工科研究生用

数学物理方程及其应用

李运龄　曾宪义　张毓明　编

水利电力出版社

前　言

本书是在武汉水利电力学院及其他院校编写的讲义基础上，结合我们多年来为工科各专业研究生讲授本课程的教学实践，并参阅了国内外有关教材，按照重点讲授60学时左右，由李远聆主持分工编写而成的。

考虑到不同专业研究生入学时数学水平的差异，我们主要以大学本科生已学完《高等数学》为编写起点，并注意了与《工程数学》的关系。部分内容分阶段编排，并有相对的独立性，以适应不同专业、不同层次的教学需要。全书主要以典型方程为线索来作内容的编排，对于应用较多的分离变量法作了由浅入深的安排，以使读者经过几次反复，比较牢靠地掌握它，并对相应的理论作了适当介绍。其间，还列举了可以作为课题的工程实际应用问题。书中基本内容的阐述也尽可能详尽，以方便自学。

全书共十章，每章配有习题。为方便教学，书末还附有：预备知识；特殊函数；分离变量法与格林函数法表解；积分变换表；习题答案。各章的编写分别由武汉水利电力学院李远聆（第一、二、三、八、九章），武汉工业大学曾宪义（第四、五、六、七章）、大连工学院张毓明（第十章）执笔。

在本书的编写过程中，多蒙武汉水利电力学院彭旭麟教授(主审)与武汉工学院王传法副教授(主审)热情指导，并在百忙中分别对第七～十章及第一～六章作了仔细地审阅。又幸得到中国人民解放军装甲兵技术学院杨醒民；中国人民解放军工程技术学院张克福；中国人民解放军空军工程学院吴道报、江明凡、张佳芝；内蒙古工学院赵光前；云南工学院李崇孝；天津纺织工学院阎宝吉，武汉地质学院侯吉占；中国人民解放军空军雷达学院翟国庆、姚兆栋；武汉水运工程学院陆宝珊；长沙铁道学院徐　敏；上海城市建设学院陈德坤；华东化工学院谢国瑞，郑州工学院丁培贵；陕西机械学院刘有炳；华中农业大学余家林；中国人民解放军海军工程学院鄢振汞；北方交通大学曾贻镇；东北电力学院朴钟浩；武汉大学洪礼瑢等许多同志的关心，审阅初稿并提出宝贵的修改意见。在教学过程中，同学们还提了不少有益的建议。武汉水利电力学院和武汉工业大学的各级领导对本书的出版给予了大力支持。在此，一并谨致衷心的感谢。

限于编者的水平，书中错误和缺点在所难免，殷切地希望读者批评指正。

编　　者

1987年2月于武汉·大连

目　　录

第一章　定解问题·方程的分类

数学物理方程主要是指工程技术和自然科学中出现的一些偏微分方程(包括积分方程)，它们反映了物理量关于时间变量的导数和关于空间变量的导数之间的制约关系。我们将着重讨论二阶线性偏微分方程中一些最基本的内容，这些方程在工程技术和科学研究中常常遇到。比如，在强度与位移分析、振动或振荡、水锤、水化热、粒子扩散、各种场(电磁场、流速场、应力场、温度场等)的计算和研究中就会遇到。

由于“有限元方法”在工程中的应用越来越广泛，因此在§1先介绍变分原理，在§2统一用变分方法建立三类典型方程[1]，在§3讨论方程的化简与分类。

§1　变分原理

一、　泛函·变分问题

例1　捷线问题

在铅直平面xOy内，给定不在同一铅直线上的两点$O(0,0)$，$A(a,b)$，如图1-1。在连接O和A的一切曲线中，求一曲线，使得初速为零的质点M只受重力作用自O点沿此曲线下降落到A点，所需的时间T为最短[2]。

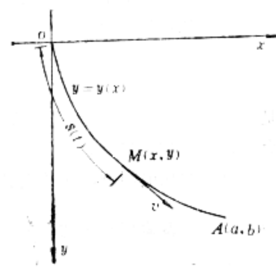

图 1-1

解　在重力场中，质点自点O沿曲线$y=y(x)$降落到点M时，有关系式

$$\frac{1}{2}mv^2=mgy$$

其中g是重力加速度，v为质点下降的速度，m为质点的质量。由此得

$$v=\sqrt{2gy} \tag{1.1}$$

另一方面，质点自O点沿曲线$y=y(x)$下降至M点的速度可表示为

$$v=\frac{ds}{dt}=\frac{\sqrt{1+y'^2}dx}{dt} \tag{1.2}$$

其中$s(t)$是自O到M的弧长。

从(1.1)和(1.2)式得到

$$dt=\frac{\sqrt{1+y'^2}dx}{\sqrt{2gy}}$$

故质点自点$O(0,0)$沿曲线$y=y(x)$下降至点$A(a,b)$所需时间为

$$T=\int_0^T dt=\int_0^a\sqrt{\frac{1+y'^2(x)}{2gy(x)}}dx \tag{1.3}$$

---

[1] 在第九章还将简略介绍变分法应用于求解数学物理方程的问题。

[2] 这个古典问题在机械工程的某些运动问题(比如，齿轮传动)上有重要应用。

于是，上述捷线问题就归结为这样一个数学问题：求一条过定点O和A的单调、光滑曲线$y=y(x)$，使（1.3）式中的T取极小值。

这一类的极值问题不同于通常意义下的函数的极值问题而有它自身的特点．由(1.3)式易知，对于不同的函数$y(x)$，T的值也不同，T是$y(x)$的某种广义的函数．我们称取决于某一类函数中的函数$y(x)$的数J为依赖于函数$y(x)$的**泛函**，记为

$$J=J[y(x)]$$

（一般地，称由距离线性空间X到数域K中的映射为X上的泛函，并称X为该泛函的定义域）

例如在上述（1.3）式中，T就是以过O、A两点的具有连续导数的函数集合为定义域的$y(x)$的泛函。

又如，连接给定两点$A(x_0, y_0)$和$B(x_1, y_1)$的曲线$y=y(x)$的弧长

$$J[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx \tag{1.4}$$

是依赖于$y(x)$的泛函，以通过A，B两点的具有连续导数的函数集合为该泛函的定义域。

又例如，位于xOy面的区域D上方的曲面$z=z(x,y)$的面积

$$J[z(x,y)]=\iint_D\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\;dx\,dy \text{ ●} \tag{1.5}$$

是依赖于二元函数$z(x, y)$的泛函，以通过给定边界并具有一阶连续偏导数的二元函数集合为该泛函的定义域。

泛函的极值问题，又称**变分问题**或变分法的基本问题。

二、 基本引理·极值的必要条件

考虑泛函

$$J[y(x)]=\int_a^b f(x, y, y')\,dx \tag{1.6}$$

其中f对x,y,y'的二阶偏导数连续．我们要从满足边界条件

$$y(a)=c,\quad y(b)=d \tag{1.7}$$

的C^1类曲线中，寻求使泛函（1.6）式取极值的曲线（C^k表示k阶导数连续的函数类，如，C^1为导数连续的函数类，C为连续函数类）。

在$[a, b]$区间上，设有一曲线$y=\xi(x)\in C^1$及一族曲线$y=y(x)\in C^1$，它们都满足边界条件（1.7）。

若对于任意的$\varepsilon>0$，不等式

$$|y(x)-\xi(x)|<\varepsilon \text{ 及 } |y'(x)-\xi'(x)|<\varepsilon$$

对区间$[a, b]$上任一点x都成立，则称$y(x)$属于$\xi(x)$的一阶ε邻域，记为$y(x)\in\xi^{[1]}(x)$，这里记号[1]表示一阶ε邻域。

对于满足

$$y(x)\in\xi^{[1]}(x)$$

的函数集合中的所有函数$y(x)$，若

● z_x表示z'_x，z_y表示z'_y，下同。

$$J[\xi(x)] \leqslant J[y(x)]$$

成立，则称泛函$J[y(x)]$在曲线$y=\xi(x)$上取得极小值，类似地可定义极大值。这是相对极大（小）值，以后简称**极值**，使泛函J取极值的曲线，称为**极值曲线**。

基本引理 设在$[a,b]$上，$\eta(x)\in C^1$且$\eta(a)=\eta(b)=0$。若在$[a,b]$上$f(x)\in C$并对任意的$\eta(x)$有

$$\int_a^b f(x)\eta(x)dx=0$$

则在$[a,b]$上$f(x)\equiv 0$。

证 用反证法。若对于某点$\xi\in[a,b]$有$f(\xi)\neq 0$，不妨设$f(\xi)<0$。取$\xi\in[c,d]$，$[c,d]\subset[a,b]$，则在含ξ的某个小区间$[c,d]$上，有$f(x)<0$（据f的连续性）。既然$\eta(x)$任意，于是可以选取符合引理条件的如下形式的

$$\eta(x)=\begin{cases}0, & a\leqslant x\leqslant c\\ (x-c)^2(x-d)^2, & c<x\leqslant d\\ 0, & d<x\leqslant b\end{cases}$$

但积分

$$\int_a^b f(x)\eta(x)dx=\int_c^d f(x)(x-c)^2(x-d)^2dx<0$$

与引理的假设矛盾，故在$[a,b]$上，有$f(x)\equiv 0$。

现在讨论泛函（1.6）取极值的必要条件。

设$y=y(x)$是泛函（1.6）的极值曲线，$y(x)\in C^2$，$f\in C^2$.任意选定的$\eta(x)$符合基本引理的条件。任给$\varepsilon>0$，我们取$|\alpha|$充分小，使得

$$y(x)+\alpha\cdot\eta(x)\in y^{(1)}(x)$$

由于$y(x)$，$\eta(x)$，ε都给定，因而（1.6）变为参数α的一元函数

$$J(\alpha)=\int_a^b f[x,y(x)+\alpha\,\eta(x),\ y'(x)+\alpha\,\eta'(x)]dx \tag{1.8}$$

由于$y=y(x)$是极值曲线，故上述一元函数$J(\alpha)$当$\alpha=0$时取极值，因而有

$$J'(0)=0 \quad 即 \quad J'(\alpha)\big|_{\alpha=0}=0$$

利用对参数α求导数的法则●，可得

$$J'(0)=\int_a^b [f_y(x,y,y')\eta(x)+f_{y'}(x,y,y')\eta'(x)]dx$$

对等式右端第二项运用分部积分法，得

$$J'(0)=\int_a^b f_y\cdot\eta(x)dx+f_{y'}\cdot\eta(x)\Big|_a^b-\int_a^b\eta(x)\frac{d}{dx}f_{y'}dx$$

$$=f_{y'}\cdot\eta(x)\Big|_a^b+\int_a^b\Big[f_y-\frac{d}{dx}f_{y'}\Big]\eta(x)dx$$

其中，

$$f_y=\frac{\partial}{\partial y}f[x,y(x),y'(x)],$$

$$f_{y'}=\frac{\partial}{\partial y'}f[x,y(x),y'(x)].$$

● 参看附录Ⅰ.

再利用条件 $\eta(a)=0$, $\eta(b)=0$，于是，由上式知$J'(0)=0$就变为

$$\int_a^b [f_y-\frac{d}{dx}f_{y'}]\eta(x)dx=0 \tag{1.9}$$

由基本引理，可得

$$f_y-\frac{d}{dx}f_{y'}=0 \tag{1.10}$$

即

$$f_y-f_{y'x}-y'\cdot f_{y'y}-y''\cdot f_{y'y'}=0 \tag{1.11}$$

这就是极值曲线$y=y(x)$所应满足的方程。若$f_{y'y'}\neq 0$，它就是二阶常微分方程。通常，称（1.10）式为泛函（1.6）的欧拉（Euler）方程。若泛函（1.6）有极值，则其极值曲线可从它的欧拉方程的积分曲线族中去求。因此，泛函（1.6）的欧拉方程就是它取极值的必要条件。

由于方程（1.10）是二阶常微分方程，其通解有两个任意常数，可由满足边界条件（1.7）的极值曲线确定。

在《变分学》中，函数$J(\alpha)$在$\alpha=0$时的导数$J'(0)$与微小参数α的乘积$J'(0)\alpha$，通常被称为泛函(1.6)的（一次）变分，记为

$$\delta J=J'(0)\cdot\alpha \tag{1.12}$$

其实，这就是一元函数$J(\alpha)$在$\alpha=0$处的微分。如果将极值曲线$y=y(x)$与和它邻近的曲线$y=y(x)+\alpha\eta(x)$之差记为

$$\delta y=\alpha\eta(x)$$

则泛函（1.6）的变分为

$$\delta J=J'(0)\alpha=f_{y'}\delta y\Big|_a^b+\int_a^b[f_y-\frac{d}{dx}f_{y'}]\delta y dx \tag{1.13}$$

因此，泛函（1.6）取极值的必要条件又可叙述为它的一次变分为零，即 $\delta J=0$。

下面我们来解例1中的捷线问题，这个问题的数学提法是：求泛函

$$J=\int_0^a\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}dx \tag{1.14}$$

满足边界条件$y(0)=0$，$y(a)=b$的极值曲线。

解 $f=\dfrac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}$，不显含$x$，由（1.11）式知欧拉方程为

$$y''f_{y'y'}+y'f_{y'y}-f_y=0$$

可以验证，其首次积分为

$$f-y'f_{y'}=c_1$$

事实上

$$\frac{d}{dx}(f-y'f_{y'})=f_y\cdot y'+f_{y'}\cdot y''-y''f_{y'}-y'^2f_{y'y}-y'y''f_{y'y'}$$

$$=-y'(f_{y'y'}\cdot y''+f_{y'y}\cdot y'-f_y)=0$$

于是，对于捷线问题，得其欧拉方程的首次积分为

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}-y'\cdot\frac{y'}{\sqrt{2gy}\cdot\sqrt{1+y'^2}}=c_1$$

化简得$y(1+y'^2)=c_2$，解此方程，并利用边界条件$y(0)=0$，可得极值曲线的参数方程是摆线

$$\begin{cases} x=\dfrac{c_2}{2}(t-\sin t) \\ y=\dfrac{c_2}{2}(1-\cos t) \end{cases}$$

其中常数c_2可利用另一边界条件$y(a)=b$定出。

我们指出，由于欧拉方程只是泛函的极值曲线所应满足的必要条件。因此，由欧拉方程求出的积分曲线就不一定是极值曲线。但是，对于许多实际问题，欧拉方程的积分曲线常常就是极值曲线。在此，我们只限于导出欧拉方程，而不作有关极值充分性问题的复杂讨论。

下面，我们限于不动边界条件下的变分问题将欧拉方程（1.10）加以推广。但略去其证明。

1．依赖于多个函数的泛函　在泛函

$$J[y_1, y_2, \cdots, y_n]=\int_{x_0}^{x_1} f(x; y_1, y_2, \cdots, y_n; y_1', y_2', \cdots, y_n')dx$$

中，给定了边界条件

$y_i(x_0)=y_{i0}$，$y_i(x_1)=y_{i1}$，$i=1, 2, \cdots, n$

这泛函在　$y_i=y_i(x)$　$(i=1, 2, \cdots, n)$有极值的必要条件是这些函数应满足下述欧拉方程组

$$f_{y_i}-\frac{d}{dx}f_{y_i'}=0 \quad (i=1, 2, \cdots n) \tag{1.15}$$

2、依赖于高阶导数的泛函　在泛函

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)})dx$$

中，给定了边界条件

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ \cdots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$$
$$y(x_1)=y_1,\ y'(x_1)=y_1',\ \cdots,\ y^{(n-1)}(x_1)=y_1^{(n-1)}$$

这泛函在$y=y(x)$上取得极值的必要条件是这函数$y(x)$应满足欧拉方程

$$f_y-\frac{d}{dx}f_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}f_{y''}-\cdots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}f_{y^{(n)}}=0 \tag{1.16}$$

3、依赖于多元函数的泛函　以两个自变量为例，在二重积分泛函

$$J[u(x, y)]=\iint_D f(x, y, u, u_x, u_y)dxdy$$

中，给定了边界条件

$$u(x, y)\Big|_\Gamma=\varphi$$

其中，Γ是区域D的边界曲线，φ已知。

当$u=u(x,y)$时，上述二重积分泛函有极值的必要条件为这函数$u(x,y)$应满足奥斯

特罗格拉得斯基方程（简称奥氏方程）

$$f_u - \frac{\partial}{\partial x} f_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} f_{u_y} = 0 \tag{1.17}$$

它是一个二阶偏微分方程。

仿此，比如对于下述三重积分泛函

$$J[u(x,y,z)] = \iiint_V (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)dxdydz$$

其奥氏方程就为

$$\Delta_3 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$$

通常称它为拉普拉斯（Laplace）方程，称Δ_3为三维拉普拉斯算子.

三、 变分原理

物理学中的原理类似于数学中的公理，都来源于社会实践，不能进行证明，而是推理的出发点。应当指出的是，下述原理皆已为近一、二百年的生产实践所肯定。

1、哈米尔顿（Hamilton）原理 任何力学系统，若给定时刻t_0的初始状态和t_1的终了状态，则真实运动区别于任何容许运动的地方在于：真实运动使定积分（泛函）

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \left[\iiint_V (T-U)\,dxdydz \right] dt$$

的（一次）变分为零（以使泛函J取极小的方式运动），即：$\delta J = 0$ 其中，V是力学系统所占有的空间区域，T和U分别为力学系统单位体积在时刻t的动能和位能密度。

2、最小位能原理 任何静止的平衡稳定系统，其真实状态区别于任何容许状态的地方在于：真实状态使位能积分（泛函）

$$J = \iiint_V U\,dxdydz$$

的（一次）变分为零，即 $\delta J = 0$.

最小位能原理可看作哈米尔顿原理的特例。因为对于静止物理系统来说，其总动能在任何时刻为零，且位能不随时间变化。

§ 2 方程导出●·定解问题

一、 均匀弦的横振动·波动方程

见图1-2。设有沿x轴张紧的弦，两端固定于$x=0$和$x=l$处，在x-u平面内作微小的横振动，$u(x,t)$表示弦在点x于时刻t的位移。

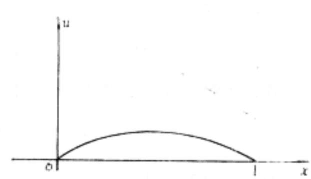

图 1-2

容易计算振动弦在时刻t的动能为

$$T = \frac{1}{2}\int_0^l \rho(x) u_t^2(x,t)dx$$

● 本书是利用变分来建立方程，也可以利用力学、热学定律、场论等知识来建立方程(可参看有关参考书).

其中$\rho(x)$是弦的质量线密度．设均匀弹性柔软弦拉伸后所具有的位能与长度的增量成正比，比例系数τ称为张力，又由于振幅很微小，有$u_x^2 \ll 1$，从而含u_x的二次以上的高次项可以略去。于是得形变位能为

$$\tau\cdot\left[\int_0^l\sqrt{1+u_x^2}\,dx-l\right]\approx\frac{\tau}{2}\int_0^l u_x^2\,dx$$

这里用了牛顿二项展开公式并只取前面两项。

如果弦还受到线密度为$F(x,t)$的外力作用，力的正向与u轴正向一致，则与外力作功所对应的位能是

$$-\int_0^l F(x,t)\,u(x,t)\,dx$$

于是有能量积分泛函

$$J=\int_0^t\left\{\frac{1}{2}\int_0^l\left[\rho u_t^2-\tau u_x^2+2F\cdot u\right]dx\right\}dt$$

由变分原理，J应取极值，故得其奥氏方程为

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_t)-\frac{\partial}{\partial x}(\tau u_x)-F=0$$

由于弦是均匀的，即ρ和τ都是常量，则上述方程化为

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t) \qquad (1.18)$$

其中，$a^2=\frac{\tau}{\rho}$，$f(x,t)=F(x,t)/\rho$。我们称（1.18）为弦的**强迫振动方程**或**一维非齐次波动方程**，它是二阶线性[1]非齐次的偏微分方程，f称为自由项。

若 $f\equiv0$，则得弦的自由振动方程（或一维齐次波动方程）

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \qquad (1.19)$$

式（1.18）与（1.19）描述的是一维（关于空间坐标）振动或波动现象。比如，梁、柱、杆的振动，一维（管道、渠道、电缆）流体波、电波等都是这种现象。

二、 均匀膜的横振动·位势方程

对于内力矩与张力相比较可以忽略的薄壳结构或可以自由弯曲的薄板，就可当作"膜"。

膜在拉伸后所具有的形变位能与其面积的增量成正比，比例系数τ称为张力。对于均匀的膜，τ为常数，其质量面密度ρ也是常数。

现在考虑置于$x-y$平面上的均匀膜在垂直于$x-y$平面上某有界区域D的外力作用下的微小横振动。

设外力的面密度为$F(x,y,t)$．膜垂直于$x-y$平面的位移为$u(x,y,t)$，并取外力的正向与u轴正向一致，和弦振动问题作类似的分析，可得到如下的能量积分

$$J_1=\int_0^t\left\{\iint_D\left[\frac{\rho}{2}u_t^2-\frac{\tau}{2}(u_x^2+u_y^2)+Fu\right]dx\,dy\right\}dt$$

这里，已略去了u_x，u_y的二次以上高次幂的项。

运用变分原理，计算其奥氏方程，即得膜的强迫振动方程为

$$\rho u_{tt}-\tau(u_{xx}+u_{yy})=F(x,y,t)$$

[1] 如果对未知函数的所有最高阶导数是线性的，则称它为拟线性方程，如$u_t+uu_x=0$。

或 $$u_{tt}-a^2\Delta_2 u=f(x,y,t),\ (x,y)\in D,\ t>0 \tag{1.20}$$

其中，Δ_2是二维拉普拉斯算子，$a^2=\frac{\tau}{\rho}$，$f=\frac{F}{\rho}$.

若 $f=0$，则得膜的自由振动方程为

$$u_{tt}-a^2\Delta_2 u=0 \tag{1.21}$$

如果外力为$F=F(x,y)$不随时间变化，则在容许情况下（一般指膜位移在弹性限度以内），膜处于静平衡状态，这时，位移$u=u(x,y)$不随t而变，$u_{tt}=0$。于是式（1.20）与（1.21）分别变为

$$\Delta_2 u=\frac{-1}{a^2}f=g(x,y) \tag{1.22}$$

及 $$\Delta_2 u=0 \tag{1.23}$$

并称(1.22)式为二维泊松（Poisson）方程，称(1.23)式为二维拉普拉斯方程或二维**调和方程**，它们被统称为**位势方程**[1].

现在考虑静电场的位势问题.

设空间区域Ω内各点电位为$u(x,y,z)$，电荷密度为$\rho(x,y,z)$。根据静电学中的讨论，可知Ω中的总电能（位能）是三重积分泛函

$$U=\iiint_{\Omega}\left[\frac{1}{8\pi}(u_x^2+u_y^2+u_z^2)-\rho u\right]dxdydz \tag{1.24}$$

由最小位能原理可得上述泛函取极值的奥氏方程为

$$-\rho-\frac{1}{8\pi}(2u_{xx}+2u_{yy}+2u_{zz})=0$$

于是得描述静电场的方程为

$$\Delta_3 u=-4\pi\rho(x,y,z)=h(x,y,z) \tag{1.25}$$

这是三维泊松方程。

若Ω中无电荷分布，则得三维拉普拉斯方程或三维**调和方程** $\Delta_3 u=0$[2].

三、 扩散方程

现在讨论热传导、物质扩散等物理现象，以热传导问题为例.

考虑空间某物体Ω的热传导问题.用$u(x,y,z,t)$表示Ω在点(x,y,z)处于时刻t的温度.这时，要用到傅里叶(Fourier)实验定律：物体在无穷小时段dt内流过无穷小dS面积的热量dQ与时间dt，面积dS以及物体温度u沿曲面dS法线方向的导数$\frac{\partial u}{\partial n}$三者的乘积成正比，即

$$dQ=-k\frac{\partial u}{\partial n}dSdt$$

其中，k称为热传导系数，对于均匀物体，k为正常数。

热量只能从温度高处传导到温度低处，随着时间的推移，温度分布总是趋于某种动态或

[1] 有时也称拉普拉斯方程为位势方程。它描述的稳定场出现在许多物理问题中，例如静电场的电位、流体的势函数及弹性理论中的调和位势等。

[2] 在不致引起混淆时，Δ_2或Δ_3可简记为Δ。

静态平衡。比如，把具有某种温度分布而无热源的物体置于保持常温比如零度的介质中，则随着时间的推移该物体温度的分布就会由于热的传导而趋于零度。但是，反过来，不能由物体温度分布的这个终结状态（零度）去推导它们以前的温度分布。我们称这种现象为不可逆的❶.因此，热传导过程是不可逆过程，物质的扩散也是不可逆过程。

以前所讨论的乃是能量可逆转换且无耗损的情形。对于热传导、扩散等不可逆过程，应用变分原理时需要修正。对于热传导问题，我们引进反传导介质的温度 v，根据传热学可得泛函

$$J=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iiint_{\Omega}\left[-k(\nabla u)\cdot(\nabla v)-\frac{1}{2}(vu_t-uv_t)\right]dv\right\}dt$$

其中，∇为哈密尔顿算子($\nabla=\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathrm{k}\frac{\partial}{\partial z}$)，项$(\nabla u)\cdot(\nabla v)$与（1.24）式中的项$(\nabla u)^2=u_x^2+u_y^2+u_z^2$相当，而项$\frac{1}{2}(vu_t-uv_t)$则由$\frac{1}{2}u_t^2$转化而来。

对v计算J的变分，得奥氏方程为

$$f_v-\frac{\partial}{\partial x}f_{v_x}-\frac{\partial}{\partial y}f_{v_y}-\frac{\partial}{\partial z}f_{v_z}-\frac{\partial}{\partial t}f_{v_t}=0$$

即 $$-\frac{1}{2}u_t-(-ku_x)_x-(-ku_y)_y-(-ku_z)_z-\frac{1}{2}u_t=0$$

故得 $$u_t-k\Delta_3u=0$$

或 $$u_t-a^2\Delta_3u=0\qquad(a^2=k)\tag{1.26}$$

若物体内部有热源（比如混凝土部件内的水化热，导体通电等）或冷源，记为$f(x,y,z,t)$，则有

$$u_t-a^2\Delta_3u=f(x,y,z,t)\tag{1.27}$$

其中Δ_3是三维拉普拉斯算子，称式（1.26）、（1.27）为**热传导方程**。

考虑扩散过程时，可利用斐克（Fick）扩散实验定律❷

$$dm=-D\frac{\partial N}{\partial n}dSdt$$

其中，dS为面积元，n为其法向，dm为穿过dS的扩散质量，$N(x,y,z,t)$是扩散介质的浓度，D是扩散常数。

这时所得**扩散方程**就与（1.26）或（1.27）在数学形式上完全相同。

四、 定解问题

为了确定所研究的特定物理系统的具体运动规律，仅有反映一般性规律的偏微分方程（称为**泛定方程**）还不够，还必须考虑周围环境的影响（边界条件）及系统的初始状态（初始条件）。

---

❶ 变化过程是否可逆，在数学上反映为方程关于时间t是否对称，即以$-t$代t后，方程是否不变。

❷ 它相当于传热学中的Fourier实验定律。

在**弦振动**问题中，弦的两端被固定在$x=0$及$x=l$处，对于这两个端点，位移函数$u(x,t)$满足

$$u(0,t)=0,\qquad u(l,t)=0,\qquad t\geqslant 0 \tag{1.28}$$

由于式(1.28)给出的是边界上的函数值，通常称这种形式的边界条件为**第一类边界条件**.

假若弦的一端（比如$x=l$一端）为自由端（指可以在垂直于x轴的方向自由滑动），则由$T\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$，有边界条件

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=0,\qquad t\geqslant 0 \tag{1.29}$$

式（1.29）给出了边界处函数u沿x轴正方向（二、三维情形，为沿边界曲线或曲面的外法线方向）的偏导数值，通常称其为**第二类**边界条件.

如果边界条件为（1.28）与（1.29）的线性组合

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}+ku\right]_{x=l}=\mu(t),\qquad t\geqslant 0 \tag{1.30}$$

则称其为**第三类**边界条件. 当$\mu(t)=0$，称为**齐次**边界条件，否则为**非齐次**边界条件(类似地，第一、二类边界条件也有齐次、非齐次之分）.

在初始时刻$t=0$，如果给出了弦上各点的位移和速度为

$$\begin{cases} u(x,0)=\varphi(x), \\ u_t(x,0)=\psi(x), \end{cases}\qquad 0\leqslant x\leqslant l \tag{1.31}$$

则称（1.31）式为**初始条件**. 当$\varphi\equiv\psi\equiv 0$，称为齐次初始条件（或零初始条件），否则为非齐次初始条件（或非零初始条件）.

边界条件与初始条件都称为**定解条件**.

泛定方程与一定的定解条件结合起来，就称为**定解问题**.

若定解条件只有边界条件，就称相应的定解问题为**边值问题**.

若定解条件只有初始条件，就称相应的定解问题为**初值问题**或柯西(Cauchy)问题. 既有边界条件又有初始条件的定解问题称为**混合问题**. 例如，把弦振动问题的泛定方程(1.18)和定解条件（1.28），（1.31）结合起来，就得到如下的弦振动方程混合问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t), & 0<x<l,\ t>0, \\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x), & 0\leqslant x\leqslant l, \\ u(0,t)=0,\ u(l,t)=0, & t\geqslant 0. \end{cases}$$

所谓在x-t平面上的无界矩形区域$0\leqslant x\leqslant l, t\geqslant 0$上求上述弦振动混合问题的解，就是指，要找出这样的适当光滑的函数$u=u(x,t)$，使得它在区域$0<x<l, t>0$内满足泛定方程，在区间$0\leqslant x\leqslant l$上满足初始条件，在边界$x=0$及$x=l$处满足边界条件.

建立数学模型（列出定解问题）以后，就要设法求出这个定解问题的解. 由于反映各个实际问题的定解问题千差万别，若逐一的去探求，既难穷尽又实无必要. 从下一节的讨论结果会看到，同一个泛定方程所反映的不只是一个而是整个一类的物理现象. 因而只需对典型方程进行讨论，其结果可以用来解释它所代表的整个一类物理现象.

§ 3 方程的化简与分类·特征方程

上一节我们利用变分原理导出了波动方程、热传导方程与调和方程。这三类方程虽然是形式很特殊的方程，但在二阶线性偏微分方程中，它们是三个典型代表。一般的二阶线性偏微分方程（以后简称方程）的共性与差异，往往可以从对这三类典型方程的研究中得到。

一、 方程的化简·特征方程

若用(x, y)记自变量，那么对两个自变量情形，一般的二阶线性方程可以写成如下的形式

$$Au_{xx}+Bu_{xy}+Cu_{yy}+Du_x+Eu_y+Fu+f=0 \tag{1.32}$$

其中，A、B、C、D、E、F、f都是区域Ω上x、y的已知的实函数，并假定它们二次连续可微，且A、B、C不同时为零。

现在对于式（1.32）在区域Ω的某点(x_0, y_0)的邻域内进行化简。为此，作自变量的变换

$$\begin{cases} \xi=\xi(x, y) \\ \eta=\eta(x, y) \end{cases} \tag{1.33}$$

其中，ξ、η是二次连续可微函数，且在点(x_0, y_0)邻域内雅可比（Jacobian）行列式

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)}\neq 0$$

将变换（1.33）代入（1.32），可将（1.32）化成关于新变量ξ、η的方程

$$A'u_{\xi\xi}+B'u_{\xi\eta}+C'u_{\eta\eta}+D'u_\xi+E'u_\eta+F'u+f'=0 \tag{1.34}$$

其中

$$\begin{cases} A'=A(\xi_x)^2+B\xi_x\xi_y+C(\xi_y)^2 \\ C'=A(\eta_x)^2+B\eta_x\eta_y+C(\eta_y)^2 \\ B'=2A\xi_x\eta_x+B(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+2C\xi_y\eta_y \end{cases} \tag{1.35}$$

如果引入记号

$$Lu=Au_{xx}+Bu_{xy}+Cu_{yy}+Du_x+Eu_y+Fu$$

及

$$Q=\begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix} \qquad \det Q\neq 0$$

则（1.35）式可表示为

$$\begin{pmatrix} A' & B'/2 \\ B'/2 & C' \end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix}Q^{\mathrm{T}}$$

其中Q^{T}表示Q的转置，而$D'=L\xi-F\xi$，$E'=L\eta-F\eta$，$F'=F$，$f'=f$

为使（1.34）式关于变量ξ、η的二阶导数项化为标准形，可设法选取适当的变换（1.33）。

我们首先注意到（1.35）式中的第一、二两个式子的形式相同。因此，如果令它们等于零，也就是说，如果能从方程

$$A\varphi_x^2+B\varphi_x\varphi_y+C\varphi_y^2=0 \tag{1.36}$$

解出两个函数无关解$z_1=\varphi_1(x,y)$，$z_2=\varphi_2(x,y)$，我们就取

$$\begin{cases}\xi=\varphi_1(x,y)\\ \eta=\varphi_2(x,y)\end{cases}$$

从而有$A'=0$，$C'=0$。

关于一阶非线性偏微分方程（1.36）解的存在性，可以由下面将提到的相应的常微分方程的首次积分的存在性得到保证。

容易验证，式（1.36）的求解问题与下述常微分方程

$$Ady^2-Bdxdy+Cdx^2=0 \tag{1.37}$$

在$x-y$平面上求其积分曲线的问题等价。也就是说，若$\varphi(x,y)$为（1.36）式的解，则由$\varphi(x,y)=k$所确定的函数y是（1.37）的解；反之，若$\varphi(x,y)=k$是(1.37）的积分曲线，则$z=\varphi(x,y)$是（1.36）式的解。

事实上：若$z=\varphi(x,y)$是（1.36）式的解，不妨设$A\neq0$（A和C至少有一个不为零，否则方程（1.32）就是标准形式了），并且也不妨设$\varphi_y\neq0$（因为如果$\varphi_y=0$，由（1.36）式可知$\varphi_x=0$，从而$\varphi(x,y)$为常数。同理可设$\varphi_x\neq0$。）由隐函数求导数法则，在$\varphi(x,y)=k$两边对x求导数得

$$\varphi_x+\varphi_y\cdot y'=0$$

由此得

$$y'=-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\quad 或\quad \varphi_x=-\varphi_y\cdot y'$$

由于$z=\varphi(x,y)$是（1.36）式的解，代入（1.36）得

$$A(-\varphi_y\cdot y')^2+B(-\varphi_y y'\cdot\varphi_y)+C\varphi_y^2=0$$

除以 $\varphi_y^2\neq0$ 得

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-B\frac{dy}{dx}+C=0$$

即 $Ady^2-Bdxdy+Cdx^2=0$

这就证明了由$\varphi(x,y)=k$所确定的函数$y=y(x)$满足(1.37).反之,同理可证：若$\varphi(x,y)=k$是（1.37）的积分曲线，则$z=\varphi(x,y)$是（1.36）式的解。

这说明方程（1.36）的解可以由解方程（1.37）而得。因此，我们称（1.37）或

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-B\left(\frac{dy}{dx}\right)+C=0\qquad(A\neq0) \tag{1.38}$$

为（1.32）的**特征方程**。特征方程的积分曲线称为（1.32）的**特征线**。如果$C\neq0$，则特征方程可取如下形式。

$$A-B\left(\frac{dx}{dy}\right)+C\left(\frac{dx}{dy}\right)^2=0\qquad(C\neq0) \tag{1.39}$$

现在就$A\neq0$的情形求（1.38）式的积分曲线。由（1.38）得两个微分方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A} \tag{1.40}$$