最优化方法及其应用

（五）

——多目标决策问题——

编写：颜基发
魏权龄

中国科学院数学研究所运筹室

1978.2.

序

最近十多年来多目标决策问题（也有称多目标最优化问题）在国外发展极为迅速，在国内也开始受到很多同志的重视，但是还缺少系统的介绍，这讲义标是起个抛砖引玉的作用，里面大部份内容曾在数学所运筹室内有关多目标问题的讨论班上介绍过，这是加以初步整理而成的急就章，内容分成两大部分，第一部分是“多目标最优化问题”，着重介绍此类问题的实际背景及各种各样提法，并介绍一些方法，由于多目标问题的丰富多彩，因此解决问题的思路也五花八门，要全部甚至大部介绍出来是不可能的，只能挑出其中某些方法来介绍，我们希望这部分对于一些迫切须用一些多目标最优化问题的方法的同志将是有益的，第二部分是“多目标数学规划的基本理论”这部分着重介绍多目标问题中属于数学规划部分的一些基本理论及各种问题之间的联系，里面也包含某些新研究的结果，这部分对于研究非线性规划及多目标数学规划理论的同志将是有益的。由于水平所限，编写匆促，错误之处望读者多加指正，特别这两部份由于两个同志分头所写，没有来得及进一步统一，好在是一个汇编性的讲义，而且又有一定的独立性，就不想作进一步加工，最后还应指出这份讲义也是五七机部708所要求而写，笔者感谢他们提供一些实际背景和促使我们加快写成这本讲义。

笔者　1977.11.2.

目录

第一部分　多目标最优化问题　（顾基发）

第二部分　多目标数学规划的基本理论　（魏权龄）

第一部分

多目标最优化问题

第一章 多目标问题简史

在我们的生产、经济活动，科学实验和工程设计中经常需要判断一个决策（计划，方案，配方）的好坏．当判断某个决策的好坏只要考察某一个主要指标即可，那时如决策个数不多通过简单比较就可择优，而如果决策个数太多以至无限个，这时可应用单目标最优化的种々方法（如数学规划，动态规划，直接最优化方法等）来找出最优决策，可是一般评判某个决策的优劣往々同时要考察很多个目标，例如设计一个导弹，既要其射程远，又要耗燃料省，还要精度高等．设计一个新产品的工艺过程往々希望产量高，消耗低，质量好等，确定一个新的橡胶配方的好坏，往々同时考察甚至多达八，九个指标如强力、硬度、变形、伸长等々，又如选择一个新厂或新工业基地的厂址，除了要考虑运输费用，造价，燃料费等经济指标外，还要考虑污染等社会因素，正因为同时要考察那么多指标（而且其中有些是定性指标），使问题复杂化，以致有时决策者很难轻易下判断说哪个决策更好．当然随之而来的多目标最优化问题也就大大复杂起来。

国外一般认为多目标最优化问题最早是1896年由法国经济学家 V. pareto[1] 提出来的，他是从政治经济学的角度提出的，把很多本质上是不可比较的目标化成一个单一的最优目标，以后1944年 Von Neumann 和 Morgenstern[2] 又从对策论角度提出有多个决策者，彼此又有互相矛盾的多目标决策

问题。1951年 T.C. Koopmans[3] 从生产和分配的活动分析中提出多目标最优化问题，并引入了"Pareto 最优"的概念，同年 Kuhn 和 Tucker[4] 从数学规划角度提出向量极值问题给出了一些基本定理。1963 年 L.A. Zadeh[5] 从控制论角度提出了多指标问题，并给出了一些基本概念，当然这段期间也还有一些其他作者有关的文章，但是数量不算太多。到七十年代多目标问题的研究得到越来越多的重视，截至 1975 年 M. Zeleny[6] 初步作的文献总结就达五百多篇，从 1972 年召开第一次国际性多目标决策讨论班以来，国际上已开过六、七次有关多目标问题的会议，说明多目标问题已受到越来越多的重视，而且是国外当前研究生攻博士论文的一个好题目。

当前关心这方面问题研究主要来自下几个方面：经济、管理、系统工程、控制论和运筹学等，也有从数学规划和最优控制本身的发展来研究它。

我们国家最近几年在推广优选法和最优设计的实际工作中也已提出不少多目标的最优化问题，也有些同志提出一些初步的解决方案，但对多目标最优化问题还缺少系统的研究，这个分企图就国内外处理多目标问题的方法，若干基本概念和理论问题作一个概貌性的介绍

第二章 实例

为了说明多目标问题的实际意义及某些处理多目标问题的方法，我们在本章先介绍几个国内外的实例，我们不拟过于深入问题的细节，而是着重于问题的提出和解决问题的思路，对于其中涉及到的某些方法在后面的几章将详细的介绍。

实例一 橡胶配方

由n种成分$x_1, x_2, \cdots, x_n$组成一个橡胶配方，简单地用$X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$表之，对于每一个配方往往要同时考察很多个指标，例如强力f_1，硬度f_2，伸长f_3，变形$f_4 \cdots$等，假定有m个指标，它们当然都与选定的配方X有关，也即每选定某个配方X，即需同时考察$f_1(X), \cdots, f_m(X)$等m个指标，当m很大时，对两个不同方案（配方）同时比较所有m个指标，往往难下决断，有人就曾使用数学规划的办法：即先抓住某个指标作为主要指标，这儿就以强力$f_1(X)$作为主要指标（他要求越大越好），而对其它指标只要求落入一定规格范围就可以了，这样把问题化成求

$$\max_{X \in R} f_1(X)$$

$$R=\{X \mid f_i' \leq f_i(X) \leq f_i'', \ i=2, \cdots m, \ X \in A\}$$

这儿A表示对X本身也可以有一些限制，其中f_i', f_i''表示第i个指标的上，下限，也可以只要一个，表示只有下限或上限。

实例二　挑流鼻坎设计

为了保护水利设施，要设计挑流鼻坎，使溢其下流的水挑射一段距离以保护水利设施。假设设计的挑坎中要改变的设计变量为挑射角 θ 和挑坎曲率半径 R。而考察挑坎设计好坏的指标有挑射距离 L 和冲击深度 T，它们都与 R，θ 的选择有关，希望 L 越大越好，T 越小越好，最后采用 $\frac{T}{L}$ 作为评判鼻坎的优劣标准，要求 $\frac{T}{L}$ 越小越好。

实例三　光学设计

评定一个光学系统的好坏，主要看其成象质量，而与成象质量有关的要考察很多个象差指标 f_i $(i=1,2,\cdots,m)$ 可以予先规定象差指标值为 f_i^* $(i=1,2,\cdots,m)$。要求选择光学系统的结构参数 $X=(X_1,X_2,\cdots X_n)$，使

$$F_i(X)=f_i(X)-f_i^*$$

尽可能小或者达到小于允许偏差值 δ_i $(i=1,2,\cdots,m)$ 可以提出几种衡量光学系统成象质量的方法，例如 (一) 解不等式法：

直接找 X^*，使所有不等式组

$$|f_i(X^*)-f_i^*|<\delta_i \qquad (i=1,2,\cdots,m)$$

同时成立

(二) 加权平方和法：

建立评价函数

$$\Phi(X)=\sum_{i=1}^{m}\mu_i\left[f_i(X)-f_i^*\right]^2$$

要求 X^* 使 $\Phi(X)$ 达到最小，这个方法的困难在于比较难确定适当的权系数 μ_i 。

实例四　门坐式起重机四连杆变幅机构的最优设计

衡量变幅机构设计的好坏一般要求：

(1) 货物尽量走水平，即高度变化小；

(2) 货物移动时水平速度的变化量尽量小；

(3) 由吊装的货物所引起的倾复力矩尽量小。

为达到这三个要求进一步用五个目标函数来描述，关于要求(1)用落差 $f_1=\Delta y$ 表示，要求(2)用速比 $f_i=i_v$ 表示，要求(3)用三个目标来表示：大幅度时力矩 $f_3=M(\alpha_0)$，小幅度时力矩 $f_4=M(\alpha_1)$，力矩变化量 $f_5=\Delta M$，其中目标 f_1, f_2, f_5 要求越小越好，f_3, f_4 要求适中为好，即过大、过小都不好，对于这样的多目标问题最后采用了功效系数的方法来解决，先将每一个目标值 f_i 与一个相应的（通过一定的关系式确定的）功效系数 d_i 值相对应，例如 $d_i=F_i(f_i)$，$i=1,\cdots,5$ 然后用一个总功效系数

$$D=\sqrt[5]{d_1\cdot d_2\cdot d_3\cdot d_4\cdot d_5}$$

来评价机构的优劣，一般规定 $0\leq d_i\leq 1$， $i=1,\cdots,5$ 从而有 $0\leq D\leq 1$， D 越大越好。

实例五　原子能发电站的热交换器的参数最优化。

考虑冷凝器中四个参数 x_1——冷凝器管道内直径，x_2——管道中水流速，x_3——冷却倍数，x_4——冷却初始温度，参数应满足的约束条件为

$$x_i^{min} \leq x_i \leq x_i^{max}, \qquad i=1,2,3,4$$

$$N = a_{11} x_1^{-0.2} x_2^{0.8} f_e(x) \leq N_0$$

考察的目标有两个

$$\text{重量} \quad f_{\text{重}}(x) = 1.45 a_3 \frac{x_1 + 0.5 a_4}{x_1} f_e(x)$$

$$\text{费用} \quad f_S(x) = a_{10} x_3 + f_2(x_3, x_4)$$

这儿及下面出现的一些未加说明的参数和函数都有具体数字和表达式，为简单起见不具体列出了.

曾提出两个方法来处理这里提出的多目标问题：

(一) 线性加权法

构造如下新目标函数

$$f(x) = \lambda_1 f_{\text{重}}(x) + \lambda_2 f_S(x)$$

要求使其达到最小的解，即作为最优参数，式中

$$\lambda_1 = \frac{a_1 + a_2 f_1(x_1)}{1.45}, \qquad \lambda_2 = 1$$

$$f_1(x) = e_1 + e_2 x_1 + e_3 x_1^{-1} + e_4 x_1^{-2}$$

(二) 理想点法

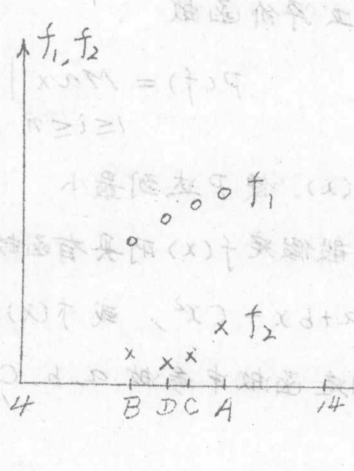
先对单目标时分别求出最优目标值 $f_{\text{重}}^0$ 和 f_S^0，然后作目标函数

$$R(x) = \left(\frac{f_{\text{重}}^0(x) - f_{\text{重}}^0}{f_{\text{重}}^0}\right)^2 + \left(\frac{f_S(x) - f_S^0}{f_S^0}\right)^2$$

使 $R(x)$ 达到最小的解，即作为最优参数

实例六　微孔胶拖鞋底配方优选

某厂为解决鞋底质量不合格问题，认为主要是起发率和收缩率不稳定的矛盾引起，希望找到一个好的配方使起发率 f_1 尽量大，收缩率 f_2 尽量小，配方中起主要作用的是促进剂，发泡剂，软化剂，曾采用因素轮换法，对单因素优选时用 0.618 法，例如发泡剂用量优选，优选范围为 $(4, 14)$，利用 0.618 法选择点 $A=10.18$， $B=7.82$ 试验结果点 A 的 $f_1=55.7\%$，$f_2=1.88\%$，点 B 的 $f_1=44.2\%$，$f_2=0.75\%$，按 f_1 的指标来判断（越大越好）点 A 比点 B 好，故应去掉 B 的左端，按 F_2 的指标来判断（越小越好）点 B 比点 A 好，则应去掉 A 的右端，这样在同时考虑两个指标前提下，最优点应落在 (A, B) 内，下面在范围 $(7.82, 10.18)$ 内利用 0.618 法选择两个点 $C=9.28$，$D=8.72$，试验结果 C 的 $f_1=52.1\%$，$f_2=1.38\%$，点 D 的 $f_1=49.7\%$，$f_2=0.415\%$，由于找到的点 D 已较好地满足要求，试验没有再进行下去。



实例七　配曲线

在处理一些实验数据时经常需要配曲线，即根据在一些已知实验点 x_i 上，测得其试验结果值 y_i　$(i=1, 2, \cdots, n)$，

如何寻找出x和y间的曲线关系：

$$y=f(x)$$

由于种种原因总难找到一个好的理论曲线使它在已知点x_i上取值$f(x_i)$和实验结果值y_i完全一致，于是转向找一个尽易和实验结果"相近"的理论曲线。由对"相近"的不同理解可以得出不同的近似理论曲线，例如有

(一) 最小二乘法

建立评价函数

$$Q(f)=\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i)-y_i\right]^2$$

要找$f(x)$使Q达到最小

(二) 最大偏差最小化

建立评价函数

$$P(f)=\underset{1\le i\le n}{Max}\left|f(x_i)-y_i\right|$$

要找$f(x)$使P达到最小

一般假定$f(x)$所具有函数形式已知，例如$f(x)=a+bx$或$f(x)=a+bx+cx^2$，或$f(x)=ae^{bx}+ce^{dx}$等，这时问题主要是确定函数中参数a, b, c, d等。

第三章 多目标最优化问题的提法和一些基本概念

在考虑单目标最优化问题时，任忌两个解只要比较他们相应的目标值后，总能比出谁优谁劣（除了目标值相等外），例如在求单目标最大时，谁的解相应目标值大就是优者，但是在多目标时情况就不一样，例如希望所有目标都是越大越好，这时两个方案①，②进行比较，对于第一个目标方案①比②优，而对第二个目标方案①比②劣（例如参见图1），因此①，②就无法定出优劣，

但是他们与方案③相比却都比③劣，他们与⑤相比也都比⑤劣，但是③，⑤又无法相比，在图1中十个点，除③④⑤三个点外，其它的点两两之间有时不可相比较，但总可找到另一个点比它优，例如⑩比②劣，②比⑥劣，⑥比③劣，⑨比①劣，①比⑦劣，⑦比⑤劣，⑧比④劣等等。因而①，②，⑥，⑦，⑧，⑨，⑩都称做劣解，而③，④，⑤彼此间无法比优劣，但又没有别的方案比它们中任一个好，因此这三个解就叫做非劣解，这种非劣解在多目标最优化问题中起着十分重要的作用，以后我们还要给出确切的定义。

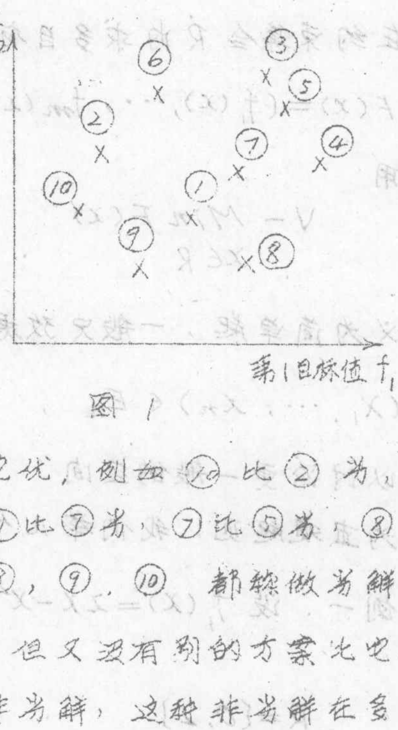


图1

假定有 m 个目标 $f_1(x),\cdots f_m(x)$ 同时要考察，希望他们都是越大越好，在不考察其它目标时，我们记第 i 个目标的最优值为

$$f_i^0 = \underset{x\in R}{Max}\, f_i(x)$$

相应的最优解记为 $x^{(i)}$，$i=1,2,\cdots,m$，其中 R 是解的约束集合。

当这些 $x^{(i)}$ 都相同时，就以这共同解作为多目标的共同的最优解，但一般不会全同，例如 $x^{(1)}\neq x^{(2)}$ 时，这两个解就难比优劣，同时也们一定都是非劣解。

为区别单目标最优的记号，今后用

$$V-\underset{x\in R}{Max}\ F(x)$$

表示在约束集合 R 内求多目标最优（有时也叫求向另最优）其中 $F(x)=(f_1(x),\cdots,f_m(x))$，如果各目标都要求越小越好，就采用

$$V-\underset{x\in R}{Min}\ F(x)$$

本讲义为简单起，一般只孜虑 n 维欧氏空间 E_n，也即 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in E_n$，　$R\subset E_n$　$f(x)\in E_m$，实际上可以讨论更一般的空间

为直观起见，我们举几个散例

例一．设 $f_1(x)=2x-x^2$，　$f_2(x)=\begin{cases} x & 0\leq x\leq 1 \\ -2x+3, & 1\leq x\leq 2\end{cases}$

$R=[0,2]$

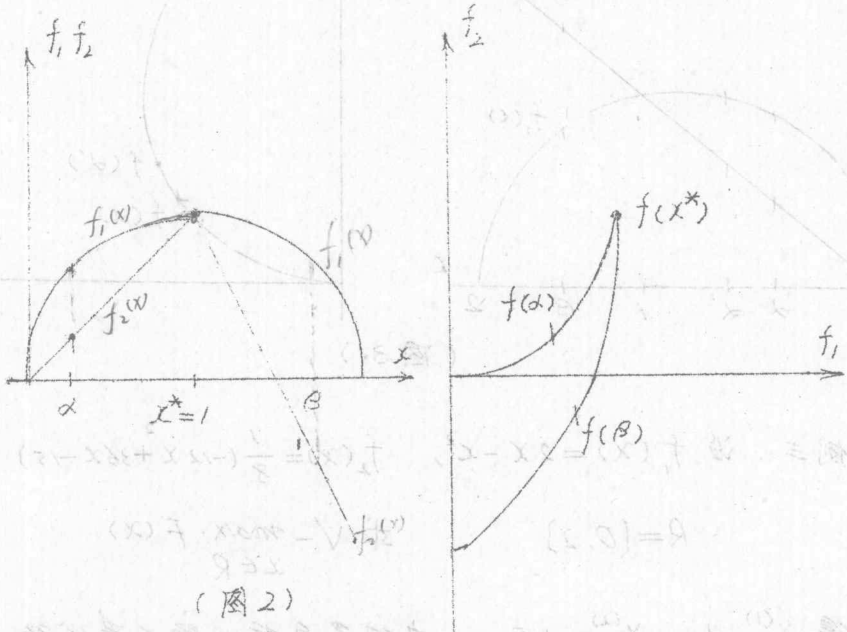
求 $V-\underset{x\in R}{Max}\ F(x)$

先对单个目标分别求出其最优解，显然第一个目标的最优解 $x^{(1)}=1$，

$$f_1^{\circ}=f_1(1)=\underset{x\in R}{max}\ f_1(x)$$

对第二个目标的最优解 $x^{(2)}=1$，即　$f_2^{\circ}=f_2(1)=\underset{x\in R}{max}\ f_2(x)$

因为 $x^{(1)}=x^{(2)}=1$ 故取 $x^{*}=1$ 作为此多目标问题的最优解.
由图2中可看出 α 和 β 两个解彼此无法比较，但都劣于 x^{*}。



（图2）

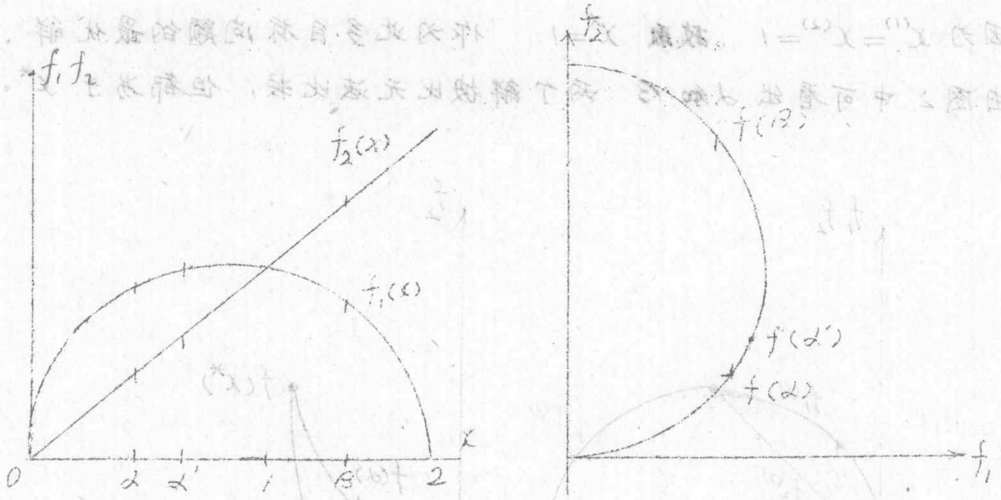
例二. 设 $f_1(x)=2x-x^2$, $f_2(x)=x$

$R=[0,2]$.

求 $\underset{x\in R}{V-Max}\ f(x)$

容易求得 $x^{(1)}=1$, $x^{(2)}=2$, 这时多目标问题没有共同最优解，从图3中可看出 α 和 β 两个解彼此无法比较，但是容易找到 α' 比 α 优，α' 与 β 仍无法比优劣，但还可找到 α'' 比 α' 优。解 β 都不存在 β' 可以比它优，这时 β 就叫非劣解

本例中 $x\in[1,2]$ 时都是非劣解.

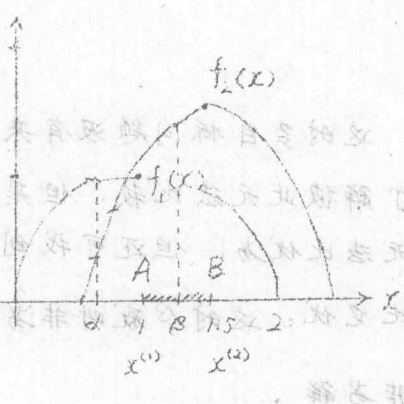


（图3）

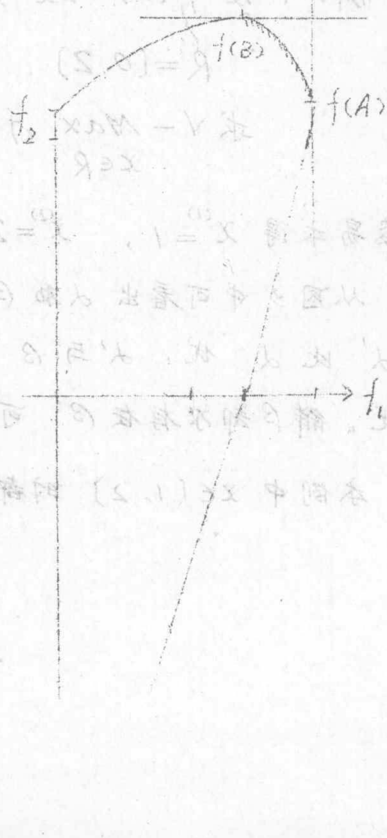
例三．设 $f_1(x)=2x-x^2$， $f_2(x)=\frac{1}{8}(-12x^2+36x-15)$

$R=[0,2]$ 　　求 $V-\max\limits_{x\in R} F(x)$

易求得 $x^{(1)}=1$， $x^{(2)}=1.5$ 　这时多目标问题无最优解，而 $x\in[1,1.5]$ 都是非劣解



（图4）

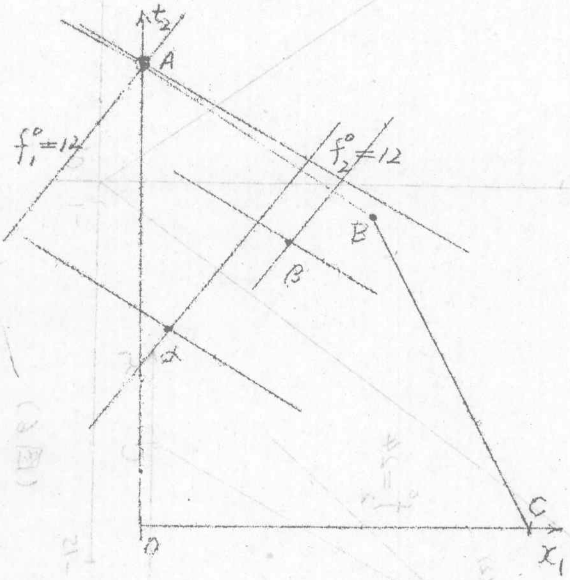


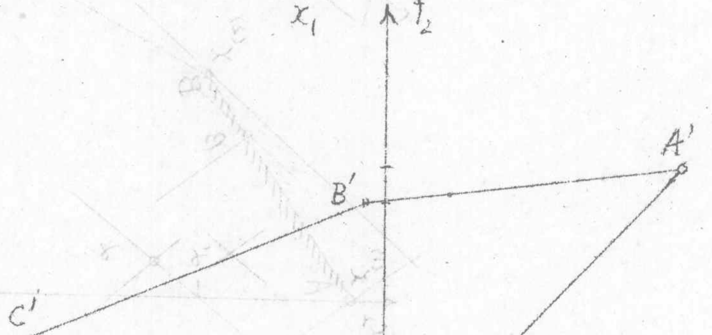
例四，设 $f_1(x)=-3x_1+2x_2$，$f_2(x)=x_1+2x_2$

$$R:\begin{cases}-2x_1-3x_2+18\geqq 0\\ -2x_1-x_2+10\geqq 0\\ x_1\geqq 0,\ x_2\geqq 0\end{cases}$$

$$\text{求 } V\text{-}\underset{x\in R}{Max}\ F(x)$$

易求得 $x^{(1)}=(0,6)$，$x^{(2)}=(0,6)$，因而多目标问题最优解即 $x^*=(0,6)$。





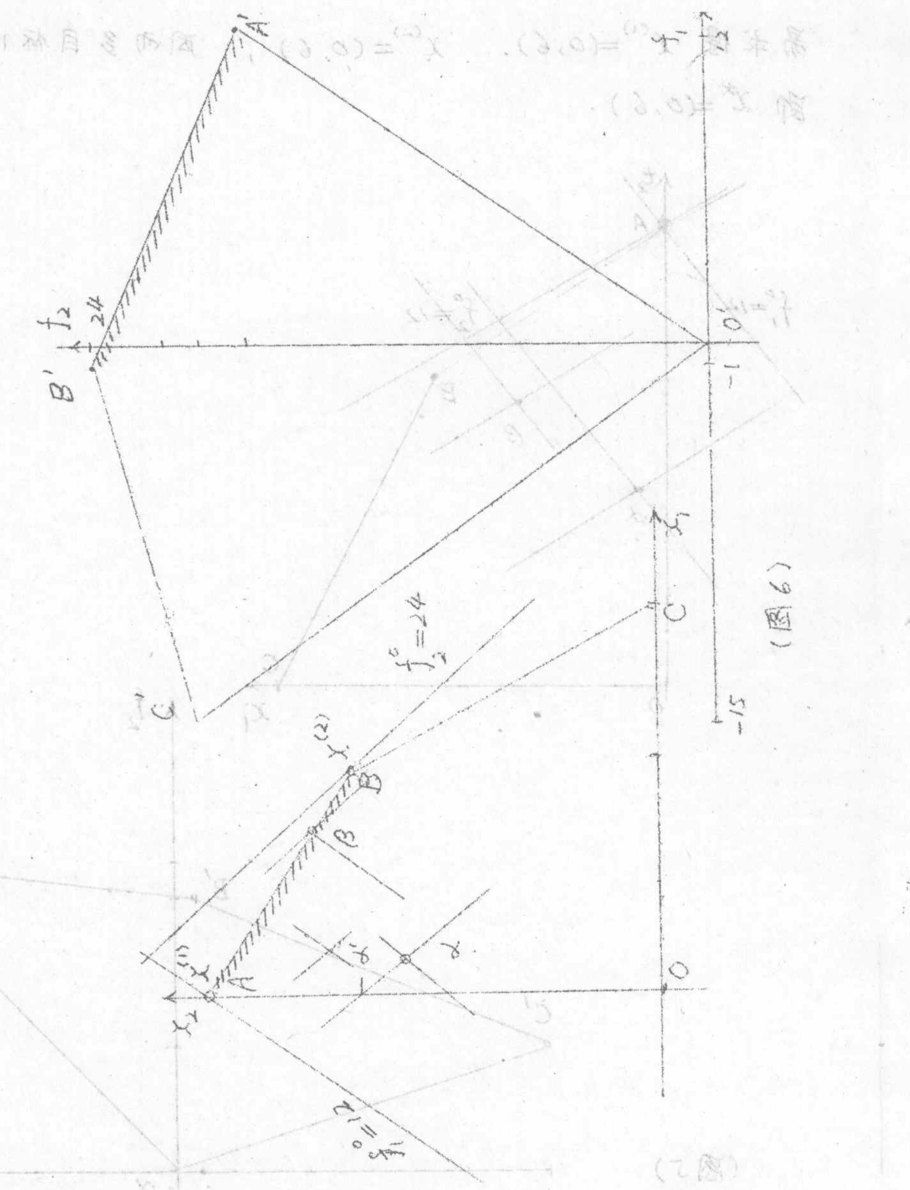
（图5）

图5中α，β 二法比较但都劣于A.

例五，设 $f_1(x)=-3x_1+2x_2$， $f_2(x)=4x_1+3x_2$

R同例四 求 $V-\underset{x\in R}{Max}\ F(x)$

易求得 $x^{(1)}=(0,6)$， $x^{(2)}=(3,4)$， 这时多目标问题无最优解，但有非劣解，在联结点 $x^{(1)}=(0,6)$ 到 $x^{(2)}=(3,4)$ 之间的线段上点都是非劣解。



（图6）