公共类

依据国家自考委最新自考大纲及新修版教材编写

YI JU GUO JIA ZI KAO WEI ZUI XIN ZI KAO DA GANG JI XIN XIU BAN JIAO CAI BIAN XIE

高等教育自学考试指定教材同步配套题解

# 线性代数

主编 刘泮振

现代出版社

高等教育自学考试指定教材同步配套题解

（公　共　类）

# 高等数学(二)

## 第一分册　线性代数

**图书在版编目(CIP)数据**

高等数学(二)/刘泮振,王瑗 主编—北京:现代出版社,2000.10

全国高等教育自学考试指定教材同步配套题解·公共课

ISBN 7-800028-591-X

Ⅰ.高… Ⅱ.①刘…②王… Ⅲ.高等数学-高等教育-自学考试-解题 Ⅳ.013-44

12

**中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 76141 号**

**高等教育自学考试指定教材同步配套题解**

**高等数学(二)**(线性代数)

---

责任编辑:姜秀云
出版发行:现代出版社
地　　址:北京安定门外安华里 504 号(100011)
印　　刷:中国科学院印刷厂
开　　本:880×1230 1/32
版　　次:2000 年 10 月第 1 版 2002 年 4 月第 2 次印刷
印　　数:10001-20000 册
印　　张:8.375

---

书　　号:ISBN 7-80028-591-X/G·197
定　　价:256.00(16 册)
本册定价:12.00 元

# 寄 语 考 生

随着我国教育总方针由应试教育向素质教育的转变，作为我国高等教育重要组成部分的自学考试也发生了重大变化。全国自考委在专业设置、考试计划、出题指导方针等方面都做了重大的调整，同时，对自学考试大纲、指定教材亦做了全方面的修订、编写。

新形势下，为使广大自考学员能及时、快速地掌握新教材，我们对原有的系列辅导用书进行了全面的修订，并不断地推出新品种以飨读者。

**本套“指定教材同步配套题解”有以下特点：**

**新**—①内容新。本套丛书全部按最新的自学考试大纲及最新版指定教材内容编写。

②结构新。同原辅导及其它辅导相比，修订后的辅导用书编排体例更加科学，增加了“本门课的学习与考试”部分。这是全书的点睛之笔。

**全**—信息全。本套辅导书涵盖了大纲中所有的知识点、考核点，并精心编拟大量“综合练习题”，训练强度大，解答准确。特别指出的是根据《高等教育自学考试活页文丛》（人大版）对教材中没有补充的内容，在本辅导中都做了详尽补充。

**强**—①作者阵容强。本套丛书的作者，有指定教材的主编，有专业教研室主任，有长期参加辅导的主讲教师。他们对自考教材分析透，对出题规律掌握准。

②针对性强。书后针对新大纲及考卷合理设计多套“全真模拟试题”，增强考生临场经验，增加本书实用性。

愿本套“同步配套题解”能帮助您顺利通过自考难关，早日实现美好理想。

《高等教育自学考试指定教材同步配套题解》编委会

# 前　言

《高等数学(二)》是高教自考所有科目中最难的课程之一，许多考生交谈起来，说最怕的就是这门课，甚至因该课程屡试不过而放弃毕业的学生也为数不少。

《高等数学(二)》是在《高等数学(一)》的基础上开设的又一门高等数学课程，它除具有数学学科本身的严密性和逻辑性之外，又特别具有高度的抽象性(如"线性代数")和研究方法的特殊性(如"概率统计")。要学好这门课必须对该课程理论有深刻的理解，同时还要理论联系实际，做好各类习题。

本书编排从"帮助考生"这一主导思想出发，在内容部分，按章排列，各章分四个部分：第一部分为"目的要求"，它是按国家教委统一规定的教学大纲要求，简明扼要的告诉学生对该章应掌握什么，理解什么；第二部分为"重点内容"，它是从指定的教材中提炼出来的纲领性知识，平时学习时就注意对这些知识点的掌握，在复习时更要抓住这些内容进行记忆；第三部分是"典型例题分析"，它包括精选出来的既注意代表性，又注意对知识的覆盖面，同时注意难易层次的各类例题，在对例题进行解答的同时，通过加"注意"的方式，帮助学生正确理解概念，掌握方法；第四部分是"重点习题解答"，它给出教材中的大部分习题的正确解答，而这些习题的筛选，也是从"面对考试"的目的出发(《概率统计》分册第一章和第四章没有这一部分，是为了减轻考生负担，也为了压缩篇幅)。

在复习了各章内容之后，请认真做完本书后面的"总复习题"，并参考给出的正确答案，检验自己的学习情况。该部分按自学考试的题型安排，列出了大量习题，尤其是其中包含 1992 年以来的历届考试试题，它对学生熟悉考试类型、了解考试难度有极重要的作用。

为了帮助考生，笔者特根据多年的阅卷经验，编写了"自考应试技巧"，仔细阅读这一部分，可使考生更好地发挥自己的水平，有效地

提高考试成绩，起到“事半功倍”的效果。

书末附有两套《模拟试题》及参考答案。

本书最主要是为参加高等教育自学考试的学生编写的，但对于其他各类学习这门课的学生都大有裨益，可作为学习《线性代数》的参考书。

本书由刘泮振副教授组织编写并任主编，王媛、苏白云、张建立任副主编，参加编写的还有杨建伟、孔祥毅、王宏生、艾明要和石永生。

编　者

# 目　　录

# 第一章　行列式

## 目的要求

行列式是研究线性方程组的一个重要工具。学习本章应首先掌握行列式、余子式和代数余子式的概念，熟知行列式的性质，能利用行列式的性质熟练、准确地计算行列式，并能运用克莱姆法则求解简单的线性方程组。

## 重点内容

### 一、行列式的定义

1. 由 $n^2$ 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 $n$ 阶行列式，记作 $A$，其中 $a_{ij}$ 称为 $A$ 的元素，横排为行，纵排为列，$i,j$ 分别称为行标和列标。

2. 由行列式 $A$ 中划去第 $i$ 行第 $j$ 列后剩下的 $n-1$ 行 $n-1$ 列元素组成的行列式称为 $a_{ij}$ 的余子式，记作 $M_{ij}$；而 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为 $a_{ij}$ 的代数余子式。

3. $n$ 阶行列式 $A$ 的值

$$\begin{aligned} A &= a_{1j}M_{1j}-a_{2j}M_{2j}+\cdots+(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}+\cdots+(-1)^{n+j}a_{nj}M_{nj} \\ &= a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \qquad (1\leqslant j\leqslant n) \end{aligned}$$

注意 1　$M_{ij}$、$A_{ij}$ 只与 $a_{ij}$ 所处的行、列有关，而与 $a_{ij}$ 的值无关，且当 $i+j$ 为偶数时，$A_{ij}=M_{ij}$；当 $i+j$ 为奇数时，$A_{ij}=-M_{ij}$.

注意 2　特殊地，一阶行列式 $A=|a_{11}|=a_{11}$。上式中又称为 $A$ 按第 $j$ 列的展开式。

## 二、行列式的性质

1. 行列式行列互换，其值不变，即 $A = A'$，其中 $A'$ 称为 $A$ 的转置行列式。

注意 1　这个性质说明行列式中行列地位的对称性，即行具有的性质列同样也具有。如任一行列式 $A$ 按列展开与按行展开是一样的，即

$$\begin{aligned} A &= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \\ &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}(1 \leqslant i, j \leqslant n) \end{aligned}$$

2. 用数 $k$ 乘行列式的某行(列)，等于以数 $k$ 乘行列式，或者说行列式中某一行(列)的公因子可以提出来。

注意 2　从此性质可推出，某行列式某一行(列)元素全为零，则此行列式的值等于零。

3. 交换行列式两行(列)，行列式变号。

注意 3　此性质可推出，若行列式某两行(列)元素相同或成比例，则此行列式等于零。

4. 若行列式中某一行(列)的元素 $a_{ij}$ 都可分解为两个数 $b_{ij}$ 和 $c_{ij}$ 的和，即 $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$，则此行列式也可分解为两个行列式的和。

5. 把行列式 $A$ 的某一行(列)的元素都乘以一个常数 $k$ 加到另一行(列)上，则此行列式值不变。

## 三、行列式的计算

本章的重点是关于行列式的计算，由于行列式的类型多种多样，这就使得行列式的计算有了一定的难度，下面仅就一些常见的类型和常用的方法加以介绍。

1. 定义法(降阶法)：利用行列式按某行(列)展开公式将高阶行列式降成低阶行列式，降阶时注意按零元素较多的行或列展开，可使计算得以简化。

2. 零值法：这种类型常见于一些行列式各行(列)形式基本一样，只是字母的符号略有不同。具体做法是将某一行(列)的若干倍加到另外两行(列)上，使其出现两行(列)元素对应相等或成比例，从而得

出其值为零。

3.化三角形行列式法:利用行列式性质将行列式化成上三角形或下三角形行列式,从而得出结论,这是一种常用的方法。

4.递推法:这种方法一般步骤是:从原始行列式出发,找到高阶行列式和一个或几个同型的低阶行列式之间的关系式(称为递推关系)后,再归纳运算出结果。

5.拆开法:当行列式中的元素有两数相加时将原行列式拆成几个简单的行列式加以计算。

6.范德蒙行列式法:这种方法是将原行列式利用性质化成范德蒙行列式,再利用其结果计算出原行列式。范德蒙行列式为:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$$

## 四、克莱姆法则

1.如果方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列式

$$A=\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\cdots a_{2n} \\ a_{n1}a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$$

则此方程组有且仅有惟一解

$$x_j=\frac{A_j}{A}(j=1,2,\cdots,n)$$

其中 $A_j$ 是将 $A$ 中第 $j$ 列换成常数列 $b_1,b_2,\cdots b_n$ 所得的行列式。

注意 1　克莱姆法则适用于方程的个数和未知量个数相同且系数行列式不为零的方程组。其他类型的方程组在第三章中加以讨论。

注意 2　作为一般方程组的特殊情况,齐次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

有非零解的充要条件是系数行列式 $|A|=0$.

## 典型例题分析

例 1. 分析判断下列命题的正误。

①每行元素之和为零的行列式的值等于零。

②

$$\begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} \\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ a_{n1}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} \\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ a_{n1}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2a_{11}\cdots 2a_{1n} \\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ 2a_{n1}\cdots 2a_{nn} \end{vmatrix}$$

③设 $A=\begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} \\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ a_{n1}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$,则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}+a_{11} & \cdots & a_{2n}+a_{1n} \\ a_{n1}+\cdots+a_{21}+a_{11} & \cdots & a_{nn}+\cdots+a_{2n}+a_{1n} \end{vmatrix}=A$$

④设 $A$ 为 $n$ 阶行列式,其第三行元素分别为 $-1,1,3,-2$,其所对应的余子式分别为 $-3,-1,-2,-2$,则 $A=-6$.

⑤当 $a=b$ 或 $a=-b$ 时,

$$\begin{cases} ax_1+bx_2=0 \\ bx_1+ax_2=0 \end{cases}$$

才有零解。

解:①正确。把行列式 $A$ 的第 2 列,第 3 列,…,第 $n$ 列的各元素加到第 1 列的对应元素上所得行列式 $A_1=A$,而 $A_1$ 的第 1 列元素全为零,故 $A=A_1=0$.

②错误,左边等于

$$2\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

而右边每一行提取一个 2 共提取 $2^n$ 个,从而右边等于

$$2^n\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

③正确。左边行列式相当于由 $A$ 的第一行加到第二行，第二行再加到第三行，……，第 $n-1$ 行加到第 $n$ 行，故行列式值不变。

④正确。因

$$
\begin{aligned}
A &= a_{31}(-1)^{3+1}M_{31}+a_{32}(-1)^{3+2}M_{32}+a_{33}(-1)^{3+3}M_{33} \\
&\quad +a_{34}(-1)^{3+4}M_{34} \\
&=(-1)\cdot(-3)+1\cdot(-1)\cdot(-1)+3\cdot(-2) \\
&\quad +(-2)\cdot(-1)\cdot(-2)=-6
\end{aligned}
$$

⑤错误。齐次线性方程组在任何情况下都有零解，是否只有零解要看系数行列式 $A$ 是否为零，当 $A=0$ 时有非零解，当 $A\neq0$ 时只有零解，因此本题当 $a=b$ 或 $a=-b$ 时有非零解，当 $a\neq b$ 且 $a\neq-b$ 时只有零解。

例 2. 设

$$
A=\begin{vmatrix} 6 & 0 & 8 & 0 \\ 5 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & -3 \end{vmatrix}
$$

写出 $D$ 按第三行的展开式，并且算出 $D$ 的值。

解：

$$
\begin{aligned}
A &= 0\cdot A_{31}+2\cdot A_{32}+0\cdot A_{33}+0\cdot A_{34} \\
&= 2\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 6 & 8 & 0 \\ 5 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} \\
&= -2\times98=-196
\end{aligned}
$$

注意　行列式按一行(列)展开的公式可以用来计算 $n$ 阶行列式，但是，直接按这种方法展开，只是把一个 $n$ 阶行列式的计算换成计算 $n$ 个 $n-1$ 阶行列式，计算量不一定减少多少，而只有当行列式中某一行或某一列含有较多的零时，应用这种方法才有真正的意义。因此，如果行列式的行或列没有很多零元素，我们可以先利用行列式的性质，使得某一行或某一列变成只有一两个非零元素，然后按这一

行(列)展开,这样继续下去,就可把一个较高阶行列式最后变成一两个二阶行列式。

例 2. 计算下列行列式

$$A=\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

解:将 $A$ 按第一列展开

$$A=x\begin{vmatrix} x & y & \cdots & 0 & 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}+(-1)^{n+1}y\begin{vmatrix} y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & y & \cdots & 0 & 0 \\ & \cdots & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \end{vmatrix}$$

$$=x\cdot x^{n-1}+(-1)^{n+1}y\cdot y^{n-1}=x^n+(-1)^{n+1}y^n$$

注意　以上两题用的是定义法。

例 3. 计算$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

解:原式$\overset{[1,4]}{=\!=\!=}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[(1)[1]+[4]]{(-2)[1]+[3]}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 6\\0 & 1 & 2 & 4\\0 & -2 & -1 & -11\\0 & 4 & 6 & 8\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(-4)[2]+[4]]{(2)[2]+[3]}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 6\\0 & 1 & 2 & 4\\0 & 0 & 3 & -3\\0 & 0 & -2 & -8\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\frac{2}{3}[3]+[4]}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 6\\0 & 1 & 2 & 4\\0 & 0 & 3 & -3\\0 & 0 & 0 & -10\end{vmatrix}$$

$$=-1\times1\times3\times(-10)=30$$

例 4. 计算

$$A=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ & \cdots & \cdots & & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

解：原式 $\xlongequal[j=2,3,\cdots,n]{(1)[j]+[1]}\begin{vmatrix} n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ n-1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ n-1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ & \cdots & \cdots & & \\ n-1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

$$=(n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ & \cdots & \cdots & & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{(1)[1]+[i]}(n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$$

$=(-1)^{n-1}(n-1)$。

注意　以上两题所用方法是化三角形行列式法。