华腾教育
HUA TENG EDUCATION

高等学校教材经典同步辅导丛书理化类

配高教社《结构力学教程(II)》 龙驭球 包世华 主编

结构力学教程(II)

同步辅导及习题全解

华腾教育教学与研究中心

丛书主编 清华大学 何联毅

本书主编 清华大学 陈晓东

- 紧贴教材：精讲重点 点拨方法 联系考研
- 考试宝典：教材精华 经典试卷 常考试题
- 学习卡：资料下载 信息交流 互动论坛
- 课后习题：三级突破 分析要点 总结难点

2-42
64

中国矿业大学出版社

高等学校教材经典同步辅导丛书

结构力学教程(II)

同步辅导及习题全解

华腾教育教学与研究中心
丛书主编　清华大学　何联毅
本书主编　清华大学　陈晓东

中国矿业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

结构力学教程(Ⅱ)同步辅导及习题全解/陈晓东主编.
徐州:中国矿业大学出版社,2006.8
(高等学校教材经典同步辅导丛书)
ISBN 7-81107-400-1

Ⅰ.结… Ⅱ.陈… Ⅲ.结构力学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O342

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 086927 号

书　　名 结构力学教程(Ⅱ)同步辅导及习题全解
主　　编 陈晓东
责任编辑 罗　浩
出版发行 中国矿业大学出版社
印　　刷 北京市昌平百善印刷厂
经　　销 新华书店
开　　本 787×1092　1/16　**本册印张** 13　**本册字数** 292 千字
版次印次 2006 年 8 月第 1 版　2006 年 8 月第 1 次印刷
总 定 价 157.50 元
(图书出现印装质量问题,本社负责调换)

高等学校教材
经典同步辅导丛书编委会

主　任： 清　华　大　学　王　飞

副主任： 清　华　大　学　夏应龙

中国矿业大学　李瑞华

编　委（按姓氏笔画排序）：

于志慧	王　焯	甘　露	师文玉
吕现杰	朱凤琴	刘胜志	刘淑红
严奇荣	李　丰	李凤军	李　冰
李　波	李炳颖	李　娜	李晓光
李晓炜	李雅平	李燕平	何联毅
邹绍荣	宋　波	张旭东	张守臣
张国良	张鹏林	张　慧	陈晓东
范亮宇	孟庆芬	唐亚楠	韩国生
韩艳美	曾　捷		

前言

PREFACE

《结构力学教程》是土木工程力学专业重要的课程之一，也是报考该类专业硕士研究生的考试课程。龙驭华主编的《结构力学教程》（Ⅰ）（Ⅱ）以体系完整、结构严谨、层次清晰、深入浅出的特点成为这门课程的经典教材，被全国许多院校采用。为了帮助读者更好地学好这门课程，掌握更多知识，我们根据多年的教学经验编写了这本与此教材配套的《结构力学教程（Ⅰ）（Ⅱ）同步辅导及习题全解》。本书旨在使广大读者理解基本概念，掌握基本知识，学会基本解题方法与解题技巧，提高应试能力。

本书作为一种辅助性的教材，具有较强的针对性、启发性、指导性和补充性的特点。考虑到读者的不同情况，我们在内容上做了以下安排：

1. 内容提要：串讲概念，总结性质和定理，知识全面系统。

2. 典型例题与解题技巧：精选各类题型，涵盖本章所有重要知识点，对题目进行深入、详细的讨论与分析，并引导学生思考问题、能够举一反三，拓展思路。

3. 历年考研真题评析：精选历年考研真题进行深入的讲解。

4. 课后习题全解：本书给出了龙驭球、包世华主编的《结构力学教程》（Ⅰ）（Ⅱ）各章习题的答案。我们不仅给出了详细的解题过程，而且根据难易程度把课后习题分成了三个等级，针对不同的等级我们给出了不同程度的讲解。

我们衷心希望本书提供的内容能够对读者在掌握课程内容、提高解题能力上有所帮助。同时，由于编者的水平有限，本书难免出现不妥之处，恳请广大读者批评指正。

华腾教育教学与研究中心

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目录 CONTENTS

第十章

矩阵位移法

内容提要

一、矩阵位移法

矩阵位移法以传统结构力学的位移法为理论基础，取结点位移作为基本未知量，通过对结构离散化，进行单元分析和整体分析，建立结构的总刚度方程，进而求得结点位移和单元杆端力。

矩阵位移法的特点是，在单元分析和整体分析的过程中，全部采用矩阵运算。

二、矩阵位移法的基本步骤

矩阵位移法计算分为三步：

(1)结构的离散化　将结构划分为若干单元，确定单元和结点的顺序编号。每个结点的位移分量为基本未知量。

(2)单元分析　对每个单元建立单元结点位移向量与单元结点力向量之间的关系式，即单元刚度方程。单元结点位移向量和结点力向量用单元局部编码表示。单元分析中的另一工作是确定单元的定位向量。

(3)整体分析　利用单元刚度方程和单元定位向量，将所有单元集合成原结构，建立结构的位移法基本方程，称为结构的整体刚度方程。同时引进位移边界条件，以便由结构的整体刚度方程解得结构的结点位移向量。

三、单元刚度矩阵

1. 局部坐标系下的单元刚度矩阵

(1)平面一般单元

$$k=\bar{k}^e=\begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}$$

式中:l——单元杆长;A——单元截面面积;I——单元截面惯性矩;E——材料的弹性模量。

(2)连续梁单元

每跨等截面连续梁的单元杆端位移分量仅为转角 $\bar{\theta}_1$ 和 $\bar{\theta}_2$,则其单元刚度矩阵为

$$\bar{k}^e=\begin{bmatrix} \frac{4EI}{l} & \frac{2EI}{l} \\ \frac{2EI}{l} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}$$

(3)桁架单元

桁架单元刚度矩阵可由一般单元刚度矩阵删去第 3,6 行和列,并令 $EI=0$ 得

$$\bar{k}^e=\begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & 0 & \frac{12EI}{l^3} \end{bmatrix}_{EI=0}=\begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. 整体坐标下的单元刚度矩阵

各单元在局部坐标下的刚度方程应转换为整体坐标下的刚度方程,

即 $\bar{F}^e=\bar{k}^e\bar{\Delta}^e \Rightarrow F^e=k^e\Delta^e$

其中 $k^e=T^T\bar{k}^eT, F^e=T^T\bar{F}^e, \Delta^e=T^T\bar{\Delta}^e$

坐标变换矩阵$[T]$为正交矩阵，所以$[T]^{-1}=[T]^T$。

(1)自由式平面刚架单元

$$[T]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}
\cos\alpha & \sin\alpha & 0 & & & \\
-\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & & 0 & \\
0 & 0 & 1 & & & \\
\hdashline
 & & & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\
 & 0 & & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\
 & & & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]$$

(2)自由式平面桁架单元

$$[T]=\left[\begin{array}{cc:cc}
\cos\alpha & \sin\alpha & & 0 \\
-\sin\alpha & \cos\alpha & & \\
\hdashline
 & & \cos\alpha & \sin\alpha \\
 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha
\end{array}\right]$$

α 角的确定则以整体坐标轴 x 顺时针转到局部坐标轴 $\bar{x}$ 为正。

四、整体刚度矩阵的集成

整体分析的目的是建立整体刚度方程

$$F=K\Delta$$

按单元的编码次序，利用单元定位向量将相应的单元刚度矩阵的元素集成到整体刚度矩阵中对应位置进行累加，即 $K^e \xrightarrow{\lambda^e} K$。

五、综合结点荷载

1. 直接作用于结点的荷载，为结点外力或支座反力。
2. 对非结点荷载作等效变换后得到等效结点荷载。

计算步骤如下：

(1)根据单元所受到的非结点荷载情况，计算单元局部坐标系下的单元等效结点荷载 $\bar{P}^e=-\bar{F}_p^e$。式中 $\bar{F}_p^e$ 为单元固端约束力。

(2)利用单元的坐标转换矩阵 T，求整体坐标系下的单元等效结点荷载 $P^e=T^T\bar{P}^e$。

(3)利用单元定位向量 λ^e 依次将单元等效结点荷载 P^e 集成到整体结构的等效结点荷载向量 P 中。

六、各杆的杆端力

单元杆端力的计算公式为

$$\overline{F}^e=\overline{k}^e\overline{\Delta}^e+\overline{F}_p^e$$

而将 $\overline{\Delta}^e=T\Delta^e$ 代入上式，得

$$\overline{F}^e=\overline{k}^eT\Delta^e+\overline{F}_p^e$$

式中：单元 $\overline{k}^e$、T 和 $\overline{F}_p^e$ 已经求得；Δ^e 为单元 e 在整体坐标系下两个端点的结点位移分量，可通过单元定位向量 λ^e 由已求出的结构结点位移向量 Δ 中取出。

典型例题与解题技巧

【例 1】 试用先处理法建立图 10-1(a)所示结构的整体刚度矩阵和结点荷载列阵。略去轴向变形影响。

解题分析 本题的特点包括对中间铰的处理和滑动支座的位移边界条件引入。采用先处理法的目的是减少整体刚度矩阵(以下简称总刚)的阶数。

解题过程 (1)首先对单元及结点位移编号。对结点位移编号时，凡已知结点位移一律编为 0，未知结点位移按结点编号顺序，逐个结点进行；在同一结点上，先编线位移后编角位移。结果如图 10-1(b)所示。

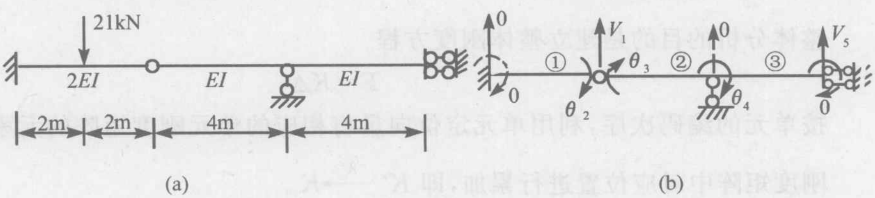

图 10-1

(2)形成各单元之单刚，为 4×4 阶。

$$[\overline{k}]^{①}=EI\cdot\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}(0)&(0)&(1)&(2)\end{array}\\ \left[\begin{array}{cccc}\frac{3}{8}&\frac{3}{4}&-\frac{3}{8}&-\frac{3}{4}\\ &2&\frac{3}{4}&1\\ &&\frac{3}{8}&\frac{3}{4}\\ &(\text{对称})&&2\end{array}\right]\end{array}\begin{array}{c}(0)\\(0)\\(1)\\(2)\end{array}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$
[\bar{k}]^{②}=EI\cdot
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} (1) & (3) & (0) & (4) \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccc}
\frac{3}{16} & -\frac{3}{8} & -\frac{3}{16} & -\frac{3}{8} \\
 & 1 & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} \\
 & \text{（对称）} & \frac{3}{16} & \frac{3}{8} \\
 & & & 1
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{c} \\ (1) \\ (3) \\ (0) \\ (4) \end{array}
$$

$$
[\bar{k}]^{③}=EI\cdot
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} (0) & (4) & (5) & (0) \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccc}
\frac{3}{16} & -\frac{3}{8} & -\frac{3}{16} & -\frac{3}{8} \\
 & 1 & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} \\
 & \text{（对称）} & \frac{3}{16} & \frac{3}{8} \\
 & & & 1
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{c} \\ (0) \\ (4) \\ (5) \\ (0) \end{array}
$$

矩阵号之外圆括号内的数字，表示该单元结点位移编号之整体码，它们构成了各单刚元素向总刚传送的地址码。

(3)结构包含五个未知结点位移，故总刚为 5×5 阶，按"对号入座"法，将各单刚元素送到总刚对应位置。凡单刚元素整体码行号或列号为 0 者，不送至总刚。结果为

$$
[K]=\left[\begin{array}{ccccc}
\frac{9}{16} & \frac{3}{4} & -\frac{3}{8} & -\frac{3}{8} & 0 \\
 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\
 & \text{（对称）} & & 2 & \frac{3}{8} \\
 & & & & \frac{3}{16}
\end{array}\right]
$$

(4)结点荷载列阵

本题仅单元 1 的固端反力为

$$\{\bar{F}_p\}^{①}=[10.5 \quad -10.5 \quad 10.5 \quad -10.5]^T$$

其余各单元的均为零。组装后，得

$$\{P\}=[-10.5 \quad 10.5 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

【例 2】 图 10-2 所示为等截面连续梁，$i=\dfrac{EI}{l}$，设支座 3 有沉降 Δ。试确定连续梁的整体刚度方程。

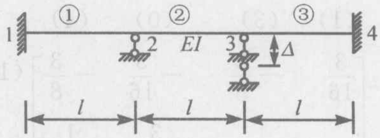

图 10-2

解题分析 图 10-2 所示三跨连续梁无荷载作用，但是结点 3 有支座沉陷 Δ。在矩阵位移法分析中，应该将结点 3 的支座沉陷转化为等效结点荷载。

解题过程 (1)结点位移分量和单元定位向量确定

连续梁有两个结点位移分量，即转角 θ_2 和 θ_3。各单元的定位向量为

$$\lambda^{①}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\lambda^{②}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\lambda^{③}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$$

(2)各单元的刚度矩阵相同，均为

$$k^{①}=k^{②}=k^{③}=2i\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}$$

(3)连续梁的整体刚度矩阵为

$$K=2i\begin{pmatrix}4 & 1\\1 & 4\end{pmatrix}$$

(4)求单元的等效结点荷载向量

单元①两端无支座沉陷，所以

$$P^{①}=-F_p^{①}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

单元②左端无支座沉陷，而右端支座有竖向沉陷 Δ，引起单元②的等效结点荷载向量为

$$P^{②}=-F_p^{②}=-\begin{bmatrix}-\dfrac{6i}{l}\Delta\\-\dfrac{6i}{l}\Delta\end{bmatrix}=\frac{6i}{l}\Delta\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

单元③左端有竖向沉陷 Δ，而右端无支座沉陷，单元的等效结点荷载向量为

$$P^{③}=-F_p^{③}=-\begin{bmatrix}\dfrac{6i}{l}\Delta\\\dfrac{6i}{l}\Delta\end{bmatrix}=-\frac{6i}{l}\Delta\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

(5)连续梁的等效结点荷载

利用单元定位向量和单元等效结点荷载向量集成连续梁的等效结点荷载。

$$P=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+\frac{6i}{l}\Delta\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-\frac{6i}{l}\Delta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\frac{6i}{l}\Delta\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

(6)连续梁的整体刚度方程

$$2i\begin{pmatrix}4 & 1\\1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta_2\\\theta_3\end{pmatrix}=\frac{6i}{l}\Delta\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

历年考研真题评析

【题 1】 (西南交通大学 2005 年)试用先处理法建立图 10-3(a)所示刚架的总刚度方程。受弯杆不计轴向变形。

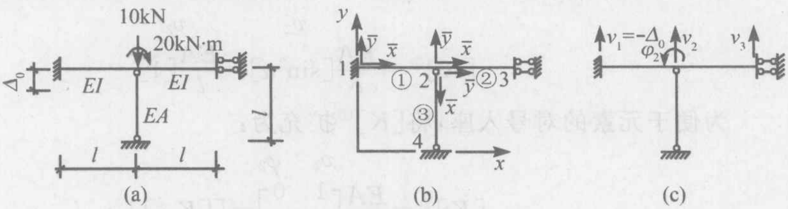

图 10-3

解题分析　由于在先处理法中单元刚度矩阵以子块阶数不同,有时需将子块添零扩充,以便子块入总刚。如本题 $K^{③}$。

表 10-1　基本数据

单　元	$i\to j$	刚　度	杆　长	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
①	1→2	EI	l	1	0
②	2→3	EI	l	1	0
③	2→4	EA	l	0	−1

解题过程　(1)对单元和结点编号,建立结构坐标系和单元坐标系如图(b)所示,基本数据见上表。

(2)建立结点位移列向量和结点力列向量

$$\{\Delta\}=\{v_1\quad v_2\quad \varphi_2\quad v_3\}^T$$

$$\{P\}=\{P_1^y\quad -10\quad -20\quad 0\}^T$$

(3)建立按结构坐标系的单元刚度矩阵

单元①和②的单元坐标系与结构坐标系一致。在单元①的杆端位移中,$u_1=u_2=\varphi_1=0$。

$$[K]^{①}=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}v_1 & v_2 & \varphi_2\end{array}\\ \left[\begin{array}{c|cc}\dfrac{12EI}{l^3} & \dfrac{12EI}{l^3} & \dfrac{6EI}{l^2}\\ \hline -\dfrac{12EI}{l^3} & \dfrac{12EI}{l^3} & -\dfrac{6EI}{l^2}\\ \dfrac{6EI}{l^2} & -\dfrac{6EI}{l^2} & \dfrac{4EI}{l}\end{array}\right]\end{array}=\left[\begin{array}{c|c}[K_{11}] & [K_{12}]\\ \hline [K_{21}] & [K_{22}]\end{array}\right]$$

在单元②的杆端位移中,$u_2=u_3=\varphi_3=0$。

$$\begin{array}{cccc} & v_2 & \varphi_2 & v_3 \\ [K]^{②}= & \left[\begin{array}{cc:c} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} \\ \hdashline \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} \end{array}\right] \end{array}=\left[\begin{array}{c:c} [K_{22}] & [K_{23}] \\ \hdashline [K_{32}] & [K_{33}] \end{array}\right]$$

单元③为桁架单元，杆端位移 $u_2=u_4=v_4=0$。

$$[K]^{③}=\frac{EA}{l}\overset{v_2}{[\sin^2\alpha]}=\frac{EA}{l}\overset{v_2}{[1]}$$

为便于元素的对号入座，将$[K]^{③}$扩充为：

$$\begin{array}{ccc} & v_2 & \varphi_2 \\ [K]^{③}=\frac{EA}{l} & \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}=[[K_{22}]]$$

(4)建立结构总刚度方程

各单元刚度矩阵子块按下标对号入座形成总刚度矩阵，将 $v_1=-\Delta_0$。代入结点位移列向量，得

$$\left[\begin{array}{c:ccc} \frac{12EI}{l^3} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 \\ \hdashline -\frac{12EI}{l^3} & \frac{24EI}{l^3}+\frac{EA}{l} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} \\ \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{8EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} -\Delta_0 \\ \hdashline v_2 \\ \varphi_2 \\ v_3 \end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{c} P_1 \\ \hdashline -10 \\ -20 \\ 0 \end{array}\right\}$$

将$[K]$，$\{\Delta\}$，$\{P\}$分块相乘，得

$$\left\{\begin{array}{c} -\frac{12EI}{l^3} \\ \frac{6EI}{l^2} \\ 0 \end{array}\right\}(-\Delta_0)+\left[\begin{array}{ccc} \frac{24EI}{l^3}+\frac{EA}{l} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} \\ 0 & \frac{8EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} \\ -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} v_2 \\ \varphi_2 \\ v_3 \end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{c} -10 \\ -20 \\ 0 \end{array}\right\}$$

经整理得结构总刚度方程为

$$\left[\begin{array}{ccc} \frac{24EI}{l^3}+\frac{EA}{l} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} \\ 0 & \frac{8EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} \\ -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} v_2 \\ \varphi_2 \\ v_3 \end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{c} -10-\frac{12EI}{l^3}\Delta_0 \\ -20+\frac{6EI}{l^2}\Delta_0 \\ 0 \end{array}\right\}$$

【题 2】 （东南大学 2006 年）设图 10-4 所示刚架各杆的 E、I、A 相同，且 $A=12\sqrt{2}\dfrac{I}{l^2}$，求各杆内力，作内力图。

解题分析 由对称性，取一半进行计算，简图如图所示。

用后处理法，处理刚架的计算步骤如下。

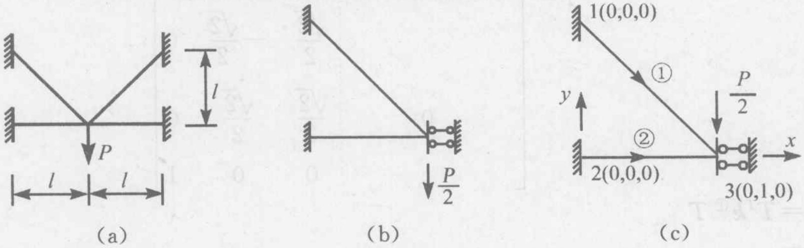

图 10-4

解题过程 （1）对单元、结点、结点位移分量编号。

刚架结构每个结点有三个位移分量码（图(c)）。对混合结点，可增加位移分量码或增加结点码。

（2）写出局部坐标系下的单刚。

①单元 $l_1=\sqrt{2}l$，$A_1=A=12\sqrt{2}\dfrac{I}{l^2}$，$I_1=I$

$$\bar{k}^{①}=\frac{EI}{l^3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}12 & 0 & 0 & -12 & 0 & 0\\ 0 & 3\sqrt{2} & -3l & 0 & -3\sqrt{2} & -3l\\ 0 & -3l & 2\sqrt{2}l^2 & 0 & 3l & \sqrt{2}l^2\\ \hline -12 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0\\ 0 & -3\sqrt{2} & 3l & 0 & 3\sqrt{2} & 3l\\ 0 & -3l & \sqrt{2}l^2 & 0 & 3l & 2\sqrt{2}l^2\end{array}\right]$$

②单元 $l_2=l$，$A_2=A=12\sqrt{2}\dfrac{I}{l^2}$，$I_2=I$

$$\bar{k}^{②}=\frac{EI}{l^3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}12\sqrt{2} & 0 & 0 & -12\sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & 12 & -6l & 0 & -12 & -6l\\ 0 & -6l & 4l^2 & 0 & 6l & 2l^2\\ \hline -12\sqrt{2} & 0 & 0 & 12\sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & -12 & 6l & 0 & 12 & 6l\\ 0 & -6l & 2l^2 & 0 & 6l & 4l^2\end{array}\right]$$

（3）计算整体坐标系下的单刚。

①单元 $\alpha=-45°$，$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\sin\alpha=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$T=\left[\begin{array}{ccc:ccc}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & & & \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ \hdashline & & & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ & 0 & & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$k^{①}=T^{T}\bar{k}^{①}T$$

$$=\frac{EI}{l^3}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}(0) & (0) & (0) & (0) & (1) & (0)\end{array}\\ \left[\begin{array}{ccc:ccc}6+\frac{3\sqrt{2}}{2} & -6+\frac{3\sqrt{2}}{2} & -\frac{3\sqrt{2}}{2}l & -6-\frac{3\sqrt{2}}{2} & 6-\frac{3\sqrt{2}}{2} & -\frac{3\sqrt{2}}{2}l \\ -6+\frac{3\sqrt{2}}{2} & 6+\frac{3\sqrt{2}}{2} & -\frac{3\sqrt{2}}{2}l & 6-\frac{3\sqrt{2}}{2} & -6-\frac{3\sqrt{2}}{2} & -\frac{3\sqrt{2}}{2}l \\ -\frac{3\sqrt{2}}{2}l & -\frac{\sqrt{3}}{2}l & 2\sqrt{2}l^2 & \frac{3\sqrt{2}}{2}l & \frac{3\sqrt{2}}{2}l & \sqrt{2}l^2 \\ \hdashline -6-\frac{3\sqrt{2}}{2} & 6-\frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2}l & 6+\frac{3\sqrt{2}}{2} & -6+\frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2}l \\ 6-\frac{3\sqrt{2}}{2} & -6-\frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2}l & -6+\frac{3\sqrt{2}}{2} & 6+\frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2}l \\ -\frac{3\sqrt{2}}{2}l & -\frac{3\sqrt{2}}{2}l & \sqrt{2}l^2 & \frac{3\sqrt{2}}{2}l & \frac{3\sqrt{2}}{2}l & 2\sqrt{2}l^2\end{array}\right]\end{array}\begin{array}{c}\\(0)\\(0)\\(0)\\(0)\\(1)\\(0)\end{array}$$

②单元　$\alpha=0$，$\cos\alpha=1$，$\sin\alpha=0$

$T=I$(式中 I 为与 T 同阶的单位矩阵)

所以

$$k^{②}=T^{T}\bar{k}^{②}[T]=\bar{k}^{②}$$

$$=\frac{EI}{l^3}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}(0) & (0) & (0) & (0) & (1) & (0)\end{array}\\ \left[\begin{array}{ccc:ccc}12\sqrt{2} & 0 & 0 & -12\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -6l & 0 & -12 & -6l \\ 0 & -6l & 4l^2 & 0 & 6l & 2l^2 \\ \hdashline -12\sqrt{2} & 0 & 0 & 12\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 6l & 0 & 12 & 6l \\ 0 & -6l & 2l^2 & 0 & 6l & 4l^2\end{array}\right]\end{array}\begin{array}{c}\\(0)\\(0)\\(0)\\(0)\\(1)\\(0)\end{array}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com