}$，$\dfrac{1}{4\cdot6}$；

(3) $\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{2}{5}$，$\dfrac{3}{7}$，$\dfrac{4}{9}$；

(4) $2-\sqrt{2}$，$4-3\sqrt{2}$，$6-5\sqrt{2}$，$8-7\sqrt{2}$.

1.2　等差数列

观察下面数列排列次序的特点：

$$4,5,6,7,8,9,10,11. \qquad (1)$$

$$1,3,5,7,9,11,13,15,\cdots. \qquad (2)$$

$$2,-1,-4,-7,-10,-13,-16,\cdots. \qquad (3)$$

可以看出：每个数列从第 2 项起，每一项与它前一项的差都相等．数列(1)从第 2 项起，每一项与它前一项的差都等于1；数列(2)和(3)也有类似的特点．

一般地，如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的差等于同一个常数，这个数列就叫做**等差数列**，这个常数叫做等差数列的**公差**，通常用字母 d 表示. 数列(1)，(2)，(3)的公差分别是1，2，－3.

根据等差数列的排列规律，当它的首项和公差已知时，可以求出它的通项 a_n.

设一个等差数列的第一项为 a_1，公差为 d，那么

$$a_1=a_1,$$

$$a_2=a_1+d,$$

$$a_3=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+2d,$$

$$a_4=a_3+d=(a_1+2d)+d=a_1+3d,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

由此可知，等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是

$$\boxed{a_n=a_1+(n-1)d.}$$

例 1 求等差数列 8，5，2，…的第 20 项.

解： $\because\ a_1=8, d=5-8=-3, n=20,$

$\therefore\ a_{20}=8+(20-1)\times(-3)$

$=-49.$

例 2 等差数列的前三项为－5，－9，－13，求它的通项公式；且－401是否是它的一项，如果是，是第几项？

解： $a_1=-5, d=-9-(-5)=-4,$

$\therefore$ 通项公式为

$$a_n=-5+(n-1)\times(-4)$$

$$=-4n-1.$$

假设 -401 是数列的第 n 项，则

$$-401=-4n-1.$$

解之得

$$n=100.$$

由于 100 是正整数，所以 -401 是数列的一项，而且是第 100 项.

等差数列的通项公式

$$\begin{aligned} a_n &= a_1+(n-1)d \\ &= nd+a_1-d. \end{aligned}$$

由此可见，a_n 是 n 的一次函数(定义域为自然数集)，所以它的图象是一群排在直线上的孤立点．如图 1-3 就是例 2 数列的图象.

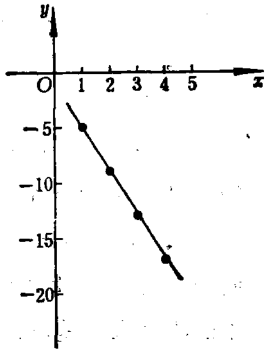

图 1-3

如果在 a 与 b 中间插入一个数 A，使 a，A，b 成等差数列，那么 A 叫做 a 与 b 的**等差中项**.

如果 A 是 a 与 b 的等差中项，那么 $A-a=b-A$，所以

$$A=\frac{a+b}{2}.$$

如果在 a 与 b 中间插入 m 个数，使其成等差数列，那么这 m 个数叫做 a 与 b 的 m 个等差中项.

例 3 如果数列 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}$ 是等差数列，

(1) 指出 a_3, a_5 的等差中项；

(2) 指出 a_2, a_8 的等差中项；

(3) 如果 $a_6=11$，那么 $a_5+a_7=?$ $a_4+a_8=?$

(4) 如果 $a_5+a_6=20$，那么 $a_4+a_7=?$ $a_3+a_8=?$

$$a_2+a_9=? \quad a_1+a_{10}=?$$

解：(1) a_3, a_5 的等差中项是 a_4；

(2) a_2, a_8 的等差中项是 a_5；

(3) $\because$ a_6 是 a_5, a_7 的等差中项，

$\therefore$ $2a_6=a_5+a_7$，

$a_5+a_7=22$；

同理 $a_4+a_8=22$；

(4) $\because$ $a_5+a_6=a_4+d+a_7-d=a_4+a_7$，

$\therefore$ $a_4+a_7=20$.

同理 $a_3+a_8=20$；$a_2+a_9=20$；$a_1+a_{10}=20$.

下面研究求等差数列的前 n 项和的公式.

设等差数列

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots, a_n,$$

它的前 n 项的和是 S_n，即

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n.$$

从例 3 的(4)可知，$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}\cdots$，由此可以把 S_n 分别写成：

$$S_n=a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+\cdots+[a_1+(n-1)d]; \quad (1)$$

$$S_n=a_n+(a_n-d)+(a_n-2d)+\cdots+[a_n-(n-1)d]. \quad (2)$$

把(1)，(2)的两边分别相加，得

$$2S_n=\underbrace{(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\cdots+(a_1+a_n)}_{n\text{个}}$$

$$=n(a_1+a_n).$$

由此得到等差数列$\{a_n\}$的前n项和的公式

$$\boxed{S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}.}$$

因为$a_n=a_1+(n-1)d$，所以上面的公式又可写成

$$\boxed{S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d.}$$

例 4 在等差数列中，

(1) $a_1=5, a_{26}=105$，求S_{26}；

(2) $a_1=5.2, d=0.5$，求S_{43}.

解： (1) $\because\ a_1=5, a_{26}=105, n=26,$

$$\therefore\quad S_{26}=\frac{26(5+105)}{2}=1430;$$

(2) $\because\ a_1=5.2, d=0.5, n=43,$

$$\therefore\quad S_{43}=43\times5.2+\frac{43(43-1)}{2}\times0.5=675.1.$$

例 5 已知等差数列的首项是-28，公差是7，这个数列的前多少项的和为零？

解： $\because\ a_1=-28, d=7, S_n=0,$

由 $S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$，可得

$$0=n\cdot(-28)+\frac{n(n-1)}{2}\times7.$$

整理，得 $7n^2-63n=0$，

$\therefore$ $n=0$ 或 $n=9$.

因为零不是自然数，应舍去.

$\therefore$ 这个数列前 9 项的和为零.

例 6 在等差数列中，$d=2, a_n=1, S_n=-8$，求n.

解： 把 $d=2, a_n=1$，$S_n=-8$ 分别代入等差数列的通项公式和前 n 项和的公式，得

$$\begin{cases}1=a_1+2(n-1), & (1)\\ -8=na_1+n(n-1). & (2)\end{cases}$$

由(1)，得 $a_1=3-2n$，

代入(2)并化简，得

$$n^2-2n-8=0,$$

$\therefore$ $n=4$，$n=-2$.

由于项数不能是负整数，应把 $n=-2$ 舍去，

$\therefore$ $n=4$.

说明： 在等差数列中，知道了 a_1, d, n, a_n, S_n 五个量中的任何三个，就可以通过等差数列的前 n 项和的公式与等差数列的通项公式，求出其它两个量.

练　习

1. (1) 求等差数列 5, 8, 11, …的第 9 项，第 13 项；

(2) 求等差数列 6, $3\frac{1}{2}$, 1, …的第 12 项；

(3) 一个等差数列的第 1 项是 $4\frac{1}{2}$，第 6 项是 7，求第 4 项；

(4) 一个等差数列的第 3 项是 9，第 9 项是 3，求第 12 项.

2. 在等差数列$\{a_n\}$中，

(1) 已知$d=-\frac{1}{3}$，$a_6=8$，求a_1；

(2) 已知$a_4=10$，$a_7=19$，求a_1与d；

(3) 已知$a_1=3$，$a_n=21$，$d=2$，求n.

3. 求下列各组数的等差中项：

(1) -8与6；

(2) $\frac{1}{\sqrt{3}-1}$与$\frac{1}{\sqrt{3}+1}$；

(3) m^2+n^2与$2mn$.

4. 在2与22之间插入四个数，使它们组成等差数列，求这四个数.

5. 在等差数列中，

(1) $a_1=5$，$a_n=105$，$n=26$，求S_n和d；

(2) $a_1=\frac{5}{6}$，$n=34$，$S_n=-158\frac{2}{3}$，求d和a_n.

6. 在三位正整数的集合中，有多少个数是7的倍数？求它们的和.

7. (1)求等差数列13，15，17，…，81的各项的和；

(2)求等差数列10，7，4，…，-47的各项的和.

8. 等差数列的第1项等于2，第2项和第3项分别等于两个连续自然数的平方，求这个等差数列的第2项，第3项及前5项的和.

1.3 等比数列

观察下面数列排列次序的特点：

$$2, 4, 8, 16, \cdots, \tag{1}$$

$$1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \cdots, \tag{2}$$

$$5, 1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}\cdots. \tag{3}$$

每个数列从第2项起，每一项与它前一项的比都是相等的.如数列(1)中，有$\frac{4}{2}=\frac{8}{4}=\frac{16}{8}=\cdots$.

一般地，如果一个数列从第2项起，每一项与它前一项的比等于同一个常数，这个数列就叫做**等比数列**，这个常数叫做等比数列的**公比**，通常用字母 q 表示公比. 如数列(1)，(2)，(3)的公比分别为2，$-\frac{1}{3}$，$\frac{1}{5}$.

如果数列

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

是一个等比数列，公比为 q，那么

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=q,$$

$$a_n=a_{n-1}\cdot q.$$

$$\therefore \quad a_2=a_1q,$$

$$a_3=a_2q=a_1q^2,$$

$$a_4=a_3q=a_1q^3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$a_n=a_1q^{n-1}.$$

所以等比数列的通项公式是

$$\boxed{a_n=a_1q^{n-1}.}$$

例1 某厂制订五年发展规划的第一年产值为640万元，如果每年可以增加产值25%，求这个厂第五年的产值可以达到多少万元？

解： 由题意可知

第一年的计划产值是640万元，

第二年的计划产值是 $640\times(1+25\%)$ 万元，

第三年的计划产值是 $640\times(1+25\%)^2$ 万元，

由此可以看出，这个厂每年的计划产值组成一个等比数列，而

$$a_1=640,\ q=1+25\%=\frac{5}{4},\ n=5.$$

代入通项公式，得

$$a_5=640\times\left(\frac{5}{4}\right)^4=1562.5(\text{万元}).$$

例 2　一个等比数列的第 3 项与第 4 项分别是 12 与18，求它的第 1 项与第 2 项.

解：设这个等比数列的第 1 项是 a_1，公比是 q，那么

$$\begin{cases}a_1q^2=12, & (1)\\ a_1q^3=18. & (2)\end{cases}$$

解方程组，得

$$q=\frac{3}{2},\ a_1=\frac{16}{3}.$$

因此，

$$a_2=a_1q=\frac{16}{3}\times\frac{3}{2}=8.$$

∴　这个数列的第 1 项是$\frac{16}{3}$，第 2 项是8.

例 3　某种商品自投放市场以后三次降价，单价由原来的 125 元降到 64 元，这种商品平均每次降价的百分率是多少？

解：设平均每次降价的百分率是 x，那么每次降价后的单价应是降价前的$(1-x)$倍．这样把原价与三次降价后的单价依次排列，就组成一个等比数列，其中