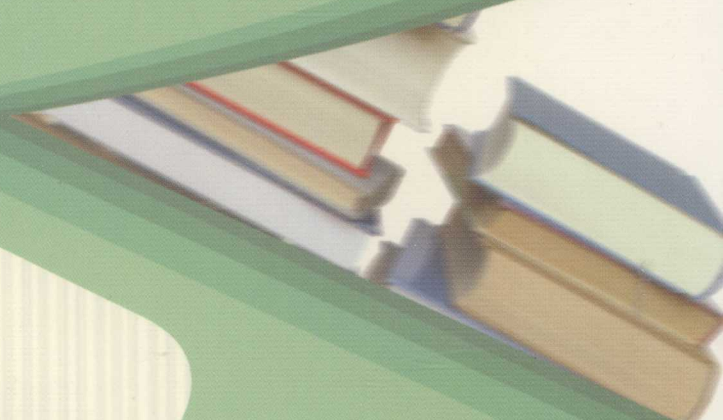
XINKECHENG BIAOZHUN XIADE
ZHONGXUE SHUXUE YANJIU

# 新课程标准下的中学数学研究

冯天祥 著



SWJUP 西南交通大學出版社
Http://press.swjtu.edu.cn

# 新课程标准下的中学数学研究

冯天祥　著

西南交通大学出版社
·成　都·

图书在版编目（CIP）数据

新课程标准下的中学数学研究 / 冯天祥著. —成都：西南交通大学出版社，2008.10
ISBN 978-7-5643-0097-5

Ⅰ. 新… Ⅱ. 冯… Ⅲ. 数学课－教学研究－中学 Ⅳ. G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 155649 号

新课程标准下的中学数学研究
冯天祥 著
*
责任编辑 张宝华
封面设计 翼虎书装
西南交通大学出版社出版发行
(成都二环路北一段 111 号 邮政编码：610031 发行部电话：028-87600564)
http: //press.swjtu.edu.cn
成都蜀通印务有限责任公司印刷
*
成品尺寸：185 mm×260 mm 印张：20.5
字数：510 千字
2008 年 10 月第 1 版 2008 年 10 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5643-0097-5
定价：36.00 元

# 前　言

由于中学数学课程标准采用模块式教学，而有些模块的教学内容对任课教师来讲在大学是没有学过的，对刚刚走上教学岗位的数学教育专业的毕业生，由于缺乏教学经验，对中学数学的教学内容、教学要求、重难点、深广度都不熟悉，致使“居高”不能“临下”的矛盾日益突出. 又由于学生毕业后接触的是全新的中学数学教材，有很多内容在大学根本没有学过，这就导致对中学数学教学的适应期会很长，高等师范院校数学教育专业的课程体系很难实现对中学数学的指导. 目前，中学数学研究课程体系仍存在许多问题：缺少中学数学课程的理论与实践的研究；对不同需求的学生仍采取统一的课程体系；缺少大学数学与中学数学的相互渗透，未能体现大学数学对中学数学的指导；未能体现数学的人文内涵和应用价值；院校之间、院校与中学之间没有交流与合作. 因此，我们认为对数学教育专业课程体系进行改革，针对不同的需求设置模块课程是必须的.

《新课程标准下的中学数学研究》这本书可作为传统中学数学研究的补充、延伸和拓展，是为了适应中学数学新课程标准，全面建设数学教育专业中学数学课程群的研究成果之一. 新课标下的中学数学研究课程无论从内容还是形式上都有别于传统的中学数学研究课程，是中学数学研究课程的延续与拓展，在现代数学观点之下，建立了中学数学与大学数学的联系. 本书的指导思想是：将现代数学的思想、方法渗透到中学数学中，体现大学数学对中学数学的指导；对中学数学中一些未解释清楚的内容，指出其大学数学的背景；补充中学数学选修模块课程的教学内容.

新课标下的中学数学研究包含如下内容：概率与数理统计初步、几何问题、图形、几何学的演变、中学数学模型、开关电路与布尔代数、信息安全与密码、近似计算与算法、大学数学对中学数学的指导等九部分.

《新课程标准下的中学数学研究》的编写，得到了重庆市教育科学规划办公室的科研项目《基于中学数学变革下的地方院校数学教育专业课程改革与建设实践研究》、重庆市教委的科研项目《地方高校数学教育专业课程体系改造与建设实践研究》及重庆市教委教改重点项目《地方院校数学教育发展探究——课程改革与建设实践》的支持与资助.

《新课程标准下的中学数学研究》的编写，得到重庆三峡学院科技处、教务处、数学与计算机科学学院的领导的大力支持！

作者衷心感谢重庆三峡学院副院长胡继明教授、谭明术教授的帮助、支持与关心，感谢查中伟、应宏、姜友谊、杜祥林等教授的支持与帮助，也感谢陈小春、刘学飞副教授对书稿所做的有益的建议；与此同时，也要感谢我的家人和朋友的帮助，感谢我的学生对书稿的录入所做的工作.

本书的编写，参考了许多作者的成果与著作，有些成果可能未列在参考文献中，在此一并对这些作者表示衷心的感谢！由于水平有限，加之时间仓促，书中难免有许多疏漏之处，敬请读者批评指正！

**冯天祥**

2008.6.2

# 目　录

# 1　概率与数理统计初步

## 1.1　随机现象的数学描述

### 1.1.1　明天会下雨吗

在人类社会中,自然现象与社会现象是各式各样、五花八门的，如果从能否预言其结果的角度来看，可划分为两类：一类是可以预言其结果的，即在相同条件下，重复试验并观察，其结果总是相同而确定的．如，投出的篮球一定会落到地面上；异性电荷必然相互吸引，等等．这类现象称为确定性现象．另一类现象是不能预言其结果的，即在相同的条件下，重复进行试验并观察，其结果是不确定的．如，掷一枚质地均匀的硬币，在每一次试验中，究竟是“正面向上”还是“反面向上”是不可预测的；同一个人在完全相同的条件下打靶，击中的环数是不确定的；在同样的教学条件下，学生的成绩是不可预言的，等等．称这类现象为随机现象．

随机现象是到处都存在的，而且对人类的生产与生活有着巨大的影响．“明天会下雨吗？”出门的人一定很关心，而明天天气如何恰好又是一个随机现象．众所周知，随机现象是有一定规律的，只要人们掌握了这种规律，就可以利用随机现象为人类服务．随机现象的规律性有其固有特点：绝大多数情况下是对的，偶尔也有不对的时候．这种规律与人们认识自然的规律极其相似，因此这种规律更具有实用性．

要说明一个随机现象的某种结果的可能性大小，必须做大量的重复试验．这种必须经过大量试验才能发现的规律性称为统计规律性．

### 1.1.2　随机现象的广泛性

#### 1.1.2.1　产品的抽样验收

工厂生产的产品出厂时要进行质检与验收，那么怎样进行检查与验收呢？当然逐件检查最好不过，但是有些产品批量很大，不可能逐件检查；又有些产品一经检查就被破坏而不能再使用，如电子元件（寿命）、种子（发芽能力）、炮弹（质量）等．因此，通常的办法是从中抽取一部分产品进行检验，称为“抽样检验”．

一批产品中有正品也有次品，任取一件，就有“是正品”和“是次品”两种可能．但是在相同条件下生产的大批产品中，次品所占比重即次品率是稳定的，根据这个规律来合理制定抽样验收的方案是解决问题的关键．

### 1.1.2.2 种子的发芽率检查

保存了很长时间的种子，播种前必须检测其发芽能力. 如果把一批多半已失效的种子误播下去，便会贻误农时，造成不可挽回的损失；又一粒种子一经发芽试验后就无法再种，因此，只能抽样检测. 一粒种子可能发芽也可能不发芽，一粒种子能否发芽虽然不能预测，但在同样保管的前提下，一批种子中能发芽的种子所占的比重——发芽率是稳定的. 因此，只需抽取很小的一部分种子做发芽试验，其发芽率即可代表这批种子的发芽率.

### 1.1.2.3 水情预报

准确地预报大江大河的汛期和水位，对于保障人民的生命财产安全极为重要. 洪峰何时到达，水位有多高，看似难以预报，其实仔细分析江河的历史上长期的水文观测资料，结合当年的具体情况，就可以根据降水等因素及上游观测站的水文情报，作出较为准确的预报.

在建设水库等水利工程时，也必须摸清当地水情的统计规律，方能有的放矢地进行建设，尤其是一些大型水利枢纽工程，设计前必须考虑数百年的水文统计资料.

### 1.1.2.4 元件的可靠性与平均寿命

微机系统、汽车传动系统、家用电器及通讯系统都是由许多元件（电阻、晶体管、轴承等）组成的. 由于工作中的疲劳性损坏、腐蚀、老化及其他原因，可能产生故障或损坏，因此，在设计装置或系统时，应该考虑每个元件的可靠性及平均寿命. 而对于一元件来说，易损坏与否及寿命都是不可预言的，在设计和使用它们时必须了解它们正常工作的统计规律，这就是所谓的“系统或装置的可靠性问题”.

## 1.2 总体与样本

在随机现象的发生范围内，把所关注的对象全体称为总体，把其中个别对象称为个体. 如要调查某市居民的家庭收入状况或某种耐用消耗品的购置情况，那么该市全体居民就是总体，每一户就是个体.

由于在许多情况下不宜或不可能对每个个体进行检测，因此只能从总体中抽取若干有代表性的个体所组成的一个样本（总体集合中的一个非空子集）来检测，并由此推断总体的情况. 样本中个体的数目称为样本容量.

为了使样本能真实反映总体的情况，样本中每个个体应该随机抽取，这种抽取样本的方法即是随机抽样法. 随机抽样法有下列几种方法：

（1）简单随机抽样：不带主观意图地从总体中随机选取个体的方法. 这种抽样法适用于个体分布均匀，总体及样本中个体不太多的情况.

（2）分块（段）抽样：先将总体分成几段（块），再从每块（段）中随机抽样的方法.该抽样方法适用于总体元素较多，个体分布没有明显不均的情况.

（3）分层抽样：先按试验指标水平大致分层划分，再从每层中随机抽样的方法. 该抽样

方法适用于总体中个体有明显差异的情况.

（4）规律抽样：按照总体中个体的主要规律、特征、指标等进行抽样的方法. 该方法适用于总体中个体有某种共同的、唯一的、确定的特征指标或规律.

### 1.2.1 平均数问题

老李到一家私营工厂探望他的两位朋友，谈及该厂内工人的薪水时，工厂的老板插话说："本厂人员每月平均收入 6 000 元." 当老板离开后，老李的朋友说："别听他吹牛，这家工厂的人均月收入只有 1 000 元." 另一位朋友说："没有的事，人均月收入只有 800 元."

老李有些不解，这三种说法哪个对？为什么一个单位里不同的人对工资的看法有如此大的差距呢？于是老李决定进行调查，结果发现如下数据（见表 1.1）：

**表 1.1**

| 人　员 | 月收入（元） | 人数 |
|---|---|---|
| 总经理 | 48 000 | 1 |
| 经　理 | 30 000 | 1 |
| 主　任 | 21 400 | 1 |
| 工程师 | 5 000 | 4 |
| 助　工 | 4 000 | 5 |
| 技术员 | 1 000 | 1 |
| 工　人 | 800 | 12 |

将工厂每月所有人员工资收入相加得 150 000 元，然后除以人数 25 得 6 000 元；若从另一个角度看，该厂的技术员每月收入 1 000 元，有 12 人多于 1 000 元，有 12 人少于 1 000 元，取中位数刚好是 1 000 元；如果采用众数，则说明该厂每人每月收入为 800 元.

用加权平均可计算出该厂的实际平均月收入为：6 000 元. 可见，加权平均也不可信.

**中位数**：将某个指标的观测值按从小到大的次序排列，最中间的数称为这组观测值的中位数. 若观测值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 经重新排列后为 $x_1^* \leqslant x_2^* \leqslant \cdots \leqslant x_n^*$，则中位数 Md 为

$$\mathrm{Md}=\begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}}^*, & n\text{ 为奇数} \\ \dfrac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}}^*+x_{\frac{n}{2}+1}^*\right), & n\text{ 为偶数} \end{cases} \tag{1.1}$$

**众数**：某个指标的 $n$ 个观测值中出现频数最高的数，称为该组观测值的众数.

**平均数**：某个指标的 $n$ 个观测值为 $x_1, x_2, \ldots, x_n$，则他们的平均数 $\bar{x}$ 为

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \tag{1.2}$$

一般来说，平均数、中位数、众数间有如下大小关系：

在右偏态下：平均数 ≤ 中位数 ≤ 众数；

在左偏态下：众数 ≤ 中位数 ≤ 平均数.

## 1.2.2 样本数据的描述与处理

某校期中数学考试时，随机抽取一个班为样本进行分析．考试成绩如下：

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 学号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 |
| 成绩 | 80 | 77 | 84 | 83 | 66 | 83 | 81 | 82 | 81 | 87 | 78 | 85 | 89 | 74 | 83 | 76 | 93 | 87 | 80 | 91 | 60 | 83 | 70 |
| 学号 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | |
| 成绩 | 86 | 82 | 83 | 90 | 88 | 75 | 84 | 58 | 72 | 92 | 86 | 82 | 73 | 81 | 85 | 78 | 90 | 98 | 30 | 69 | 79 | 85 | |

则平均数 $\bar{x}=79.8$，中位数 $\mathrm{Md}=82$，众数 $M_0=83$．

现在将考试成绩按由低到高的顺序进行排列，称各个分数的人数为该分数的频数，记为 $f_i$，即

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 30 | 58 | 60 | 66 | 69 | 70 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 | 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 | 91 | 92 | 93 | 98 |
| $f_i$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 3 | 5 | 2 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |

将考试分数由小到大排列后，按 10 分一段，分组整理得（见表 1.2）

**表 1.2**

| 分数段 | 0～49 | 50～59 | 60～69 | 70～79 | 80～89 | 90～100 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 频数 | 1 | 1 | 3 | 10 | 24 | 6 |
| 频率 | 2.2 | 2.2 | 6.7 | 22 | 53.3 | 13.3 |

将各分数段中人数（频数）、所占比例（频率）画在直方图中，将直方图中每个矩形柱的上边中点用线段连接起来，就得到频数分布的折线图，如图 1.1 所示．

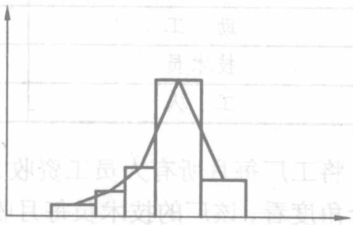


图 1.1

## 1.2.3 变异特征

变异特征是描述观测值之间的差异或分散程度的量，包括极差、平均绝对偏差和标准差．

**极差**：又称全距，是一组观测值中最大值与最小值之差，即

$$R=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{x_i\}-\min_{1\leqslant i\leqslant n}\{x_i\} \tag{1.3}$$

极差是反映观测值离散程度的最简单的度量指标．

**平均绝对偏差**：设有 $n$ 个观测值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，它们的平均绝对偏差 MD 为

$$\mathrm{MD}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i-\mathrm{Md}| \quad 或 \quad \mathrm{MD}'=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i-\bar{x}| \tag{1.4}$$

**样本方差与标准差**：各观测值同平均数的偏差的平方的平均数称为样本方差，记为 $S^2$：

$$S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \tag{1.5}$$

**标准差**：样本方差的算术平方根称为标准差，即

$$S=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} \tag{1.6}$$

# 1.3 概率问题

## 1.3.1 一个囚犯的故事

一个犯人被判了死刑，在执行前，国王给了他一个免死的机会. 国王令这个犯人将 50 个白球和 50 个黑球放进两个外表完全一样的坛子里，然后让侍卫将这两个坛子随意调换，直到囚犯认不出哪个坛子里放了什么球为止. 再命令囚犯从其中一个坛子里摸出一个球来，如果摸出白球便立即释放；若摸出黑球，则立即处死. 结果这个犯人凭借智慧和一点运气得以死里逃生. 你知道他是怎样做的吗？

### 1.3.1.1 古典概型及其概率计算公式

古典概型又称等可能概型，它有如下两个特征：① 所有可能的结果只有有限个，即全部基本事件的个数是有限的. ② 每个基本事件发生的可能性是相同的.

对于古典概型，设试验的基本事件总数为 $n$，事件 $A$ 包含 $m$ 个基本事件，则事件 $A$ 发生的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n} \tag{1.7}$$

### 1.3.1.2 条件概率

设 $A, B$ 是两个随机事件，且 $P(B)>0$，则称 $P(A|B)$ 为在事件 $B$ 发生的条件下事件 $A$ 发生的条件概率，且有计算公式

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \tag{1.8}$$

相应地，有概率的乘法公式

$$P(AB)=P(B)P(A|B) \tag{1.9}$$

对前面提到的“囚犯问题”，如果囚犯将 50 个白球和 50 个黑球分别放在这两个坛子里，那么他逃生的机会只有百分之五十. 如果囚犯将 25 个白球和 25 个黑球放在一个坛子里，将余下的球放在另一个坛子里，他逃生的机会也只有一半. 如果他在一个坛子里只放一个白球，将其余的球全部放在另一个坛子里，若他幸运地选中只有一个白球的坛子，那他必然可获得释放；若他抽中另一个坛子，则抽得白球的机会是 $\frac{49}{99}$，而他首先要选取哪个坛子（条件），并且取得任何一个坛子的机会都是一半.

设 $A_1$：“抽中只有一个白球的坛子”，$A_2$：“抽中白球”，则

$$A_2=A_2(A_1+\overline{A}_1)$$

于是

$$P(A_2)=P(A_2A_1)+P(A_2\bar{A}_1)=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1)$$

$$=\frac{1}{2}\times1+\frac{1}{2}\times\frac{49}{99}=\frac{74}{99}\approx0.75$$

### 1.3.2 抽签不分先后

设有5道试题，准备分发给5个学生测试其能力. 已知其中有2道难题，为公平起见，考官做了5个签，并要求这5个学生依次抽签决定回答哪道题. 于是5个学生谁也不肯先出手，唯恐先抽签时抽到难题.

设 $A_i$："第 $i$ 次抽得难题"$(i=1, 2, 3, 4, 5)$，于是 $P(A_1)=\frac{2}{5}$, $P(\bar{A}_1)=\frac{3}{5}$. 由于抽签是无放回的抽取，因此，第二次抽签受第一次抽签结果的影响，即有

$$A_2=A_2(A_1+\bar{A}_1)=A_2A_1+A_2\bar{A}_1$$

则
$$P(A_2)=P(A_2A_1)+P(A_2\bar{A}_1)=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{2}{5}$$

同理，有
$$P(A_3)=P(A_4)=P(A_5)=\frac{2}{5}$$

可见，抽签是不分先后次序的，抽签对每个人都是公平的.

## 1.4 数值特征

表示随机变量取值的集中位置的量中有一个重要的量是数学期望；表示随机变量取值的离散程度的量是方差.

### 1.4.1 数学期望

设某个班的一次考试分数分别为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，则称用其平均成绩 $\bar{x}$ 描述随机现象的方法为"数学期望值法"，而 $\bar{x}$ 称为"期望"或"均值".

如某班有50个学生，上学期期末考试数学成绩统计表（见表1.3）：

表 1.3

| 分数 | 75 | 78 | 80 | 82 | 85 | 88 | 90 | 92 | 98 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 人数 | 4 | 3 | 7 | 6 | 9 | 10 | 5 | 4 | 2 |

则该班的平均成绩可如下计算：

$$\bar{x}=75\times\frac{4}{50}+78\times\frac{3}{50}+80\times\frac{7}{50}+82\times\frac{6}{50}+85\times\frac{9}{50}+88\times\frac{10}{50}+90\times\frac{5}{50}+92\times\frac{4}{50}+98\times\frac{2}{50}=84.9$$

即 $\bar{x}$ 是由成绩的所有可能取值乘以这些取值的频率，再求和得到的. 如果将频率改为概率，即得一般离散型随机变量的数学期望.

**定义 1.1** 设随机变量 $\xi$ 取值 $x_k$ 的概率为 $p_k=P(\xi=x_k)$ $(k=1, 2, \cdots)$，且级数 $\sum_k x_k p_k$ 绝对收敛，则称 $\sum_k x_k p_k$ 为随机变量 $\xi$ 的数学期望，记为 $E\xi$，即 $E\xi=\sum_k x_k p_k$.

**定义 1.2** 设随机变量 $\xi$ 的分布密度函数为 $p(x)$，且 $\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，则称 $\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)\mathrm{d}x$ 为随机变量 $\xi$ 的数学期望，记为 $E\xi$，即 $E\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)\mathrm{d}x$.

## 1.4.2 方差与标准差

设有甲、乙两人打靶，每人 5 发子弹，成绩如下：甲击中的环数为 4 环，8 环，7 环，10 环，6 环；乙击中的环数为 6 环，7 环，8 环，7 环，7 环. 请问甲、乙两人谁的射击技术更好？

从给定的环数可见，两个人的平均数、中位数均为 7 环，故不可用平均数及中位数评判两人的技术水平.

如何评判两人的射击技术呢？即评判这两人射击技术的稳定性谁更好？所谓稳定与否，是指数据上下波动幅度的大小. 而波动幅度大小的判定需依赖比较的标准数，这个标准数即是平均数. 于是可根据数据的平均波动情况来判别. 由于差 $x_k-\bar{x}$ 有正有负，且可能会抵消，于是选用 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2$ 来判定波动情况，并称为样本方差，即 $S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$，而 $S=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$ 称为样本标准差.

对甲、乙两人打靶的成绩可算出：

$$S_{甲}^2=\frac{1}{5}[(4-7)^2+(8-7)^2+(7-7)^2+(10-7)^2+(6-7)^2]=4$$

$$S_{乙}^2=\frac{1}{5}[(6-7)^2+(7-7)^2+(8-7)^2+(7-7)^2+(7-7)^2]=0.4$$

所以 $S_{乙}^2<S_{甲}^2$，故乙的射击水平比甲的射击水平高.

一般地，若 $E(\xi-E\xi)^2$ 存在，则称它为随机变量 $\xi$ 的方差，记为 $D\xi$，并称 $\sqrt{D\xi}$ 为随机变量 $\xi$ 的标准差.

*注：*（1）*若 $\xi$ 是离散型随机变量，概率分布为 $P(\xi=x_k)=p_k(k=1, 2, \cdots)$，则随机变量 $\xi$ 的方差为 $D\xi=\sum_{k=1}^{\infty}(x_k-E\xi)^2 p_k$.*

（2）*若 $\xi$ 是连续型随机变量，其密度函数为 $p(x)$，则随机变量 $\xi$ 的方差为 $D\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E\xi)^2 p(x)\mathrm{d}x$.*

# 1.5 回归分析

## 1.5.1 一元线性回归

设有数学模型

$$y = a + bx + \varepsilon \tag{1.10}$$

其中，$a, b$ 是未知常数，$\varepsilon$ 是随机误差. 又对每一观测点 $(x_i, y_i)(i=1, 2, \cdots, n)$，有

$$y_i = a + bx_i + \varepsilon_i \tag{1.11}$$

且满足

（1）自变量 $x, y$ 之间有密切的线性关系；

（2）$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 具有相同的分布且相互独立；

（3）$E\varepsilon_i = 0,\ E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \sigma^2, & i = j \end{cases}$.

### 1.5.1.1 未知参数 $a, b$ 的估计

设 $\hat{a}, \hat{b}$ 是 $a, b$ 的估计值，则 $\hat{a}, \hat{b}$ 使 $Q(a, b) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i)^2$ 达到最小. 由多元函数取得极值的必要条件知，$\hat{a}, \hat{b}$ 是方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i)(-1) = 0 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i)(-x_i) = 0 \end{cases}$$

的解，即 $\hat{a}, \hat{b}$ 是下面正规方程组的解

$$\left.\begin{aligned} na + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)b &= \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)a + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)b &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{aligned}\right\} \tag{1.12}$$

可以证明，正规方程组（1.12）有唯一解 $\hat{a}, \hat{b}$，且其解 $\hat{a}, \hat{b}$ 使 $Q(a, b)$ 取得最小值 $Q(\hat{a}, \hat{b})$. 称

$$\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x \tag{1.13}$$

为回归直线方程.

注：（1）正规方程组（1.12）还可如下导出. 已知方程组

$$\left.\begin{aligned} a + bx_1 &= y_1 \\ a + bx_2 &= y_2 \\ &\vdots \\ a + bx_n &= y_n \end{aligned}\right\} \tag{1.14}$$

将方程组（1.14）写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

在方程（1.15）的两边左乘系数矩阵的转置，即$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$，得

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{pmatrix} \tag{1.16}$$

（2）若记

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,\quad \overline{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i,\quad l_{xx}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2=\sum_{i=1}^{n} x_i^2-n\overline{x}^2$$

$$l_{xy}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i-n\overline{xy},\quad l_{yy}=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2=\sum_{i=1}^{n} y_i^2-n\overline{y}^2$$

则

$$\left.\begin{aligned} \hat{b}&=\frac{l_{xy}}{l_{xx}} \\ \hat{a}&=\overline{y}-\hat{b}\overline{x} \end{aligned}\right\} \tag{1.17}$$

（3）平方和分解公式．由于

$$\begin{aligned} l_{yy}&=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i+\hat{y}_i-\overline{y})^2 \\ &=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2+\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\overline{y})^2+2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)(\hat{y}_i-\overline{y}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)(\hat{y}_i-\overline{y})&=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{a}-\hat{b}x_i)(\hat{a}+\hat{b}x_i-\overline{y}) \xlongequal{\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}} \sum_{i=1}^{n}[(y_i-\overline{y})-\hat{b}(x_i-\overline{x})][\hat{b}(x_i-\overline{x})] \\ &=\hat{b}\sum_{i=1}^{n}[(y_i-\overline{y})(x_i-\overline{x})-\hat{b}(x_i-\overline{x})^2]=\hat{b}l_{xy}-\hat{b}^2 l_{xx}=\hat{b}(l_{xy}-\hat{b}l_{xx})=0 \end{aligned}$$

于是有平方和分解公式

$$l_{yy}=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2+\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\overline{y})^2 \tag{1.18}$$

其中，$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2$ 是残差平方和，记为 $Q$；$\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\overline{y})^2$ 称为回归平方和，记为 $U$.

（4）已知 $n$ 个观测点 $(x_i, y_i)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，求回归直线 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$ 的 MATLAB 源程序

```
function [a,b] = lsline (x, y) ; % x 是由 x_i 组成的向量，y 是由 y_i 组成的向量，a, b 为参数
x_mean = mean(x);
y_mean = mean(y);
sumx2 = (x-x_mean)*(x-x_mean)';
sumxy = (y-y_mean)*(x-x_mean)';
b = sumxy/sumx2;
a = y_mean - a*x_mean
```

对给定数据点

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $y_i$ | 10 | 9 | 7 | 5 | 4 | 3 | 0 | −1 |

用 MATLAB 求回归直线的方程.

只需在 MATLAB 的命令窗口中输入

```
>> lsline([-1,0,1,2,3,4,5,6],[10,9,7,5,4,3,0,-1])
```

输出结果为

```
b =
    -1.607 1
a =
    8.642 9
```

所以，回归直线为 $y=8.642\,9-1.607\,1x$.

#### 1.5.1.2 未知参数 $\sigma^2$ 的估计

由于 $y_i=a+bx_i+\varepsilon_i$，所示 $\varepsilon_i=y_i-a-bx_i$，因此

$$\hat{\varepsilon}_i=y_i-\hat{y}_i=y_i-\hat{a}-\hat{b}x_i$$

所以

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{a}-\hat{b}x_i)^2=\frac{Q}{n-2}$$

即为参数 $\sigma^2$ 的估计.

**例 1** 化肥用量与水稻产量间数据如下（见表 1.4）：

表 1.4

| 化肥用量 $x$（kg） | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 水稻产量 $y$（kg） | 330 | 345 | 365 | 405 | 445 | 490 | 455 |

求回归直线方程，并估计参数 $\sigma^2$.

**解** 由于 $\overline{x}=30, \overline{y}=405, l_{xx}=\sum_{i=1}^{7}(x_i-\overline{x})^2=700, l_{xy}=3\,725, l_{yy}=22\,150$，所以

$$\hat{b}=\frac{l_{xy}}{l_{xx}}=5.321\,4,\quad \hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=245.36$$

所以回归直线方程为

$$\hat{y}=245.36+5.321\,4x$$

又 $\hat{y}_1=245.36+5.321\,4\times15=325.18,\quad \hat{\varepsilon}_1=y_1-\hat{y}_1=4.82$

$$\hat{y}_2=351.79,\quad \hat{\varepsilon}_2=-6.79;\quad \hat{y}_3=378.40,\quad \hat{\varepsilon}_3=-13.40;\quad \hat{y}_4=405.00,\quad \hat{\varepsilon}_4=0.00$$

$$\hat{y}_5=431.61,\quad \hat{\varepsilon}_5=13.39;\quad \hat{y}_6=458.22,\quad \hat{\varepsilon}_6=31.78;\quad \hat{y}_7=484.82,\quad \hat{\varepsilon}_7=-29.82$$

所以 $\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{7-2}\sum\limits_{i=1}^{7}\hat{\varepsilon}_i^2=465.48$

### 1.5.1.3 参数估计的性质

（1） $\hat{a}, \hat{b}$ 是 $y_1, y_2, \dots, y_n$ 的线性组合.

因为 $\hat{b}=\dfrac{l_{xy}}{l_{xx}}=\dfrac{\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j-\overline{x})(y_j-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}=\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{x_j-\overline{x}}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}y_i-\dfrac{\overline{y}\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j-\overline{x})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$，记 $c_j=\dfrac{x_j-\overline{x}}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$，则

$$\hat{b}=\sum_{j=1}^{n}c_jy_j$$

$$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i-\sum_{i=1}^{n}c_iy_i\overline{x}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n}-c_i\overline{x}\right)y_i$$

（2） $\hat{a}, \hat{b}$ 是参数 $a, b$ 的无偏估计.

因为 $E\varepsilon_i=0$，所以

$$Ey_i=a+bx_i$$

$$E\hat{b}=\sum_{j=1}^{n}c_jEy_j=\sum_{j=1}^{n}c_j(a+bx_j)=a\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j-\overline{x})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}+b\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}x_j(x_j-\overline{x})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}=b$$

$$E\hat{a}=E\overline{y}-E(\hat{b}\overline{x})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Ey_i-\overline{x}E\hat{b}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a+bx_i)-\overline{x}b=a$$

（3） $\overline{y}$ 与 $\hat{b}$ 是不相关的.

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(\overline{y},\hat{b})&=E(\overline{y}-E\overline{y})(\hat{b}-E\hat{b})\\&=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Ey_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}c_iy_i-\sum_{i=1}^{n}c_iEy_i\right)\\&=\frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i-Ey_i)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}c_i(y_i-Ey_i)\right)\end{aligned}$$