高等院校土木工程专业选修课**教材**

弹性力学

（土木工程专业适用）

■ 李遇春　编著

TANXING LIXUE

中国建筑工业出版社

GAODENG YUANXIAO TUMU GONGCHENG ZHUANYE XUANXIUKE JIAOCAI

高等院校土木工程专业选修课教材

弹 性 力 学

（土木工程专业适用）

李遇春　编著

中国建筑工业出版社

图书在版编目（CIP）数据

弹性力学/李遇春编著. —北京：中国建筑工业出版社，2009

高等院校土木工程专业选修课教材（土木工程专业适用）

ISBN 978-7-112-10778-0

Ⅰ. 弹… Ⅱ. 李… Ⅲ. 弹性力学-高等学校-教材 Ⅳ. O343

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 026612 号

本书是为土木工程专业本科生编写的弹性力学教材，本书针对土木工程（应用）的特点，选材内容包括：弹性力学基本方程的建立、平面问题、空间轴对称问题、应力应变坐标变换、等截面直杆的扭转、薄板的小挠度弯曲、温度应力、变分原理。本书同时介绍了弹性力学在土木工程中的一些重要应用实例，如：地基应力与沉降计算原理、混凝土板的计算方法、混凝土材料受拉劈裂试验的力学原理、混凝土结构温度裂缝分析、工程应变分析、结构中的剪力滞问题等。

本书覆盖的内容较宽，可作为土木工程专业本科生的教科书，也可供土木工程专业硕士研究生、工程硕士和结构工程师参考。

* * *

责任编辑：咸大庆 刘瑞霞 王 梅

责任设计：赵明霞

责任校对：兰曼利 梁珊珊

高等院校土木工程专业选修课教材

弹 性 力 学

（土木工程专业适用）

李遇春 编著

*

中国建筑工业出版社出版、发行（北京西郊百万庄）

各地新华书店、建筑书店经销

北京千辰公司制版

北京富生印刷厂印刷

*

开本：787×1092 毫米 1/16 印张：10¾ 字数：262 千字

2009 年 5 月第一版 2009 年 5 月第一次印刷

定价：**22.00** 元

ISBN 978-7-112-10778-0

（18025）

前　　言

本书是为土木工程专业本科生编写的弹性力学教材，本书在选材及内容叙述上具有土木工程专业的鲜明特点。

在过去的几十年里，国内出现过一批优秀的弹性力学教材，这些教材的作者基本都是以力学研究者的观点来编写教材，强调力学理论的系统性与严密性，尤其注重力学中各种不同分析方法的描述，编写的教材具有通用性，适合于力学、土木、水利、机械等专业，对于工程应用通常只作一般性的讨论。这种编写教材的方式，无疑对学生（尤其是力学专业的学生）奠定扎实的理论基础、培养理性思维能力具有很好的作用。对于土木工程专业而言，弹性力学可以说是土木工程师最基本的分析工具，然而土木工程专业的学生在选修弹性力学这门课程时往往感到困惑、难学，常常听到学生抱怨，书很难看懂，须上课听老师讲授以后，才有所领会，学懂了理论，但能解决什么实际工程问题还是模糊不清。传统教材往往认为弹性理论在工程中的具体应用是专业课的事情，而专业课在应用弹性理论时，很少谈及计算方法与公式是如何得到的，理论与实际应用之间似乎缺少一些必要的联系。作者尝试以一个土木（结构）工程师的视角来编写本书，在尽力满足弹性理论系统性的基础上，精心编写了较多的工程应用实例，展示土木工程中的弹性力学现象，在弹性理论与实际工程应用之间建立起联系，体现土木工程专业的特点，强调弹性力学在土木工程中的应用价值。为便于学生自学，本书在叙述方式上力求简单明了，在内容叙述和公式推导过程中采用了较多的插图加以说明，避免使用张量、复变函数等高深的数学知识。本书编写了较多的习题，并对大部分的习题给出了参考答案，可供教师和学生选用，书中带星号（*）的习题为研究型题目，要求解这些问题，除了本书的知识以外，还要查阅其他的文献资料才能解决，通过对研究型题目的钻研并撰写小型的学术论文，可激发学生的研究兴趣，提高学生解决实际工程问题的能力。作者在编写本书的过程中，参阅了大量的国内外相关的力学教材与专著，特别注意吸收国外最新力学教材的新颖内容、好的编写方式。

本书应用了较多的数学知识来解析弹性力学问题，由于数值（如有限元）计算技术的迅猛发展，人们更多地依赖于数值计算方法来求解弹性力学问题，而疏于解析方法的研究和应用。作者深感目前土木专业的学生（尤其是研究生），其应用解析方法求解工程问题的能力已大不如从前。一个数值解只能窥探豹的一个斑点，而唯有解析（公式）解才可以窥视全豹，能更为全面、深刻地理解问题的物理本质。作者期望本书能为土木专业的学生提供这样一个训练素材，用以提高其解析问题的能力。本书对弹性力学中的某些数学难点，在附录中给予了说明。

本书覆盖的内容较广，虽是为土木工程专业本科生编写的，但也可作为土木工程专业硕士研究生、工程硕士研究生的参考书或教科书，本书也可供土木结构工程师参考。本书的预备知识为高等数学（微积分、微分方程）、线性代数、理论力学与材料力学（或结构力学）。

作者感谢研究生贾世文、李玲、田敬为本书一部分习题作出了解答，感谢本书编辑刘瑞霞博士所作出的辛勤劳动。

本书编者学识有限，书中必有谬误或不妥之处，恳请专家和读者来信指正。（上海市四平路1239号同济大学结构工程与防灾研究所，E-mail：YCL2000@tongji. edu. cn）

李遇春

2009年3月

目　　录

第5章 平面问题极坐标解答

第6章 应力、应变坐标变换

第7章 空间轴对称问题

第8章 柱体的扭转

第1章　绪　　论

1.1 弹性力学的研究对象与任务

弹性力学是固体力学的一个分支学科，是研究固体材料在外部作用下（外部作用一般包括：荷载、温度变化以及固体边界约束改变）弹性变形及应力状态的一门学科。

土木工程中的结构物设计与力学息息相关、紧密联系。我们已学过材料力学及结构力学，那么土木工程专业的学生为什么还要学习弹性力学呢？我们知道材料力学及结构力学这两门课程主要研究的是“杆状”构件（或结构）的力学问题，所谓的“杆状”构件是指构件的纵向尺寸远大于其横向尺寸，如常见的梁构件，其纵向长度远大于梁高和宽，对于这样的构件或结构可以引入某些计算假定，如平截面假定，由这些假定所得到的分析结果与实际情况吻合良好，这一类的“杆状”构件在土木工程中得到了大量的应用，例如：连续梁、框架、排架及桁架结构等，采用材料力学与结构力学可以研究这类结构的强度、刚度以及稳定性问题，为结构设计提供计算依据。然而工程上还存在着许多其他的“非杆状”结构，例如：图1-1～图1-7所示的各类结构，这些结构均不能采用材料力学及结构力学的方法求解。图1-1的简支深梁由于梁高与跨度比较接近，材料力学中的平截面假定在这里不成立，因此材料力学关于梁的解答是不可以采用的，必须采用弹性力学的方法求解深梁的应力分布，对于混凝土深梁而言，只有知道了深梁内部的拉应力分布状况，才可以进行相应的配筋设计；图1-2为砖混结构中常见的墙梁，它由混凝土与砖砌体两种材料组成，对于混凝土梁的设计分析，应考虑砌体的影响，应将砌体与梁作整体弹性力学分析，由于砌体具有拱效应，混凝土梁实际上起到一个拉杆的作用（偏心受拉构件），这样混凝土梁的截面就可以设计得较小，如果按材料力学或结构力学方法，单独对混凝土梁进行力学分析，则得到的混凝土梁截面会非常的粗大，浪费材料，而且达不到预期的结构效果；图1-3为高层建筑中的一种常见结构体系，由于建筑物上面为小开间住宅，可设计成全剪力墙结构，下面为大开间的商店，需要设计成框架结构，于是在两种结构之间会出现一个所谓的转换层，常见的转换层结构采用的是框支梁，这个梁的高度至少有一层楼高，具有深梁的特性，框支梁的受力很复杂，一般要作精细的弹性力学（有限元）分析，才能作出合理的配筋设计；图1-4的大坝为块状结构物，显然材料（或结构）力学在这里无法得到块状结构的应力解答，而必须采用弹性力学的方法才能得到大坝的应力解答，为坝体的设计提供参考；图1-5为房屋建筑中常见的双向板楼盖，我们知道单向板楼盖的荷载是沿一个方向传递的，因此楼板可以简化为连续梁来进行计算，而双向板的荷载是沿两个方向传递的，梁理论已不再适用，必须采用弹性力学中的薄板理论求解，计算板内的弯矩分布，为配筋设计提供依据；图1-6为壳体屋盖结构，一个著名的范例是北京火车站大厅35m×35m的双曲扁壳屋盖，这类壳体结构必须采用弹性力学中的壳体理

论来分析其内力或应力（壳体内容是弹性力学专题内容，不在本书的讨论范围）；图 1-7 为房屋建筑中的地基基础，地基承载力与变形计算是地基基础设计的重要内容，地基是一个半无限体，需采用弹性力学的方法来分析地基的附加应力与变形。类似的工程实例还有很多。

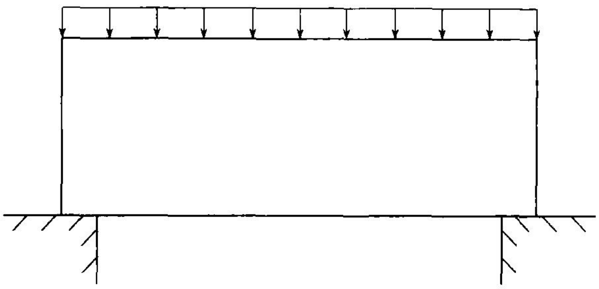

图 1-1　简支深梁

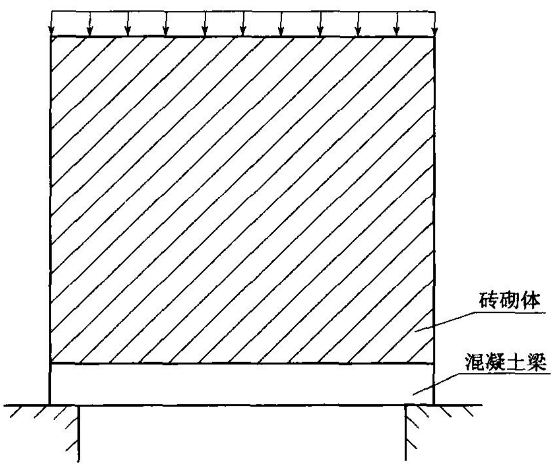

图 1-2　墙梁

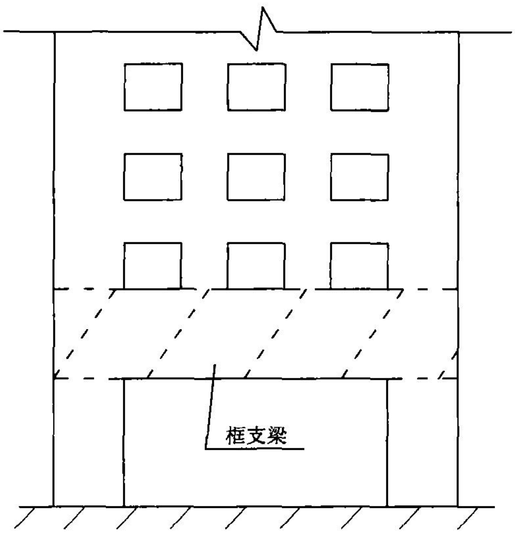

图 1-3　框支结构

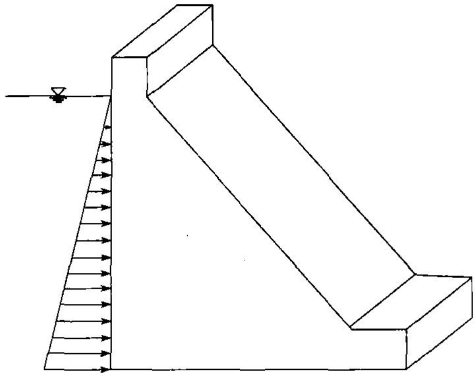

图 1-4　大坝（块状结构）

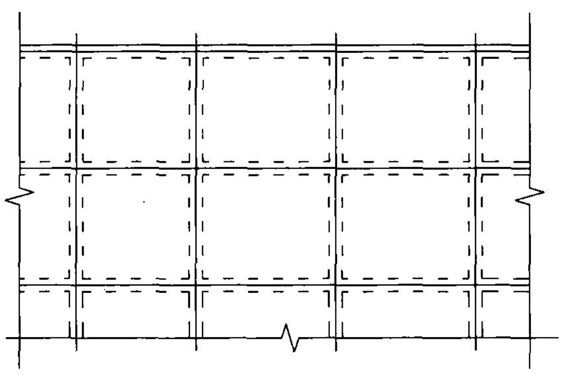

图 1-5　双向板楼盖

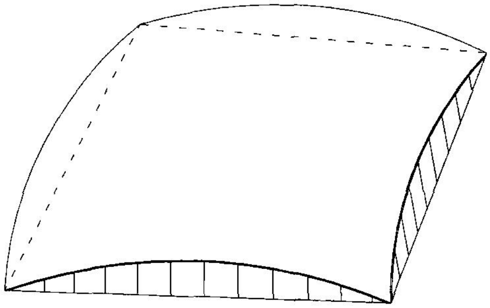

图 1-6　壳体屋盖

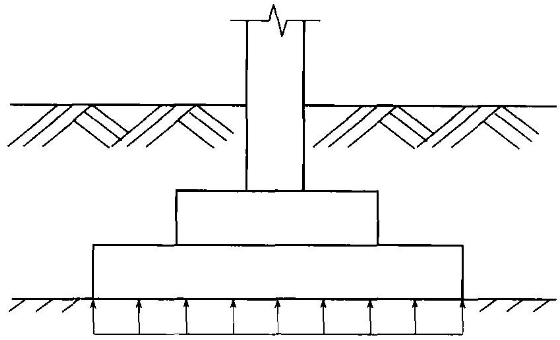

图 1-7　地基基础

弹性力学大大扩展了解决土木结构问题的范围。理论上，弹性力学包容材料力学及结构力学，可以说弹性力学是土木工程中最基本的力学分析工具。

1.2　弹性力学的基本假设

1. 连续性假设

假定所研究的固体材料是连续无间隙（无空洞）的介质，从微观上讲，固体材料中的原子与原子之间是有空隙的，固体在微观上是间断的，或不连续的；而从宏观上看，即使是很小一块固体，里面也挤满了成千上万的原子，宏观上的固体看起来是密实而连续的，弹性力学正是从宏观上研究固体的弹性变形及应力状态。根据这一假设，可以认为物体中的位移、应力与应变等物理量都是连续的，可以表示为空间（位置）坐标的连续函数。

2. 均匀性与各向同性假设

假定固体材料是均匀的，并且在各个方向上物理特性相同，也即材料的物理性质在空间分布上是均匀的（或不变的），例如材料的弹性模量、泊松比及密度可以假设为常数，不随位置坐标改变。在处理实际问题时，可以取出物体内任一部分确定其弹性模量、泊松比及密度，然后可将这一结果用于整个物体。钢材由微小晶体所组成，晶体本身是各向异性的，但由于晶体很微小而排列又杂乱无章，按平均的物理性质，钢材可以认为是均匀的、各向同性的弹性体。混凝土由几种材料均匀混合而成，宏观上可看成是均匀的，混凝土在拉伸与压缩两个方向上的物理力学性质有很大的差别，所以混凝土可看成是均匀的各向异性材料；显然木材也为各向异性材料，因为木材顺纹方向的抗拉强度要高于横纹方向的抗拉强度；各向同性的钢材在受到冷拉（冷加工）以后，也会变成各向异性材料，因为钢材内的晶体在受拉的方向上被拉长了，排列也有序了，受拉方向的抗拉强度增加了，而垂直于受拉方向的抗拉强度下降了。

3. 小变形假设

假定固体材料在受到外部作用（荷载、温度、变形等）后的位移（或变形）与物体的尺寸相比是很微小的，在研究物体受力后的平衡状态时，物体尺寸及位置的改变可忽略不计，物体位移及形变的二次项可略去不计，由此得到的弹性力学微分方程将是线性的，即所谓的线性弹性力学，因而像结构力学一样，叠加原理在线性弹性力学中普遍适用。

如图 1-8 所示的物体，在水平力作用下，物体产生如虚线所示的变形，最大弹性变形

δ 与物体最小尺寸 B 相比很小，可忽略不计，物体受力后的平衡位置可以看成与受力前的位置一样。

4. 完全弹性假设

假设固体材料是完全弹性的，首先材料具有弹性性质，服从 Hooke（虎克）定律，应力与应变呈线性关系，同时物体在外部作用下产生变形，外部作用去掉后，物体完全恢复其原来的形状而没有任何残余变形，即完全的弹性。

5. 无初始应力假设

假定外部作用（荷载、温度、变形等）之前，物体处于无应力状态，由弹性力学所求得的应力仅仅是由外部作用所引起的。若物体中已有初始应力存在，则由弹性力学所求得的应力加上初始应力才是物体中的实际应力。

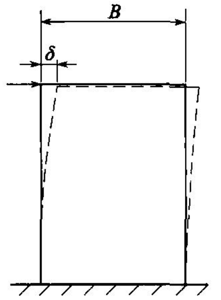

图 1-8　弹性变形 δ 与物体最小尺寸 B 相比很小

习题 1

1.1　试回忆材料力学中初等梁理论的平截面假设，根据这一假设所得到梁横截面上的正应力是按线性分布的，对于一般梁截面（如：深梁截面），如果平截面假设不成立，梁横截面上的正应力是否还按线性分布？

1.2　举例说明各向同性材料有哪些？各向异性材料有哪些？岩石、土壤、作冷拉加工后的钢材是否可看成各向同性材料？为什么？

1.3　如果弹性体的变形较大，小位移假设不成立，那么叠加原理是否还适用？对于非线性问题，有没有叠加原理？

第 2 章　弹性力学基本方程

2.1　弹性力学的两个基本概念

1. 外力的概念

土木工程中的结构物所承受的外力可分为体积力（以下简称为体力）与表面力（以下简称为面力）两类。

体力来自于物体内，作用在结构介质上，如常见的重力与惯性力都是体力。对图 2-1 结构介质中的任意一点 p，取包围 p 点的一团微小介质，其体积为 ΔV，所受到的力为 $\Delta\vec{Q}$，则任一点 p 所受到的体力可定义为：

$$\vec{F}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta\vec{Q}}{\Delta V} \tag{2-1}$$

显然 $\vec{F}$ 表示了物体内单位体积介质所受到的力，因为 ΔV 为正的标量，所以 $\vec{F}$ 与 $\Delta\vec{Q}$ 同方向，将 $\vec{F}$ 沿三个坐标轴分解可得：

$$\vec{F}=X\vec{i}+Y\vec{j}+Z\vec{k} \tag{2-2}$$

这里 X、Y、Z 为体力 $\vec{F}$ 在 x、y、z 三个坐标方向上的分量；$\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$分别表示 x、y、z 三个坐标方向上的单位向量。在以后的分析中，体力均以分量来表示，体力的单位为 $\mathrm{N/m^3}$ 或 $\mathrm{kN/m^3}$。土木工程中最常见的体力是由重力引起的，重力可用体力来表示，材料的重度（单位体积内的重量）代表了该体力（重力）的大小。

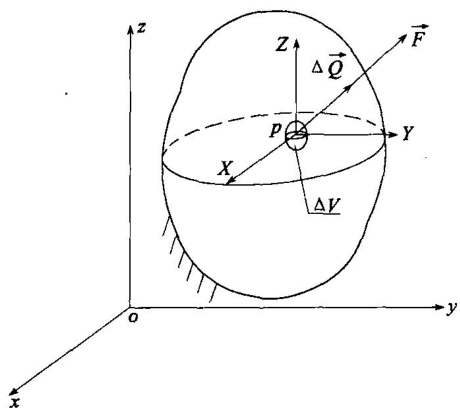

图 2-1　结构介质中任意一点所受到的体力

面力来自于物体外，作用在结构介质的外表面上，对图 2-2 结构介质外表面任意一点 p，取外表面包围 p 点的一个微小区域，其表面积为 ΔA，ΔA 上所受到的力为 $\Delta\vec{P}$，则外表面任一点 p 所受到的面力可定义为：

$$\vec{P}=\lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta A} \tag{2-3}$$

显然 $\vec{P}$ 表示了物体外表面单位面积所受到的力，因为 ΔA 为正的标量，所以 $\vec{P}$ 与 $\Delta\vec{P}$ 同方向，将 $\vec{P}$ 沿三个坐标轴分解可得：

$$\vec{P}=P_x\vec{i}+P_y\vec{j}+P_z\vec{k} \tag{2-4}$$

这里 P_x、P_y、P_z 为面力 $\vec{P}$ 在 x、y、z 三个坐标方向上的分量，在以后的分析中，面力均以分量来表示，面力的单位为 N/m^2 或 kN/m^2。土木工程中最常见的面力是水压力、土压力、风压力及接触压力等。

2. 应力的概念

物体受到外力（体力与面力）作用时会有内力产生。如何描述物体内力的作用效果呢？弹性力学采用应力来描述：如图 2-3 所示，过物体内一点 p，任意截取一个平面 mn，在截面 mn 上，取包围 p 点的一个微小区域，其面积为 ΔA，ΔA 上所受到的力为 $\Delta\vec{S}$，则截面 mn 上任一点 p 所受到的应力可定义为：

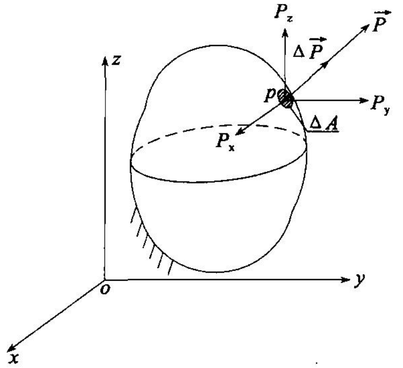

图 2-2 结构介质外表面任意一点所受到的面力

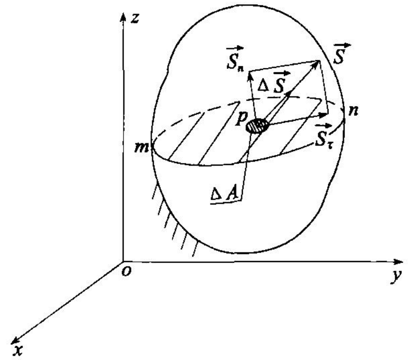

图 2-3 物体内任一截面上某一点的应力描述

$$\vec{S}=\lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta\vec{S}}{\Delta A} \tag{2-5}$$

因为 ΔA 为正的标量，所以 $\vec{S}$ 与 $\Delta\vec{S}$ 同方向，$\vec{S}$ 可沿截面 mn 的法向及切向分解：

$$\vec{S}=\vec{S}_n+\vec{S}_\tau \tag{2-6}$$

这里 $\vec{S}_n$ 垂直于截面 mn，为法向应力（正应力）；$\vec{S}_\tau$ 平行于截面 mn（或在截面 mn 上），为切向应力（剪应力）。应力的单位为 N/m^2 或 kN/m^2。

2.2 一点的应力状态

当我们要对某一点的应力进行度量时，根据上述的应力描述，就会产生这样一个问题，过某一点的截面 mn 取向不同，所得到应力的方向及大小都不同，截面 mn 的取法有无限多个，所得到的应力也有无限多个，用无限多个截面上的应力来描述一点的应力状态显然是不现实的，我们很自然地想到用某些特殊截面上的应力来描述一点的应力状态，最简单的办法是取三个与坐标轴相垂直的截面来描述某一点 p 的应力状态，如图 2-4 所示。以图 2-4（a）为例，根据应力的概念，与 x 轴垂直的截面上有一个正应力 σ_x 与一个剪应力，截面上的任何剪应力总可以沿两个坐标轴 y 和 z 分解为两个分量 τ_{xy} 及 τ_{xz}，即这个截面有三个应力分量 σ_x、τ_{xy} 及 τ_{xz}。同理，图 2-4（b）、（c）的截面也各自有三个应力分量，三个截面一共有九个应力分量，将这九个分量记为下列的一个矩阵：

$$[\sigma]=\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z\end{bmatrix} \tag{2-7}$$

式（2-7）称之为应力矩阵或应力张量，弹性体中任一点 p 的应力状态可由上述的应力矩阵来描述。这个应力矩阵能否充分地描述任一点 p 的应力状态呢？回答是肯定的，因为只要知道这个应力矩阵，那么过 p 点的任一截面上的应力都可以由式（2-7）的应力矩阵确定，具体的计算公式将在下一节中讨论。

应力方向与符号的规定：正应力以 σ_x 为例，下标 x 表示应力沿 x 方向，当截面受拉时 σ_x 的符号为正，当截面受压时 σ_x 为负。剪应力以 τ_{xy} 为例，下标 x 表示应力作用的截面垂直于 x 轴，y 表示应力沿 y 轴方向，剪应力正负号的确定考虑二个因素：(1) 截面外法线方向，沿坐标轴正向为正，反向为负；(2) 应力方向沿坐标轴正向为正，反向为负。当截面外法线与应力方向的符号相同时，剪应力为正，符号不同时，剪应力为负，即规则为："正正得正，正负得负（负正得负），负负得正"。以图 2-4（a）中 τ_{xy} 为例，截面的外法线方向沿 x 轴正向，剪应力方向沿 y 轴正向，两者符号相同，所以图中的 τ_{xy} 为正。弹性力学中应力图皆以正向标注。

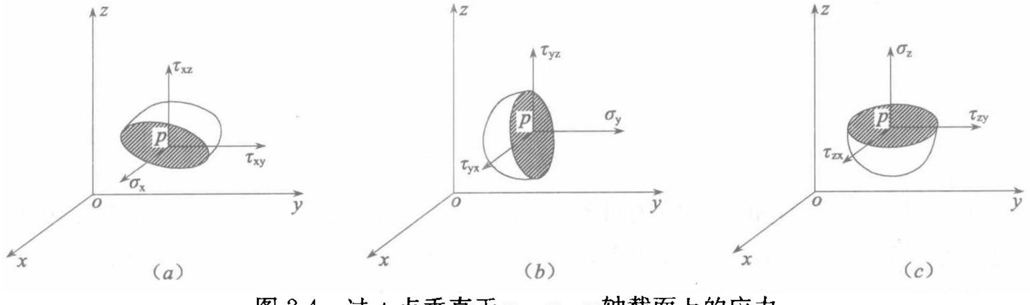

图 2-4　过 p 点垂直于 x、y、z 轴截面上的应力

2.3　任一斜截面上的应力

根据上一节，若已知某一点三个与坐标轴相垂直截面上的应力，则过该点任一斜截面上的应力可由三个相互垂直截面上的应力确定。如图 2-5 所示的微元四面体，任一斜截面 abc 的外法线向量 $\vec{v}$ 方向余弦为 $(l, m, n)^T$（即：$\vec{v}=\cos\alpha\vec{i}+\cos\beta\vec{j}+\cos\gamma\vec{k}=l\vec{i}+m\vec{j}+n\vec{k}$），方向余弦可以用来确定斜截面在空间中的倾斜角度，设斜截面上沿坐标轴的应力分量为 $(X_v, Y_v, Z_v)^T$，斜面 abc 的面积为 ΔS，则三个直角三角形 Δpbc，Δpac，Δpab 的面积分别为：

$$\begin{cases}\Delta pbc=\Delta S\cdot l\\ \Delta pac=\Delta S\cdot m\\ \Delta pab=\Delta S\cdot n\end{cases} \tag{a}$$

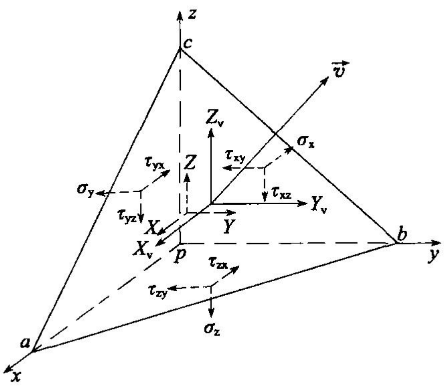

图 2-5　任一斜截面上的应力分量 $(X_v, Y_v, Z_v)^T$

微元四面体受到的体力为（X，Y，Z），体力方向沿坐标轴正向，图 2-5 中的四面体在体力与各个面上的应力作用下应保持平衡，由$\sum F_x=0$ 得：

$$X_v \cdot \Delta S-\sigma_x \cdot \Delta S \cdot l-\tau_{yx} \cdot \Delta S \cdot m-\tau_{zx} \cdot \Delta S \cdot n+\frac{1}{3}X \cdot \Delta S \cdot \Delta h=0 \tag{b}$$

式中，Δh 为以斜面为底的四面体高度，令 pa，pb，$pc\to 0$，即有：ΔS，$\Delta h\to 0$，这时可保证斜截面也过 p 点，将 ΔS 除式（b）得：

$$X_v=\sigma_x \cdot l+\tau_{yx} \cdot m+\tau_{zx} \cdot n \tag{c}$$

同理，由$\sum F_y=0$ 及$\sum F_z=0$ 有：

$$Y_v=\tau_{xy} \cdot l+\sigma_y \cdot m+\tau_{zy} \cdot n \tag{d}$$

$$Z_v=\tau_{xz} \cdot l+\tau_{yz} \cdot m+\sigma_z \cdot n \tag{e}$$

将式（c）、式（d）及式（e）写为矩阵形式：

$$\begin{Bmatrix} X_v \\ Y_v \\ Z_v \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} \tag{f}$$

为便于记忆，应用剪应力互等定理 $\tau_{xy}=\tau_{yx}$，$\tau_{xz}=\tau_{zx}$，$\tau_{zy}=\tau_{yz}$（关于剪应力互等定理的证明见下一节），将式（f）改写为：

$$\begin{Bmatrix} X_v \\ Y_v \\ Z_v \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} \tag{2-8}$$

式（2-8）即为任一斜截面上的应力计算公式，这个公式回答了上一节的问题，即应力矩阵能充分地描述任一点 p 的应力状态，因为只要已知一个点 p 的应力矩阵，那么过 p 点的任一斜截面上的应力都可以根据这个应力矩阵来确定。

2.4 平衡方程、应力边界条件

对弹性体中的任一点 p，截取一个包围 p 点的微元平行六面体（图 2-6），它的六个面都垂直于坐标轴，棱边长为 dx、dy、dz，p 点受到的体力为（X，Y，Z）^{T}，我们将这个微元体六个面分为前后面、上下面、左右面，六个面上都受到应力作用，以前后面上的应力为例说明，后面上的应力为 σ_x、τ_{xy}、τ_{xz}，前面与后面的位置坐标仅在 x 方向有一个改变量 dx，因此前面上的应力随位置变化的增量为$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}dx$、$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}dx$、$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}dx$，注意到$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}$、$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}$、$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}$为应力沿 x 方向的变化率，所以前面上的应力全量为 $\sigma_x+\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}dx$、$\tau_{xy}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}dx$、$\tau_{xz}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}dx$，其他面上的应力依此类推，见图 2-6。微元体在体力与应力的作用下应保持平衡。

由$\sum F_x=0$：

$$\left(\sigma_x+\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}dx\right)dydz-\sigma_x dydz+\left(\tau_{yx}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}dy\right)dzdx-\tau_{yx}dzdx+$$

$$\left(\tau_{zx}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}dz\right)dxdy-\tau_{zx}dxdy+Xdxdydz=0 \tag{a}$$

式（a）1、2 项，3、4 项与 5、6 项分别表示前后面、左右面与上下面上沿 x 方向的力，最后一项为 x 方向的体力，整理上式可得：

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+X=0 \tag{b}$$

同理，由 $\sum F_y=0$ 及 $\sum F_z=0$ 有：

$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}+Y=0 \tag{c}$$

$$\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+Z=0 \tag{d}$$

又由微元体的转动平衡条件：$\sum M_X=0$、$\sum M_Y=0$、$\sum M_Z=0$ 得：

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}，\ \tau_{xz}=\tau_{zx}，\ \tau_{zy}=\tau_{yz} \tag{2-9}$$

式（2-9）就是剪应力互等定理，这表明应力矩阵是一个对称矩阵。利用式（2-9），将式（b）、（c）、（d）写成便于记忆的矩阵形式：

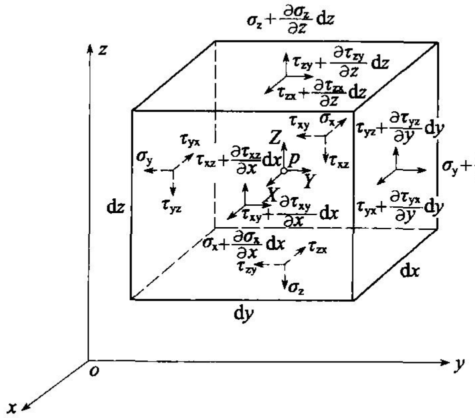

图 2-6　包围 p 点的微元平行六面体

$$\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}X\\ Y\\ Z\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{Bmatrix} \tag{2-10}$$

式（2-10）即为平衡方程。

设弹性体在表面区域 S_σ 受到面力 $\vec{P}=(P_x，P_y，P_z)^T$ 的作用，见图 2-7，在表面 S_σ 处任意切出一个带外表面的微元四面体（图 2-8），这个四面体的斜面为外表面，其外法线向量 $\vec{v}$ 的方向余弦为 $(l，m，n)^T$。

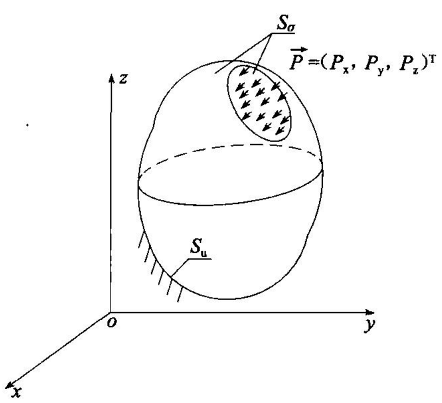

图 2-7　弹性体表面区域 S_σ 受面力 $\vec{P}=(P_x，P_y，P_z)^T$ 的作用

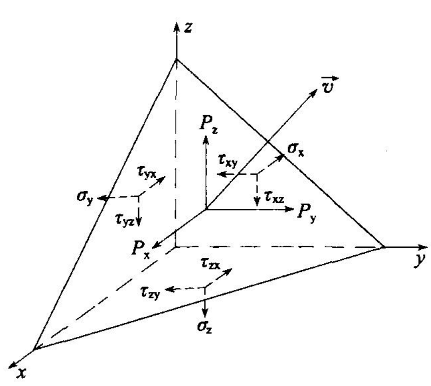

图 2-8　表面 S_σ 处任意切出一个带外表面的微元四面体