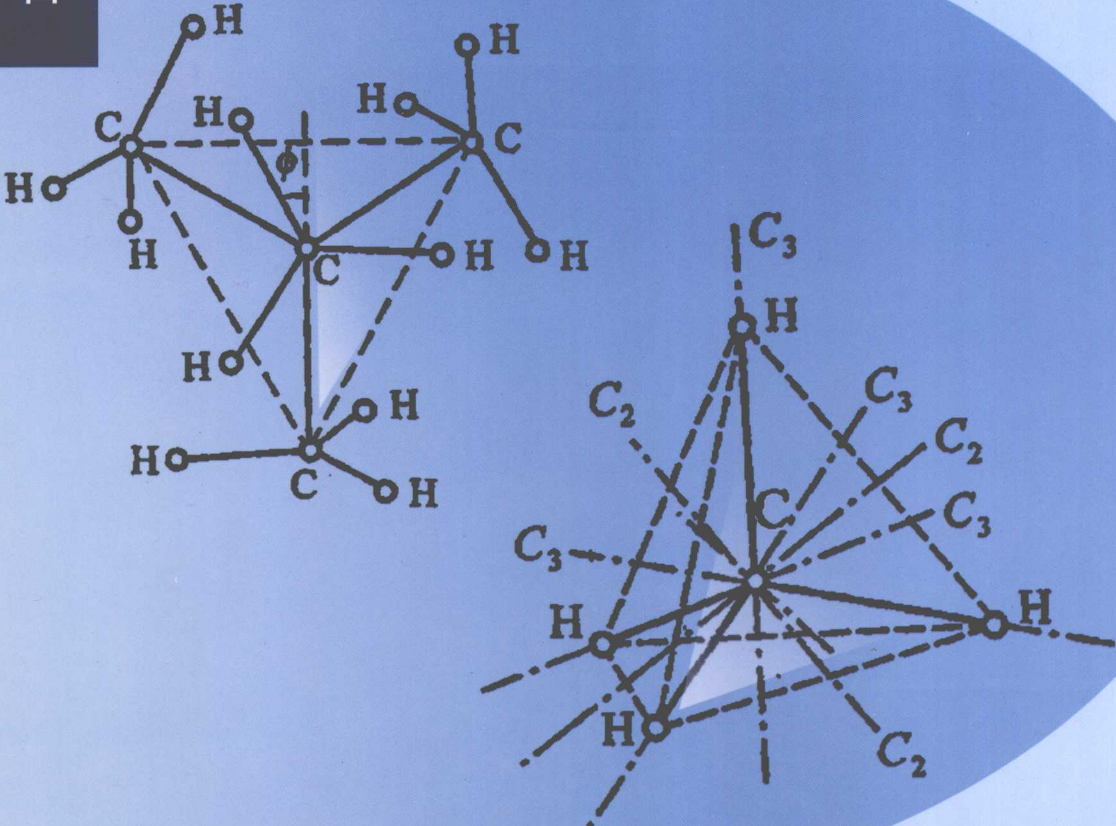
浙江省重点专业资助项目
杭州市重点学科资助项目

QUN DE JIEGOU YU DUICHENXING

群的结构与对称性

陈辉 著



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

浙江省重点专业资助项目
杭州市重点学科资助项目

群的结构与对称性

陈　辉　著

浙江大學出版社

图书在版编目（CIP）数据

群的结构与对称性 / 陈辉著. —杭州：浙江大学出版社，2008.12

ISBN 978-7-308-06443-9

Ⅰ.群… Ⅱ.陈… Ⅲ.群论 Ⅳ.0152

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 199078 号

群的结构与对称性

陈　辉　著

责任编辑　阮海潮(ruan100@yahoo.cn)

封面设计　刘依群

出版发行　浙江大学出版社

（杭州市天目山路 148 号　邮政编码 310028）

（E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn）

（网址：http://www.zjupress.com

http://www.press.zju.edu.cn）

电话：0571—88925592，88273066（传真）

排　　版　杭州中大图文设计有限公司

印　　刷　德清县第二印刷厂

开　　本　787mm×960mm　1/16

印　　张　19

字　　数　430 千

版 印 次　2008 年 12 月第 1 版　2008 年 12 月第 1 次印刷

书　　号　ISBN 978-7-308-06443-9

定　　价　37.00 元

内 容 简 介

群论自 19 世纪由 Galois 创立以来，不仅成为近代代数的重要分支，而且其应用范围已深入到科学技术的各个领域．尤其是自然科学的物理、化学和生物的研究中，群论已成为必不可少的强有力的数学工具．对称性是自然界最普遍、最重要的特性．自然界的所有重要的规律均与某种对称性有关，甚至所有自然界中的相互作用，都具有某种特殊的对称性．虽然对称的概念看来是很明显的，但为了给对称这个概念一个精确的和一般的描述，特别是对称性的量上的计算，却需要利用群论这个工具。本书系统地介绍群的对称性及其应用．

全书共分七章，对称与群初步、群的对称性与群的结构、群表示论基础、代数方程的对称性、物理学中的对称群、分子对称群及 Lie 群结构的对称性．其中群与群的表示理论是本书的基础．

本书着眼于方法论的阐述，不仅引入概念，阐述理论，而且附有大量的应用实例，涉及了数学、物理学、化学、材料科学和工程技术各方面，使读者领悟群的对称性的科学含义及广泛应用背景．

前　言

群论自19世纪由Galois创立以来，不仅成为近代代数的重要分支，而且其应用范围已深入到科学技术的各个领域．尤其是自然科学的物理、化学和生物的研究中，群论已成为必不可少的强有力的数学工具．

客观世界普遍存在各种各样的对称性，而群论正是描述、反映和研究对称性的数学武器，因此从其诞生至今，就存在一个由纯粹数学领域扩展到其他自然科学领域的必然现象．Galois利用群的对称性证明了五次或五次以上的代数方程不能通过初等代数方法求得方程的精确解．

20世纪，传统群论与现代拓扑学、流形的概念相结合，形成拓扑群的新理论．就在群论不断发展不断现代化的过程中，我们看到许多群论大师，如E. Cantan、H. Weyl、G. Racah、E. P. Wigner等同时又是物理学大师．群论迅速在量子力学、光谱学、角动量理论、原子核谱等物理学领域得到广泛应用．

对称性是自然界最普遍、最重要的特性．《可怕的对称》一书的作者认为，上帝是按照“对称”的美学思想来设计自然的．

近代科学表明，自然界所有重要的规律均与某种对称性有关，甚至所有自然界中的相互作用，都具有某种特殊的对称性——所谓“规范对称性”．实际上，对称性研究的日趋深入，已越来越广泛地应用到物理的各个分支：量子论、高能物理、相对论、原子与分子物理、晶体物理、原子核物理，以及化学（晶体的分类、分子轨道理论、配位场理论等）、生物（DNA的构型对称性等）和工程技术．

虽然对称的概念看来是很明显的，但为了给对称这个概念一个精确的和一般的描述，特别是对称的性质的量上的计算，却需要利用群论这个工具，我们强调“对称即群”的观点．

在 1890 年,Federov 和 Schoen Files 就利用群的对称性系统解决了晶体结构分类问题,证明了具有周期性排列的空间点阵总共有 230 种,使人大开眼界. 1893 年,挪威科学家 Sophus Lie 和 Scheffer 将群论与微分方程结合起来,使有限群的概念扩展到无限群、连续群,导致现代李群的建立.

20 世纪 50 年代末到 60 年代中期,在基本粒子研究中,SU(3)理论、夸克模型等的巨大成功,形成了群论向其他学科"普及"的一次热潮. 时至今日,群对称性的应用领域不仅遍及物理学各个领域,而且扩展到化学、生物、材料科学、流体力学、机械、电工学等等.

群与群的表示理论是本书的基础. 在讨论时我们选择一些较深入的内容,对群论,选择 Sylow 定理、有限交换群的结构定理和 Galois 理论等. 好的数学思想是一定会在不同场合下重复出现的. 使初学者能看到这些重复是有益的. 在本书中分解型结构思想重复出现在有限交换群的结构定理中,Galois 对应思想重复出现在 Galois 理论中.

由于教学的需要,不过于追求数学理论的完备与严格,尽可能从大家较为熟悉的具体事例出发,阐述有关概念;尽可能多地列举应用实例。本书的应用实例,涉及了数学、物理学、化学、材料科学和工程技术各方面。本书着眼于方法论的阐述,希望能起到举一反三的效果,以帮助读者在群论与对称之间架起一座桥梁.

本书的特点是,不仅引入概念,阐述理论内容,还附有大量例题,提出问题,这是很重要的。相对独立地解决这些问题,一定会使读者对基础内容有较深刻的理解. 为便于读者领悟群的对称性的科学含义及广泛应用背景,同时在所有问题中,凡是需要提示的地方,尽量给予详尽提示.

在本书编写过程中,我的学生陈晓玮做了大量工作,给我以很大的帮助,在此表示感谢.

陈　辉

目　　录

第 1 章　对　称 ······ (1)

§1.1　图形的对称 ······ (1)

§1.2　对称变换 ······ (3)

§1.3　平面运动 ······ (8)

§1.4　对称变换群 ······ (11)

第 2 章　群的结构 ······ (17)

§2.1　群 ······ (17)

§2.2　置换群 ······ (23)

§2.3　群的重排定理、正规子群和商群 ······ (28)

§2.4　群的置换表示理论初步 ······ (38)

§2.5　有限群的 Sylow 定理 ······ (43)

§2.6　有限交换群的结构 ······ (47)

§2.7　有限群分类初步 ······ (52)

§2.8　可解群 ······ (57)

§2.9　幂零群与超可解群 ······ (62)

§2.10　群的构造 ······ (67)

§2.11　交换群的结构 ······ (73)

§2.12　群对称性的应用 ······ (77)

第 3 章　群表示论 ······ (84)

§3.1　结合代数 ······ (84)

§3.2　有限维代数 …… (90)
§3.3　半单代数的对称性 …… (94)
§3.4　有限结合代数的表示 …… (101)
§3.5　群表示初步 …… (105)
§3.6　群的特征标 …… (114)
§3.7　群的特征标表 …… (122)
§3.8　群的特征标的例子 …… (126)
§3.9　有限群特征标理论的应用 …… (132)
§3.10　有限群的不等价不可约表示 …… (137)
§3.11　直积群的表示 …… (142)

第4章　物理学中的对称群 …… (148)

§4.1　Wigner-Eckart 定理 …… (148)
§4.2　Wigner-Eckart 定理的应用 …… (150)
§4.3　对称群的标准表示 …… (155)
§4.4　对称群表示的约化 …… (160)
§4.5　Young 对称子及应用 …… (165)

第5章　分子对称群 …… (175)

§5.1　简单的分子对称群 …… (175)
§5.2　空间的对称性 …… (183)
§5.3　晶格的对称性 …… (188)
§5.4　点　群 …… (191)
§5.5　晶体点群 …… (198)

第6章　Galois 群及其应用 …… (208)

§6.1　代数方程解法概述 …… (208)
§6.2　Galois 基本定理 …… (212)
§6.3　自同构群 …… (224)

§6.4　方程有根式解的判别方法 ……………………………………………… (227)
§6.5　Galois 群与用根号解代数方程 ……………………………………… (233)
§6.6　尺规作图问题 ………………………………………………………… (237)

第 7 章　Lie 群的结构与对称性 ………………………………………… (246)

§7.1　群代数和群流形 ……………………………………………………… (246)
§7.2　拓扑群及其表示 ……………………………………………………… (250)
§7.3　$L_2(G)$空间 …………………………………………………………… (257)
§7.4　Lie 群与 Lie 代数………………………………………………………… (263)
§7.5　Lie 群的对称性 ……………………………………………………… (270)
§7.6　伴随变换与伴随表示 ………………………………………………… (274)
§7.7　Lie 群的 Carran 分解 ………………………………………………… (282)
§7.8　伴随变换的轨几何 …………………………………………………… (290)

参考文献…………………………………………………………………………… (295)

第1章 对　称

对称性是自然界最普遍、最重要的特性. 自然界所有重要的规律均与某种对称性有关,对称性的研究已越来越广泛地应用到物理学的各个分支:量子论、高能物理、相对论、原子与分子物理、晶体物理、原子核物理以及化学中晶体的分类、生物(DNA 的构型对称性等)和工程技术.

虽然对称的概念看来是很明显的,但为了给对称这个概念一个精确的和一般的描述,特别是对称的性质的量的刻画,却需要利用群论这个工具. 我们探讨平面上有限图形的对称,人们都会说圆比正方形更对称些,正六边形比正三角形更显得对称一些. 如果问正方形和正六边形谁更对称一些,该怎么回答呢? 无论是单个图形还是带型、壁纸型对称图案都可用群来准确描述. 本章将讨论对称与群,并将强调群概念产生的背景,群是对称概念的数学描述,研究群就是为了研究复杂的对称. 希望读者能对"对称即群"有一个初步的理解.

§1.1　图形的对称

什么是对称性? 按照英国《韦氏国际辞典》中的定义:"对称性乃是分界线或中央平面两侧各部分在大小、形状和相对位置的对应性."这里追溯到最直观、最早为人们熟知的所谓几何对称性. 空间一点 A 叫做点 B 关于平面 M 的对称点,如果这平面垂直地交线段 AB 于其中点,通常说 B 点是点 A 关于平面 M 的反射象. 说一个几何体关于平面是对称的,如果这个平面把几何体劈成两部分,其中任一部分都是另一部分关于所给镜面映象,此时这个平面被称为物体的对称平面.

对称性是"适当或协调的比例,以及由这种和谐产生的形式美". 这里依然谈的是空间的几何对称性,尽管涉及对称性的美学属性,实际上,对称性的现代科学概念极难定义,几乎成为规律和和谐的同义语,它与所谓不变性、守恒律往往结下不解之缘. 对称性分两大类:与时间、空间有关的,称为几何对称性;否则称为内禀对称性.

定义 1.1.1　具有某种对称性的图形,就是经过某些刚体运动后仍能回到自身的图形.

也许这就是圆比正方形更对称的解释. 用使图形回到自身的所有运动来刻画这一图形的对称应该是自然的,也符合我们对对称的直观感觉. 例如,圆经过绕圆心的任意旋转以及以任何过圆心的直线为轴的反射都回到自身,正方形绕其中心旋转 $\pi/2,\pi$,$3\pi/2,2\pi$ 或以其对角线和对边中点连线的反射才能回到自身,而梯形就更差了,它只有绕其中心旋转 $2k\pi$ 才能回到自身,因此所谓对称是与变换联系在一起的.

例 1.1.1 两端无限延伸的直线,上面有等距离 d 的刻度(如图 1.1).

直线向左或向右平行移动 d 的整数倍,仍然与原直线重合(不变性),或相对任一刻度点或两相邻刻度点的中点进行反射,亦与原直线重合,故该直线具有等距离 d 的整数倍的平移对称性和相对刻度点(中点)的反射不变性.

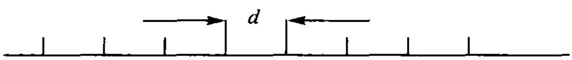


图 1.1 有等距离刻度的无限直线

例 1.1.2 等边三角形和直圆柱体(如图 1.2).

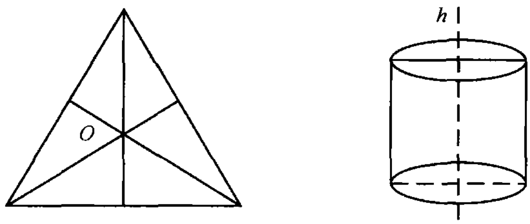


图 1.2

能使图形复原的变化,称为该图形的对称变换或对称操作. 等边三角形的全部对称操作是:绕中心 O 转动角 0°(不动)、$2\pi/3$、$4\pi/3$ 、(ρ_0,ρ_1,ρ_2);关于每个角平分线的反射(常记为 m_a,m_b,m_c).

直圆柱体的全部对称操作是:绕圆柱轴线 h 转动任意角度(有无穷多个操作);上述转动后,再相对于圆柱的中心 O 反演;相对于过轴线 h 的任一平面的反射;绕过中心 O 且垂直于轴线的任一直线转动角 π.

定义 1.1.2 平面中一个图形 S 的对称变换是指平面内具有性质 $T(S)=S$ 的保距变换 T.(后面还要详细讨论)

平面中一个图形的对称变换实际上即指旋转、平移、反射. 上面的三种对称变换的任意复合都正好还是这三种的某一种. 复合为群的定义中的二元运算作铺垫. 一个平面图形的所有对称变换的复合还是这个图形的对称变换,此为群论定义中的封闭性作铺

垫. 旋转为 0°的特殊对称变换,实际对应着群定义中的单位元. 而对称中的反对称正是群定义中的逆元.

定义 1.1.3 一个平面图形的对称变换群是指图形的所有对称变换的集合.

此定义不是抽象群的描述,但作为群论学习的前奏,非常自然,且与后续的"变换群"相呼应.

例 1.1.3 如图 1.3 所示的三角形,具有 0°、120°、240°的三个旋转,因而组成了一个三阶对称变换群,实际上是一个循环群 C_3. 又如上图所示的太阳八角星,具有八个旋转和八个反射,组成了二面体群 D_{16}.

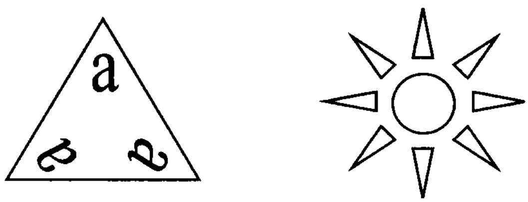


图 1.3

【问题】 将图 1.3 中的三角形内的字符 a 移走,还是三阶对称变换群吗? 将图 1.3 中的八个角内各插入一个字符"a",情况会怎样呢?

定义 1.1.4 带型图案是指平移对称向量总具有形式 nV 的图案,其中 n 是整数,V 是固定向量.

图 1.4

【思考】分析图 1.4 中的带型对称图案.

§ 1.2 对称变换

定义 1.2.1 一个 A 到 A 的映射叫做 A 的一个变换.

一个 A 到 A 的满射、单射或 A 与 A 间的一一映射叫做 A 的一个满射变换、单射变换或一一变换.

变换,尤其是一一变换,也是近世代数里极重要的概念.

例 1.2.1 $A=\mathbf{Z}$, $f: x \longmapsto \frac{x}{2}$, x 是偶数; $x \longmapsto \frac{x+1}{2}$, x 是奇数,是 A 的一个满射变换.

例 1.2.2　$A=\mathbf{R}, f: x\longmapsto \mathrm{e}^x$是 A 的一个单射变换.

例 1.2.3　$A=\{1,2,3\}, B=\{a,b,c\}$

$$f_1: 1\longmapsto a,\quad 2\longmapsto b,\quad 3\longmapsto c;$$

$$f_2: 1\longmapsto b,\quad 2\longmapsto c,\quad 3\longmapsto a.$$

都是 A 的一一变换.

但现在为便利起见,对于变换这种特殊的映射要用一种特殊的符号来说明,我们用符号

$$\tau: a\rightarrow a^{\tau}=\tau(a)$$

当然不是 a 的 τ 次方的意思,因为 τ 是一个变换,a 的 τ 次方根本没有什么意义,这只是一个符号,正如我们对于特殊的映射:代数运算以及关系都用特殊的符号一样.一个集合 A 在一般情形之下当然可以有若干个不同的变换,我们再举一个简单的例子.

例 1.2.4　$A=\{1,2\}$.

$$\tau_1: 1\rightarrow 1, 2\rightarrow 1$$

$$\tau_2: 1\rightarrow 2, 2\rightarrow 2$$

$$\tau_3: 1\rightarrow 1, 2\rightarrow 2$$

$$\tau_4: 1\rightarrow 2, 2\rightarrow 1$$

是 A 的所有的变换,其中 τ_3,τ_4 是一一变换.

现在我们把给定的一个集合 A 的全体变换放在一起,作成一个集合

$$S=\{\tau,\lambda,\mu,\cdots\}$$

我们要想法规定一个 S 的代数运算,这个代数运算我们把它叫做乘法.我们看 S 的两个元 τ 和 λ,

$$\tau: a\rightarrow a^{\tau}, \lambda: a\rightarrow a^{\lambda}$$

那么 $a\rightarrow(a^{\tau})^{\lambda}$,显然也是 A 的一个变换,因为给了 A 的任意元 a,我们可以得出一个唯一的$(a^{\tau})^{\lambda}$来.现在我们规定,就把这个变换叫做 τ 与 λ 的乘积.

$$\tau\lambda: a\rightarrow(a^{\tau})^{\lambda}=a^{\tau\lambda}$$

这样,这个乘法是一个 S 的代数运算.我们举一个例子.

例 1.2.5　我们在例 1.2.4 里取几个变换来算一算它们的乘积.

$\tau_1\tau_2: 1\rightarrow 2, 2\rightarrow 2$,所以 $\tau_1\tau_2=\tau_2$;

$\tau_2\tau_1: 1\rightarrow 1, 2\rightarrow 1$,所以 $\tau_2\tau_1=\tau_1$.

我们说,如上规定的乘法适合结合律:$\tau(\lambda\mu)=(\tau\lambda)\mu$.

因为 $\tau(\lambda\mu): a\rightarrow(a^{\tau})^{\lambda\mu}=((a^{\tau})^{\lambda})^{\mu}, (\tau\lambda)\mu; a\rightarrow(a^{\tau\lambda})^{\mu}=((a^{\tau})^{\lambda})^{\mu}$,

对于这个乘法来说,S 有一个单位元,就是 A 的恒等变换 $\varepsilon: a\rightarrow a$,

因为 $\varepsilon\tau: a\rightarrow(a^{\varepsilon})^{\tau}=a^{\tau}, \tau\varepsilon: a\rightarrow(a^{\tau})^{\varepsilon}=a^{\tau}, \varepsilon\tau=\tau, \tau\varepsilon=\tau$.

这样，S 对于这个乘法来说已经满足：乘法适合结合律，有单位元. 下边我们考虑 S 中的元是否都有逆元.

上面例 1.2.4 中的 τ_1，用一个任意的 τ 从左边来乘 τ_1，得到 $\tau\tau_1: 1\to1, 2\to1$，这就是说，不管 τ 是 A 的哪一个变换，$\tau\tau_1\neq\varepsilon$，也就是说 τ_1 没有逆元.

我们取 S 中的所有一一变换，记为 G，则 G 中每一个元都有逆元.

定理 1.2.1 一个集合 A 的所有一一变换构成的集合，对于上面规定的乘法，乘法适合结合律，有单位元，并且每一个元都有逆元.

证明 首先说明 G 对乘法是封闭的.

i. 假如 τ,λ 是一一变换，那么 $\tau\lambda$ 也是一一变换.

因为在 A 里取一个任意元 a，由于 λ 是一一变换，在 A 里存在 b 有以下性质，

$$\lambda: b\to a=b^{\lambda},$$

由于 τ 是一一变换，在 A 里有 c 有以下性质，

$$\tau: c\to b=c^{\tau},$$

这样，$\tau\lambda: c\to(c^{\tau})^{\lambda}=b^{\lambda}=a$，

所以 $\tau\lambda$ 是 A 到 A 的满射，假如 $a\neq b$，那么 $a^{\tau}\neq b^{\tau}$，$(a^{\tau})^{\lambda}\neq(b^{\tau})^{\lambda}$，$a^{\tau\lambda}\neq b^{\tau\lambda}$，所以 $\tau\lambda$ 是一一变换；

ii. 结合律对于一般的变换都对，所以对于一一变换也对；

iii. ε 是一一变换，是单位元；

iv. 设 τ 是一个任意的一一变换，那么存在一个一一变换 λ，有以下性质，

$$\lambda: a\to a^{\lambda}，假如 (a^{\lambda})^{\tau}=a,$$

所以 $\lambda\tau: a\to(a^{\lambda})^{\tau}=a$，即 $\lambda\tau=\varepsilon$，称 λ 为 τ 的逆变换，记为 $\lambda=\tau^{-1}$.

例 1.2.6 设 $A=\mathbf{R}$，求证：$G=\{f_{a,b}\mid f_{a,b}: x\longmapsto ax+b, a,b\in\mathbf{Q}，且\ a\neq0\}$ 对于变换的乘法满足上面四个条件.

证明 i. 设 $f_{a,b}, f_{c,d}\in G$，那么 $f_{a,b}\cdot f_{c,d}\in G$.

因为在 A 里取一个任意元 x，由于 λ 是一一变换，在 A 里存在 b 有以下性质，

$$f_{c,d}: x\to cx+d^{\lambda},$$

$$f_{a,b}: cx+d\to a(cx+d)+b=acx+(ad+b),$$

这样，

$$f_{a,b}\cdot f_{c,d}: x\to acx+(ad+b),$$

即

$$f_{a,b}\cdot f_{c,d}=f_{ac,(ad+b)}.$$

ii. 结合律对于一般的变换都成立；

iii. 显然 $\varepsilon: x\to x$ 是单位元；

iv. 任意 $f_{a,b}\in G$，设 $f_{c,d}$是其逆变换，

则 $\varepsilon=f_{a,b}\cdot f_{c,d}=f_{ac,(ad+b)}=:x\to acx+(ad+b)$，那么 $ac=1,ad+b=0$，

解之得，$c=1/a,d=-b/a$，所以 $f_{1/a,-b/a}$是 $f_{a,b}$的逆元.

定义 1.2.2　一个有限集合的一个一一变换叫做一个置换.

例 1.2.7　$A=\{1,2,3\}$，

$f_1:1\longmapsto 1,\quad 2\longmapsto 2,\quad 3\longmapsto 3;$

$f_2:1\longmapsto 1,\quad 2\longmapsto 3,\quad 3\longmapsto 2;$

$f_3:1\longmapsto 2,\quad 2\longmapsto 1,\quad 3\longmapsto 3;$

$f_4:1\longmapsto 2,\quad 2\longmapsto 3,\quad 3\longmapsto 1;$

$f_5:1\longmapsto 3,\quad 2\longmapsto 2,\quad 3\longmapsto 1;$

$f_6:1\longmapsto 3,\quad 2\longmapsto 1,\quad 3\longmapsto 2.$

也记为：$f_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix};f_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix};f_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix};$

$f_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix};f_5=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix};f_6=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix};$

以上的表示方法不仅是一个符号. 因为不管上一行的 n 个数字的次序如何，这样一个符号都能具体地告诉我们，它所表示的置换 π 是怎样的一个置换；换一句话说，它能告诉我们，经过这个 π，某一个元 a 的象是什么，我们只须在上一行把 i 找到，然后看一看底下是一个什么数字就行了，因此，利用这种符号可以直接来计算两个置换的乘积. 我们举一个例.

定理 1.2.2　含 n 个元素的任意集合共有 $n!$个一一变换.

证明　设 $M=\{1,2\cdots n\}$，则对 M 的每个一一变换 f，都能确定元素 $1,2\cdots n$ 的一个全排列 $f(1),f(2)\cdots f(n)$. 反之，元素 $1,2\cdots n$ 的任意一个全排列都确定 M 的一个双射变换，而且不同的排列确定不同的双射变换，因此，这 n 个元素有多少个全排列，M 就有多少个双射变换. 由于 n 个元素共有 $n!$个全排列，故 M 共有 $n!$个双射变换.

定义 1.2.3　一个 n 元置换把 a_1 变成 a_2，a_2 变成 $a_3\cdots a_{k-1}$变成 a_k，a_k 变成 a_1，而使其余元素保持不变的置换，叫做一个 ***k*-循环置换**.

这样一个置换我们用符号$(i_1,i_2\cdots i_k)$来表示.

例如：$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&3&1&5\end{pmatrix}=(1\ 2\ 4);\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&3&4&5\end{pmatrix}=(1)$

一个任意的置换当然不一定是一个循环置换.

例如：$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&3&2&5&4\end{pmatrix}$就不是一个 4-循环置换，实际上它是两个循环置换的乘

积：

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4\end{pmatrix}=(2\ 3)(4\ 5).$$

一般来说，我们有

定理 1.2.3 每一个 n 元置换 π 都可以写成若干个没有共同数字的(不相连的)循环置换的乘积.

证明 我们用归纳法. 当 π 不使任何元变动的时候，就是当 π 是恒等置换的时候，定理是对的.

假定对于最多变动 $r-1(r\leqslant n)$ 个元的 π 定理是对的. 现在我们看一个变动 r 个元的 π，我们任意取一个被 π 变动的元 i_1，从 i_1 出发我们找 i_1 的象 i_2，i_2 的象 i_3，… 这样找下去，直到我们第一次找到一个 i_k 为止，这个 i_k 的象不再是一个新的元，而是我们已经得到过的一个元：$(i_k)^\pi=i_j$，$j\leqslant k$，因为我们一共只有 n 个元，这样的 i_k 是一定存在的. 我们说，$(i_k)^\pi=i_1$.

因为 $i_j(2\leqslant j\leqslant k)$ 已经是 i_{j-1} 的象，所以不能再是 i_k 的象，这样，我们得到

$$i_1\to i_2\to i_3\cdots\to i_k\to i_1$$

因为 π 只使 r 个元变动，$k\leqslant r$. 假如 $k=r$，π 本身已经是一个循环置换，我们用不着再证明什么；假如 $k<r$，有

$$\begin{aligned}\pi &= \begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k & i_{k+1} & \cdots & i_r & i_{r+1} & \cdots & i_n\\ i_2 & i_3 & \cdots & i_1 & i'_{k+1} & \cdots & i'_r & i_{r+1} & \cdots & i_n\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k & i_{k+1} & \cdots & i_r & i_{r+1} & \cdots & i_n\\ i_2 & i_3 & \cdots & i_1 & i_{k+1} & \cdots & i_r & i_{r+1} & \cdots & i_n\end{pmatrix}\cdot\\ &\quad\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k & i_{k+1} & \cdots & i_r & i_{r+1} & \cdots & i_n\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k & i'_{k+1} & \cdots & i'_r & i_{r+1} & \cdots & i_n\end{pmatrix}\\ &=(i_1\,i_2\cdots\,i_k)\cdot\pi_1,\cdots\end{aligned}$$

但 π_1 只使得 $r-k<r$ 个元变动，照归纳法的假定，可以写成不相连的循环置换的乘积：$\pi_1=\eta_1\eta_2\cdots\eta_m$，在这些 η 里，$i_1,i_2\cdots\,i_k$ 不会出现，不然的话，

$$\eta_t=(\cdots\,i_p,i_q\cdots)\qquad p\leqslant k$$

那么 i_p 同 i_q 不会再在其余的 η 中出现，π_1 也必使 $i_p\to i_q$，但我们知道，π_1 使得 i_p 不动，这是一个矛盾，这样，π 是不相连循环置换的乘积.

$$\pi=(i_1\,i_2\cdots\,i_k)\eta_1\eta_2\cdots\,\eta_m\,i_q$$

例如：S_4 的全体元素可以表示成：

(1)

(1 2)，(1 3)，(1 4)，(2 3)，(2 4)，(3 4)

$(1\ 2\ 3)$,$(1\ 2\ 4)$,$(1\ 3\ 2)$,$(1\ 3\ 4)$,$(1\ 4\ 2)$,$(1\ 4\ 3)$,$(2\ 3\ 4)$,$(2\ 4\ 3)$

$(1\ 2\ 3\ 4)$,$(1\ 2\ 4\ 3)$,$(1\ 3\ 2\ 4)$,$(1\ 3\ 4\ 2)$,$(1\ 4\ 2\ 3)$,$(1\ 4\ 3\ 2)$,

$(1\ 2)(3\ 4)$,$(1\ 3)(2\ 3)$,$(1\ 4)(2\ 3)$.

用循环置换来表示置换的方法比第一种方法简单,并且能告诉我们每一个置换的特性.比方说,在例 1.2.7 里我们可以由这种表示方法看出,S_4 的元可以分成五类,每一类的元的性质一定相同,所以计算置换群用第二种方法的时候比较多.当然在特殊情形之下,也有用第一种方法比较方便的时候.

定义 1.2.4 一个具有某些关系的集合到自身的保持这些关系不变的变换,称为对称变换.

一个具有某些关系的集合的对称性**好**是指集合上具有比较多的对称变换.

两个对称变换的合成是对该集合连续做两次对称变换的变换,一个集合上的对称变换的集合 G 对对称变换的合成来说具有下列性质:

i. 对称变换的合成还是对称变换;

ii. 对称变换的合成满足结合律;

iii. 恒等变换与任何对称变换的合成等于该对称变换;

iv. 每一个对称变换都有逆变换.

某特定的这样的集合 G 中元素(变换)的个数、元素之间的关系以及所有这样的集合 G 的分类问题是对称问题的重要内容."群"作为代数中最基本的概念之一是比较抽象的,但它只是现实中所谓对称概念的抽象描述.

问题 1.2

1. 找出所有 S_3 的不能和$(1\ 2\ 3)$交换的元.
2. 把 S_3 的所有的元写成不相连的循环置换的乘积.
3. 证明:两个不相连循环置换可以交换.
4. 证明:$(i_1\ i_2 \cdots\ i_k)^{-1}=(i_k\quad i_{k-1} \cdots\ i_1)$.
5. 证明:$(i_1\ i_2 \cdots\ i_k)$的阶数是 k.
6. 证明:S_n 的每一个元都可以写成对换$(1\ 2)$,$(1\ 3)$,$(1\ 4)$,$\cdots(1\ n)$的乘积.

§1.3 平面运动

定义 1.3.1 平面的**保距变换**是保持平面上任何两点的距离都不变的变换(是一种对称变换).

平面的保距变换的集合 $M(\mathbf{R}^2)$对于保距变换的合成构成群,$(M(\mathbf{R}^2),\cdot)$称为平